Taevamehaanika

Taavet Kalda *06.01.2020*
taavet.kalda@gmail.com

Sissejuhatus

Taevamehaanika on astronoomia haru, mis uurib kosmiliste objektide liikumist. Olümpiaadifüüsika kontekstis tegeldakse üldiselt objektide trajektooride, ajakulu, minimaalse kiiruse jne leidmisega. Kõik taevamehaanika ülesanded on üldiselt lahendatavad alltoodud seaduste ja omaduste rakendamisel.

Teoreetiline taust

Kepleri I seadus. Iga planeedi orbiit on ellips, mille ühes fookuses on Päike. Kehtib eeldusel $m \ll M$, kus m ja M on vastavalt planeedi ja Päikese mass.

Kepleri II seadus. Planeedi raadiusvektor katab võrdsetes ajavahemikes võrdsed pindalad. Teisisõnu impulsimoment säilib (tõene iga tsentraalse jõu korral):

$$L = mvr = m\omega r^2 = \text{const.}$$

Kepleri III seadus. Planeetide tiirlemisperioodide ruudud suhtuvad nagu nende orbiitide pikemate pooltelgede kuubid. Täpsemalt,

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(M+m)},$$

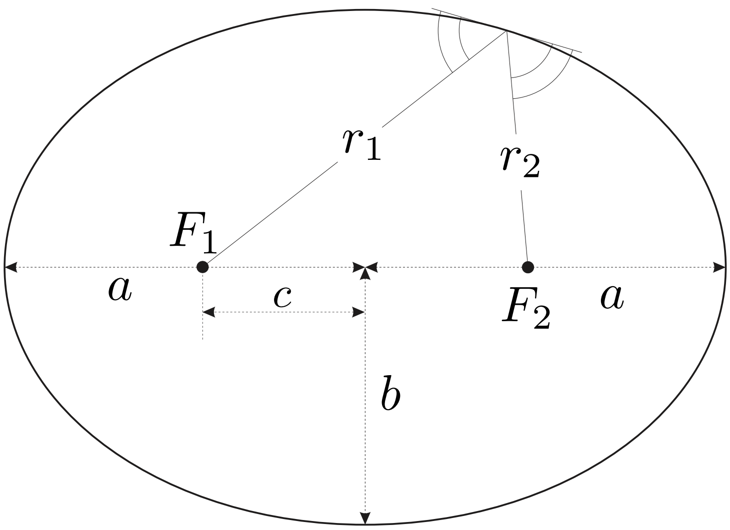
kus a on pikem pooltelg, G gravitatsioonikonstant.

Orbiidi koguenergia. Ümber tähe tiirleva keha koguenergia on avaldatav pikema pooltelje kaudu:

$$E = K + U = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{2a} = \text{const.}$$

K ja U on vastavalt keha kineetiline ja potentsiaalne energia.

Ellipsi omadused



Ellipsiks nimetatakse tasandile kuuluvate punktide hulka, mille puhul iga punkti kauguste summa kahest antud punktist, mida nimetatakse fookusteks (F_1 ja F_2), on jääv suurus, mis võrdub ellipsi läbimõõduga ehk pikema telje pikkusega. Teisisõnu,

$$r_1 + r_2 = \text{const} = 2a,$$

kus a on pikem pooltelg. Lisaks kehtib r_1 ja r_2 vahel peegeldusseadus (vt joonist). Selles saab veenduda kasutades Fermat printsiipi.

Ellipsi lühemat pooltelge tähistatakse sümboliga b ning fookuse ja ellipsi keskpunkti vahelist kaugust sümboliga c.

Ellipsi venitatust iseloomustab ekstsentrilisus, mis on defineeritud kui

$$e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}.$$

Ellipsi puhul $0 \le e < 1$, kus $e = 0$ vastab ringile ning $e = 1$ paraboolile. Fookuste kaugus keskpunktist on mugavalt avaldatav ekstsentrilisuse kaudu: $c = ea$. Seega on orbiidil oleva objekti lähim kaugus tähest $r_{\min} = (1-e)a$ ja suurim kaugus $r_{\max} = (1+e)a$.

Definitsioonid

Esimene kosmiline kiirus – Väikseim orbiidile minekuks vajalik kiirus. Vastab ringorbiidile

Teine kosmiline kiirus, ehk paokiirus – Väikseim kiirus, mis võimaldab mingi taevakeha külgetõmbejõu piirkonnast lahkuda.

Afeel – Ümber Päikese tiirleva taevakeha orbiidi punkt, mis asub Päikese massikeskmest kõige kaugemal.

Periheel – Ümber Päikese tiirleva taevakeha orbiidi punkt, mis asub Päikese massikeskmest kõige lähemal.

Ülesanded

Järgnevates ülesannetes võib eeldada, et kõikide planeetide orbiidid on ringjooned ning et Päike on planeetidest palju massiivsem. Arvväärtusi vaja arvutada, aga huvi pärast on vajalike algandmete numbrilised väärtused antud:

Maa kaugus Päikesest – $R_E = 1\,\text{AU} = 1{,}496 \times 10^{11}\,\text{m}$,
Marsi kaugus Päikesest – $R_M = 1{,}52\,\text{AU}$,
Maa orbitaalkiirus – $v_E = 30\,\text{km/s}$,
Maa raadius – $r_E = 6400\,\text{km}$,
raskuskiirendus Maal – $g = 9{,}81\,\text{m/s}^2$.

0.
a) Näidake, et Kepleri II seaduse mõlemad formulatsioonid on omavahel kooskõlas.
b) Tõestage Kepleri III seaduse kehtivus ringorbiidi korral.

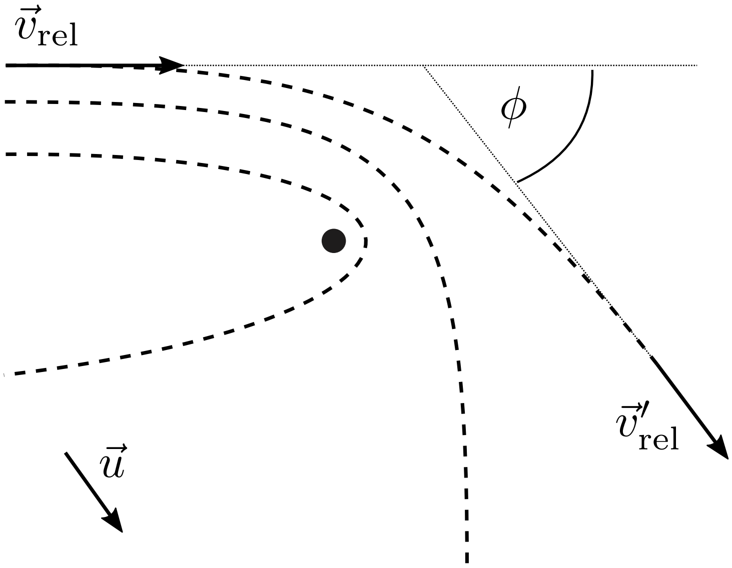
1. Ümber Päikese ringorbiidil raadiusega $R = R_E$ liikuvale objektile antakse radiaalsuunaline kiirus. Kui suur peab see kiirus olema, et objekt väljuks Päikese mõjualast?

2. Maa pinnal antakse satelliidile ühekordne algkiirus v_p. Missugune on minimaalne vajalik stardikiirus, et satelliit jõuaks lahkuda päikesesüsteemist? Ignoreerida teiste planeetide mõju. Mugavuse pärast tähistame satelliidi kiiruse Päikese taustsüsteemis äsja peale Maa gravitatsiooniväljast lahkumist sümboliga v_0.

3. Missugune on minimaalne vajalik kiirus v_0 (sama tähendus nagu eelmises ülesandes), et satelliit jõuaks Marsile? Kui palju aega selleks kulub?

Gravitatsiooniline ragulka Gravitatsiooniline ragulka viitab planeetide suhtelise liikumise ärakasutamisele, et muuta satelliitide trajektoori, peamiselt kütusekulu säästmiseks. Huvitaval kombel saab satelliit planeedilt kineetilist energiat "ära võtta". Selles veendumises vaadelgem satelliidi lähenemist planeedile planeedi taustsüsteemis.

Satelliit läheneb kiirusega $\vec{v}_{\text{rel}} = \vec{v} - \vec{u}$, kus $\vec{v}$ ning $\vec{u}$ on vastavalt satelliidi ning planeedi kiirused Päikese taustsüsteemis. Edasise liikumise käigus paindub satelliidi trajektoor teadud nurga võrra (joonisel ϕ) ning satelliit väljub sama kiirusega, aga teise nurga alt. On selge, et satelliidi väljumise nurka saab vabalt muuta varieerides satelliidi läheneva trajektoori kaugust planeedist (vt joonist). Niisiis on satelliidi lõplik kiirus Päikese taustsüsteemis $\vec{v}' = \vec{v}'_{\text{rel}} + \vec{u}$, $|\vec{v}'_{\text{rel}}| = |\vec{v} - \vec{u}|$ ning $\vec{v}'_{\text{rel}}$ on vabalt valitava suunaga. Uurides saadud avaldist kõige lihtsamal juhul kui $\vec{v}$ ja $\vec{u}$ on paralleelsed, näeme, et maksimaalne lõppkiirus on $2u - v$ või lihtsalt v.



Joonis 1

4. Nüüd üritatakse Marssi ära kasutada väiksema kütusekuluga Päikesesüsteemist lahkumiseks.
a) Satelliit väljub endiselt Maa gravitatsiooniväljast Maa liikumissuunaga paralleelselt kiirusega v_0. Mis on satelliidi tangentsiaal- ja radiaalsuunaline kiirus Marsiga kohakuti olles?
b) Mis on satelliidi maksimaalne kiirus peale Marsiga interakteerumist?
c) Mis on seega satelliidi minimaalne stardikiirus Päikesesüsteemist lahkumiseks?

Lisaülesanded

5. Maapinnalt visatakse vertikaalselt üles mingi objekt sellise kiirusega, et see eemaldub Maa pinnast kaugusele h ning tuleb siis tagasi. Leidke objekti lennuaeg.

6*. Põhjapooluselt tulistatakse ballistiline rakett, sihtmärk asub ekvaatoril. Missuguse nurga alt peab raketti tulistama, et see sihtmärki minimaalse kiirusega tabaks?