

EESTI FÜÜSIKAOLÜMPIAADI ÜLESANDED AASTATEST 2005 – 2018

koos vihjete ja lahendustega

Koostas Taavet Kalda

2020

Sisukord

Sissejuhatus	2
Ülesanded	3
Dünaamika	3
Elektriahelad	25
Elektrostaatika	42
Gaasid	50
Geomeetriline optika	58
Kinemaatika	75
Laineoptika	86
Magnetism	87
Staatika	93
Taevamehaanika	102
Termodünaamika	105
Varia	117
Vedelike mehaanika	123
Vihjed	129
Lahendused	172

Sissejuhatus

Siia on koondatud 400 gümnaasiumi ülesannet Eesti füüsikaolümpiaadi piirkonnavoorudest, lõppvoorudest ja lahtistest võistlustest. Igale ülesandele on juurde kirjutatud paarilauseline vihje. Juhul kui õpilane jääb ülesannet lahendades toppama, on tal võimalik vihjet lugeda ning teisele katsele minna.

Ülesanded on jaotatud teemade kaupa ning teemasiseselt raskuse järgi. Raskustaset tähistatakse kuni viie tärniga. Ülesannete lihtsamaks otsimiseks on ülesannete numbrite ette pandud "Ü", vihjete ette "V" ja lahenduste ette "L". Näiteks ülesande 133 teksti number on kujul Ü133. Iga ülesande juures on kirjas ka selle autor ning olümpiaadi vooru lühinimetuse, lisaks lühendid P 1, G 1 jne, kus tähed tähistavad põhikooli- ja gümnaasiumiastet. Näiteks G 9 viitab gümnaasiumiastme 9. ülesandele.

Ülesanded

Dünaamika

Ü1 Kivi ★

Autor: Aigar Vaigu, lõppvoor, 2005, G 1

Sirgjooneliselt ja jääva kiirusega $v = 4 \text{ m/s}$ tõusva õhupalli gondlis asub poiss. Mingil hetkel laseb poiss gondlist alla kukkuda kivi ning seejärel viskab ta kivile järgi palli, soovides tabada palliga langevat kivi. Milline võib olla suurim ajavahemik kivi lahtilaskmise ja palli viskamise vahel, et see oleks veel võimalik? Maapinnal seistes suudaks poiss visata palli vertikaalselt üles kuni $h = 20 \text{ m}$ kõrgusele. Võib eeldada, et õhupall asub piisavalt kõrgel selleks, et kivi saaks palliga tabada enne maapinnale kukkumist. Õhutakistus lugeda tühiseks. Raskuskiirendus $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

Ü2 Pallid ★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2007, G 1

Juku istub puu otsas ja laseb algkiirusega lahti tema käes oleva palli. All seisab Juhhan, kes samal hetkel viskab vertikaalselt üles täpselt samasuguse palli Juku pihta. Pärast pallide põrget jõuab Juku pall täpselt tema kõrgusele tagasi. Kas pall tabab Juhhanit enne või pärast seda, kui Juku pall jõuab Jukuni? Lugeda, et pallide põrge on absoluutselt elastne.

Ü3 Hobune ★

Autor: Valter Kiisk, piirkonnavoor, 2007, G 1

Puu oksal istub poiss, kes soovib hüpata puu alt mööda galopeeriva hobuse selga. Hobuse kiirus on $v = 10 \text{ m/s}$ ja puuoksa kõrgus sadula suhtes $h = 3 \text{ m}$. Kui suur peab olema horisontaalsihiline distant sadula ja puuoksa vahel sel hetkel kui poiss oksast lahti laseb?

Ü4 Eiffeli torn ★

Autor: Aigar Vaigu, piirkonnavoor, 2010, G 1

Eiffeli torni ülemiselt vaateplatvormilt (kõrgus maapinnast $h = 273 \text{ m}$) lastakse kukkuda raudkuulil. Täpselt $t = 3$ sekundi pärast kukutatakse veel üks raudkuul. Kui suur on raudkuulide suurim kiiruste vahe langemisel? Kui suur on ajavahemik kuulide maapinnale jõudmiste vahel? Raskuskiirendus $g = 9,8 \text{ m/s}^2$. Katse käigus ükski külastaja viga ei saanud.

Ü5 Kokkupõrge ★

Autor: Andreas Valdmann, piirkonnavoor, 2011, G 1

Kaks autot massidega $m = 1,5$ tonni teevad laupkokkupõrke, mille võib lugeda täielikult plastseks. Kui suur energia kulus purustuste tekitamiseks, kui:

a) mõlema auto kiirus oli $v_a = 50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$;

b) üks auto seisis paigal ja teise auto kiirus oli $v_b = 100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$?

(Võib arvestada, et autode lohisemisel pärast põrget olulist kahju ei teki.)

Ü6 Lendav pudel ★

Autor: Erkki Tempel, piirkonnavor, 2014, G 1

Pooleliitrisel pudelis, mille põhja on tehtud $0,4V$ väike auk pindalaga S , on m grammi vett. Pudelist keeratakse kork pealt ning pudel visatakse õhku algkiirusega v . Kui kiiresti voolab vesi pudeli põhjas olevast august välja siis, kui pudel veel üles liigub? Kui kiiresti voolab vesi august välja sel hetkel, kui pudel alla kukub? Põhjendage.

Ü7 Potsataja ja pähkliid ★

Autor: Erkki Tempel, piirkonnavor, 2014, G 2

Rongi viimase vaguni katusel istub Potsataja, kes loobib maha pähkliid. Potsataja viskab ühe pähkli maapinna suhtes horisontaalselt rongi liikumisega vastassuunas algkiirusega u . Samal hetkel viskab ta ka teise pähkli samuti maapinna suhtes horisontaalselt ning sama algkiirusega u , kuid risti rongi liikumise suunaga. Rong liigub ühtlaselt ja sirgjooneliselt kiirusega v ning pähkliid visatakse maapinna suhtes kõrguselt h . Kui kaugel teineteisest pähkliid maanduvad? Õhutakistust mitte arvestada.

Ü8 Kurv ★

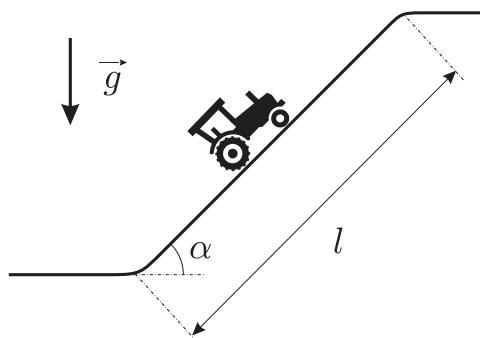
Autor: Mihkel Rähn, lahtine, 2016, G 2

Kiirusega $v = 90 \text{ km/h}$ sõitev auto läbib kurvi raadiusega $R = 250 \text{ m}$. Kui suur peab olema tee külgekalle (kraadides), et autos istujad ei tunneks kurvist tingitud külgsuunalist jõudu? Raskuskiirendus $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

Ü9 Tõus ★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2005, G 2

Talvise ilmaga Tartust Tallinnasse sõitev auto peab oma teekonna alguses ületama järsu ja libeda tõusu Jakobi tänaval (vt joonist). Tõusu kallak horisontaalsihi suhtes $\alpha \approx 5^\circ$, pikkus $l \approx 200 \text{ m}$. Hinnata, kui suur on minimaalne hõõrdetegur μ rataste ja tee vahel, mille puhul kiirusega $v = 30 \text{ km/h}$ märke üles sõitma hakkanud auto suudab veel tõusu ületada?



Ü10 Keha ★

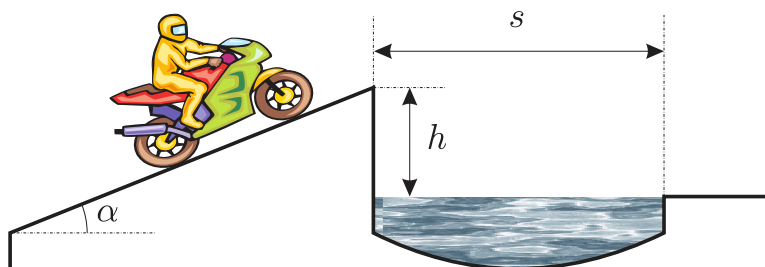
Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2006, G 3

Vertikaalselt ülesse visatud keha läbib kaks korda kõrgusel h asuvat punkti. Ajavahemik nende kahe läbimise vahel on Δt . Leida keha algkiirus v_0 ja aeg τ keha liikumise algusest kuni algpunkti tagasi jõudmiseni.

Ü11 Mootorratas ★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2007, G 5

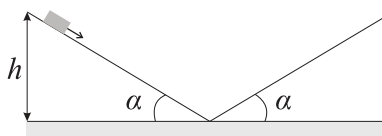
Mootorrattur tahab hüpata üle kraavi, mille mõõtmed on näidatud joonisel. Kui suur peab olema mootorratturi minimaalne kiirus v lennu alguses selleks, et tema ettevõtmine õnnestuks?

**Ü12 Kelk ★**

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2008, G 2

Kelguga lastakse alla $h = 10\text{ m}$ kõrgusest $\alpha = 30^\circ$ kaldenurgaga orunõlvast. Kui kõrgele tõuseb kelk saadud hooga mööda sama suure h kaldenurgaga vastasnõlva, kui hõõrdetegur on $\mu = 0,1$?

Märkus. joonis on ligikaudne, languselt tõusule üleminek on tegelikult sujuv ja pörkega seotud kiirusekadu seal ei toimu.

**Ü13 Hantel ★**

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2008, G 1

Hantel koosneb kahest võrdse massiga kerast (kumbki massiga m) ning neid ühendavast massitust jäigast vardast. Alguses hoitakse hantel horisontaalselt õhus paigal. Nüüd antakse ühele kuulidest hetkega vertikaalsuunaline kiirus v ning hantel hakkab vabalt liikuma. Vabalangemise kiirendus on g . Missugune on süsteemi kiineetiline energia hetkel, mil massikese saavutab maksimaalse kõrguse?

Ü14 Ping-pong ★

Autor: Siim Ainsaar, lõppvoor, 2008, G 2

Pingpongipall kukutatakse kõrguselt h horisontaalsele lauale. Igal põrkel kahaneb palli energia k korda. Leidke palli lahtilaskmisest seismajäämiseni kuluv aeg t . Vabalangemise kiirendus on g .

- Ü15 Mürsk ★** Autor: Mihkel Kree, piirkonnavor, 2009, G 2
 Kahurist välja lennanud mürsk (massiga M) laguneb oma lennutrajektoori kõrgeimas punktis mingi sisemise vedrumehanismi abil kaheks võrdseks pooleks (kumbki massiga $M/2$) nii, et üks osadest kukub mürsu senist trajektoori pidi liikudes täpselt kahurini tagasi. Kui kaugemale kahurist maandub teine pool? Lagunemispunkti projektsioon maapinnale asub kahurist kaugusel L .
- Ü16 Kerad ★** Autor: Valter Kiisk, lahtine, 2010, G 1
 On antud kolm väliselt identset ja ühesuguse massiga kera. On teada, et üks neist keradest on homogeenne, teine on seest õõnes ja kolmas on seest vedel. Kuidas saab lihtsate võrdlevate mehaanikakatsetega kindlaks teha, milline on iga kera sisemus? Abivahendid võite vabalt valida, aga kerasid vigastada ei tohi.
- Ü17 Sild ★** Autor: Valter Kiisk, lõppvoor, 2010, G 1
 Risti üle $l = 100$ m laiuse jõe kulgeb kumer sild, mille keskel on autotee $h = 5$ m võrra kõrgemal kaldapealsest tasemest. Silla profiiliks on ringjoone kaar. Auto massiga $m = 1000$ kg ületab silla muutumatu kiirusega $v = 60$ km/h. Kui suure jõuga rõhub auto silla keskkoha? Kui suure kiiruse juures hakkab kaduma kontakt rataste ja tee vahel?
- Ü18 Varras ★** Autor: Stanislav Zavjalov, lõppvoor, 2011, G 2
 Mööda liigendi abil seina külge kinnitatud väga pikka ja tühiselt kergelt varrast saab libiseda väike rõngas massiga m . Esialgu asub rõngas liigendist kaugusel l ja varras on horisontaalne. Ajahetkel $t = 0$ hakkab süsteem vabalt liikuma. Leidke varda ja horisontaali vahelise nurga α ajaline sõltuvus. Kõik liikumised lugeda hõõrdevabaks.
- Ü19 Kadunud rahakott ★** Autor: Eero Vaher, lahtine, 2012, G 2
 Suusahüppemäe hoovõturada asub nõlval, mille tõusunurk on α . Hoovõturaja alumine ots on horisontaalne. Suusahüppaja alustas hoovõttu kõrguselt h , kuid kohe hoovõtu alguses kukkus tal rahakott taskust välja. Kui kaugemale äratõukepunktist (mööda horisontaali) rahakott lendab, kui see liigub ilma takistusega?
- Ü20 Kivi ★** Autor: Taavi Pungas, lahtine, 2013, G 1
 Juku avastas maast välja turritamas poolkerakujulise kivi. Mõõtes mõõdulindiga selle ümbermõõdu, sai ta tulemuseks $a = 2,4$ m. Edasi võttis ta taskust tikutopsi ja hakkas seda poolkera tipust alates natukesehaaval allapoole liigutama, kuni lõpuks tikutops kivilt maha libises. Mõõdulindiga mööda poolkera mõõtes sai ta tipu ja libisemispäiga vaheliseks kauguseks $b = 20$ cm. Kui suur oli kivi ja tikutopsi vaheline hõõrdetegur?

Ü21 Kelgutaja ★

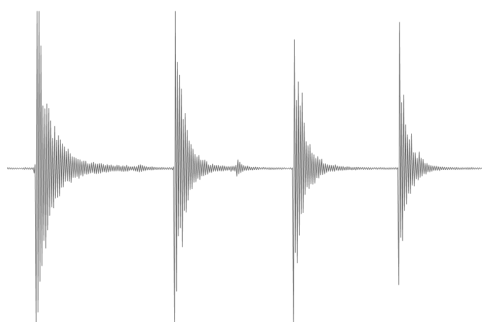
Autor: Taavi Pungas, piirkonnavor, 2013, G 4

Lapsel kulus ühtlase kaldega nõlvast kõrgusega $h = 2,0\text{ m}$ alla kelgutamiseks $t = 3,0\text{ s}$. kui suur vähemalt pidi sel juhul olema nõlva kaldenurk α , kui ta alustas sõitu paigalseisust?

Ü22 Pall ★

Autor: Taivo Pungas, lõppvoor, 2013, G 2

Madis analüüsis arvutiprogrammiga palli põrkamisest tehtud helilindistust ja sai joonisel toodud graafiku, mis näitab helisignaali kuju. Kui on teada, et pärast kolmandat põrget tõusis pall täpselt 1 m kõrgusele, leidke palli maksimaalne kõrgus pärast esimest põrget.

**Ü23 Kaubarong ★**

Autor: Mihkel Rähn, lahtine, 2014, G 1

Kaubarongi massiga $m = 5000\text{ t}$ veab vedur võimsusega $N = 2500\text{ kW}$. Veerehõõrdetegur rataste ja rööpa vahel on $\mu = 0,002$.

a) Leidke rongi kiirus v_1 horisontaalsel teel.

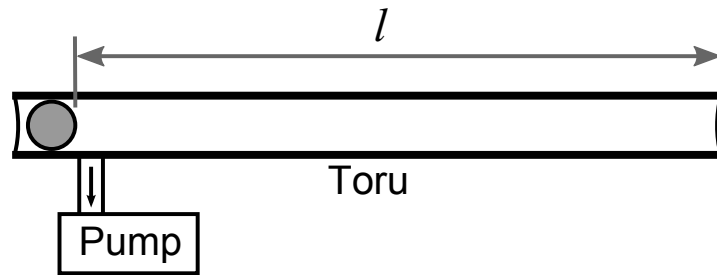
b) Leidke rongi kiirus v_2 tõusul üks sentimeeter ühe meetri kohta.

Õhutakistusega mitte arvestada.

Ü24 Vaakumkahur ★

Autor: Andreas Valdmann, lahtine, 2014, G 2

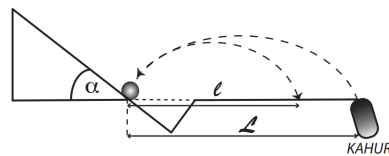
Joonisel on kujutatud niinimetatud vaakumkahur. Laadimiseks pistetakse laske-
moonaks olev pall vaakumkahuri toru vasakpoolsest otsast sisse. Seejärel kaetakse toru mõlemad otsad kergestirebeneva õhukindla membraaniga, näiteks fooliumi-
ga, ning pumbatakse torust õhk välja. Nüüd on vaakumkahur laskevalmis. Tulis-
tamiseks purustatakse vasakpoolne membraan, mille tagajärjel hakkab pall toru
parempoolse otsa poole sööstma. Piisavalt pika toru korral purustab pall parem-
poolse membraani ning lendab torust välja. Olgu palli läbimõõt võrdne toru si-
seläbimõõduga $d = 4,0\text{ cm}$, palli mass $m = 24\text{ g}$ ja asugu pall enne tulistamist
 $l = 150\text{ cm}$ kaugusel toru parempoolsest otsast. Kui suur on palli kiirus vahetult
enne parempoolse membraani läbimist? Õhurõhk on $P_0 = 100\text{ kPa}$. Hõõrdumise-
ga pole tarvis arvestada.



Ü25 Mängukahur ★

Autor: EFO žürii, lahtine, 2016, G 1

Mängukahurist tulistatakse kummipall nii, et see pörkab risti kaldpinnaga, kahurist horisontaalkaugusel L . Pall pörkab kaldpinnast tagasi kaugusele l (vt joonis). Leidke, kui suur osa energiast neeldus pörkel. Kaldpinna kaldenurk on α .



Ü26 Kõievedu ★

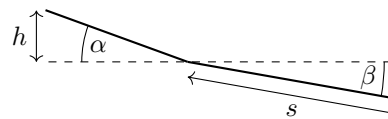
Autor: Oleg Košik, piirkonnavoore, 2016, G 2

Eero ja Oleg võistlevad kõieveos nii, et kogu võistluse ajal on kõis horisontaalne. Eero mass $m_1 = 110$ kg ja Olegi mass $m_2 = 85$ kg. Hõõrdetegur talla ja põranda vahel $\mu = 0,30$ on mõlemal mehel sama. Kumb mees võidab? Millise maksimaalse kiirendusega saab võitja sundida kaotajat liikuma, nii et ta ise veel paigale jääks? Raskuskiirendus $g = 9,8$ m/s².

Ü27 Vastlaliug ★

Autor: Moorits Mihkel Muru, lõppvoore, 2017, G 1

Juss leidis vastlaliu laskmiseks künka, mille läbilõige koosneb kahest sirglõigust, nagu näha joonisel, edasi on horisontaalne maa. Esimese nõlvaosa kõrgus on $h = 2$ m ja selle kalle $\alpha = 20^\circ$, teise osa pikkus on $s = 20$ m ja kalle $\beta = 5^\circ$. Jussi mass koos kelguga on $m = 47$ kg ja hõõrdetegur lume ja kelgu vahel on $\mu = 0,08$, raskuskiirendus $g = 9,8$ m/s². Leidke, kui pikk on Jussi vastlaliug.

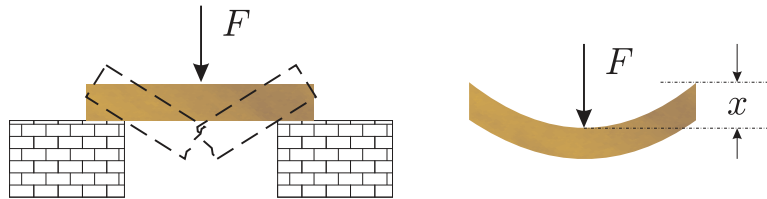


Ü28 Karatist ★★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2007, G 6

Hinnake, millise kiirusega v peab karatisti käsi tabama kahele kivile toetuva laua-jupi keskpunkti (vt joonist), et laud murduks? Käe mass on $m = 1,5$ kg, laua mass $M = 2$ kg, laua jäikustegur $k = 1,4 \cdot 10^5$ N/m, murdumiseks vajalik läbipaine (st laua keskpunkti nihe) $d = 20$ mm.

Märkus. Jäikustegur k on võrdetegur laua keskpunkti rakendatud jõu F ning laua keskpunkti nihke x vahel (vt joonist).



Ü29 Veenus ★★

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2007, G 2

Lugegem Maa ja Veenuse orbiidid ümber Päikese ringikujulisteks. Planeetid tiirlevad ümber Päikese samas suunas ja Veenuse maksimaalne eemaldumus (nurk Veenuse ja Päikese vahel Maalt vaadates) on 46 kraadi.

a) Leidke Veenuse ja Maa orbiitide raadiuste suhe.

b) Mitu päeva jääb järjestikuste maksimaalsete eemaldumuste vahele?

Vihje. Kepleri seaduse kohaselt on taevakehade tiirlemisperioodide ruudud võrreldised vastavate orbiitide raadiuste kuupidega.

Ü30 Auto ★★

Autor: Mihkel Heidelberg, piirkonnavor, 2009, G 5

Auto kiirendab nii, et rattad libisevad. Hetkel on auto kiirus stabiilselt v , vedavate rataste nurkkiirus ω ja raadius r . Kui oletada, et mootori võimsus läheb ainult auto liikumisse ja vedavate rataste libisemisse, siis kui suur on kasutegur?

Ü31 Vedru ★★

Autor: Aigar Vaigu, piirkonnavor, 2010, G 4

Raske tellis kukub poole meetri kõrguselt jäigale lühikesele vedrule. Põrge on elastne ja tellis lendab peaaegu algele kõrgusele tagasi. Kui kõrgele maast kerkib vedru pärast põrget?

Ü32 Pendel ★★

Autor: Taavi Pungas, piirkonnavor, 2011, G 7

Pendel pandi väikese amplituudiga võnkuma ning stopperiga registreeriti neid hetki, kui pendel läbis vasakult poolt tulles oma tasakaalupunkti. Kaks järjestikust sellist sündmust toimusid hetkedel $t_1 = 3,19$ s ja $t_2 = 5,64$ s. Pendlil lasti mõnda aega segamatult võnkuda, seejärel saadi kaheks järjestikuseks näiduks $t_3 = 61,14$ s ja $t_4 = 63,54$ s. Leidke võimalikult täpselt pendli võnkeperiood ning hinnake selle mõõtemääramatust.

Ü33 Alpinist ★★

Autor: Kaur Aare Saar, lahtine, 2013, G 3

Alpinist massiga $m = 75$ kg on kinnitatud elastse nõõri külge pikkusega $L = 6$ m. Nõõri teine ots on kinnitatud kalju külge. Olles roninud 6 meetri kõrgusele kinnituskohast, ta kukub. Leidke, kui suur võib olla ülimalt nõõri elastsustegur k , teades, et suurim nõõri tõmbejõud, mida inimene talub, on $T = 25mg$. Õhutakistust ärge arvestage.

Ü34 Langevarjuhüpe ★★

Autor: Taavi Pungas, piirkonnavor, 2014, G 5

Juku massiga $m = 60$ kg ja tema isa Juhan massiga $M = 90$ kg otsustasid teha langevarjuhüppe. Neile pandi selga ühesugused langevarjud massiga $m_v = 10$ kg ning nad lükati lennukist välja. Mõlema langevarjud avanesid täielikult ühesugusel kõrgusel h , pärast mida saavutasid hüppajad tühise aja jooksul konstantse kiiruse ja liuglesid sellel kiirusel maapinnani. Jukul kulus langevarju avanemisest maapinnani jõudmiseks aega $t = 110$ s. Kui pikk aeg T kulus selleks Juhani? Langevarjule õhu poolt mõjuv takistusjõud on võrdeline langemiskiiruse ruuduga. Lihtsuse mõttes loeme hüppajatele endile mõjuva õhutakistuse tühiselt väikeseks.

Ü35 Kelk ★★

Autor: Joonas Kalda, piirkonnavor, 2016, G 4

Juku tahab kelguga ületada jääga kaetud jõge. Ta startib lumega kaetud kaldalt, mis on horisondiga $\alpha = 15^\circ$ nurga all. Jõe laius $l = 10$ m, kelgu ja lume vaheline hõõrdetegur $\mu_1 = 0,20$, kelgu ja jää vaheline hõõrdetegur $\mu_2 = 0,10$. Kui kõrgele veepinnast peab kallas ulatuma, et Juku libiseks teise kaldani?

**Ü36 Pidurdus ★★**

Autor: Eero Vaher, lõppvoor, 2016, G 2

Auto sõidab teel, mille kõrguse muut teepikkuse kohta on $k = \frac{1}{30}$. Ühesuguse algkiiruse ning pidurdusjõu korral jääb auto ülesmäge liikudes seisma vahemaa $s_1 = 25$ m jooksul, allamäge liikudes aga vahemaa $s_2 = 30$ m jooksul. Mis on auto algkiiruse v väärtus? Raskuskiirendus $g = 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Ü37 Kahurikuul ★★

Autor: Hans Daniel Kaimre, lõppvoor, 2016, G 3

Juku arvutas koolitunnis ülivõimsast kahurist otse üles lastud kuuli maksimaalseks kõrguseks $H = 400$ km. Ta ei arvestanud aga seda, et sellistel kõrgustel gravitatsioonivälja muutus on juba märkimisväärne ning ei saa eeldada, et raskusjõud on konstantne. Leidke, kui kõrgele kuul tegelikult lendaks. Maa raadius $R = 6400$ km. Õhutakistusega mitte arvestada.

Ü38 Pendel ★★

Autor: Andreas Valdmann, piirkonnavor, 2017, G 3

Nööri ja koormisest koosnev pendel võngub nii, et amplituudasendis on nööri ja vertikaalsihi vaheline nurk $\alpha = 60^\circ$. Mitu korda erinevad võnkumise käigus suurim ja vähim pinge nööris?

Ü39 Mäenõlv ★★

Autor: Jonatan Kalmus, lõppvoor, 2017, G 2

Kui suure maksimaalse kaldenurgaga α mäenõlvast on võimalik jalgrattaga konstantse kiirusega üles sõita? Ratturi mass on m , jalgratta mass M , pedaali vända pikkus r_1 , eesmise hammasratta raadius r_2 , tagumise hammasratta raadius r_3 , ratta raadius r_4 . Eeldada, et ratturi massikese püsib sõitmise käigus ratta suhtes paigal ja sõitja kannab kogu oma kehakaalu vajuval pedaalil. Hõõrdetegur pinna ja ratta vahel on piisavalt suur libisemise vältimiseks. Mehaanilise hõõrdumisega

jõuülekandes mitte arvestada ning veerehõõrdejõu võib lugeda tühiseks. Eeldada, et jalgratta keskmine kiirus püsib ligikaudselt konstante ja kiiruse suhteline muutus veerand väärtamisperioodi jooksul on tühiselt väike.

Märkus. Ülesande teksti on olümpiaadil esineva versiooniga võrreldes kohandatud.

Ü40 Aerud ★★

Autor: Tundmatu autor, piirkonnavor, 2005, G 6

Aerude pikkus tullist (punktist, kus aerud kinnituvad paadi kere külge) kuni käepidemeni on $a = 1$ m ning tullist kuni labadeni on $b = 1,5$ m. Keskmine jõud, millega aerutaja tõmbab kumbagi aeru, on $F = 60$ N. Paadi ja vee vaheline takistusjõud on $F_h = \alpha v^2$, kus $\alpha = 20$ kg/m. Kui suure keskmise kiirusega liigub paat? Hinnata aerutaja keskmist võimsust.

Ü41 Kivi ★★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2006, G 4

Paelaga lae külge kinnitatud kivi liigub mööda horisontaaltasapinnas asuvat ringjoont, mille kaugus laest $h = 1,25$ m. Leida kivi tiirlemisperiood τ .

Ü42 Kaldpind ★★

Autor: Mihkel Rähn, piirkonnavor, 2006, G 4

Pall kukub kaldpinnale ja hakkab elastselt pörkuma (st energiakadudeta). Kui kaugel on viies pörkekoht esimesest? Kaldpinna kaldenurk on α , palli algkõrgus esimesest pörkekohast oli h .

Ü43 Kuulike ★★

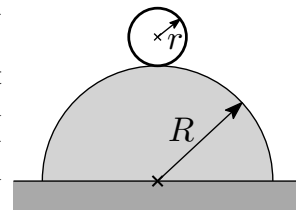
Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2008, G 5

Venimatu ja kaalutu niidi otsa kinnitati kuulike. Niit viidi horisontaalasendisse ja lasti lahti. Kuulike kiiruse vertikaalne komponent hakkab esialgu suurenema, kuid teatud hetkest alates vähenema. Millise nurga moodustab niit vertikaalsihiga ajahetkel, kui kuulike kiiruse vertikaalne komponent on maksimaalne?

Ü44 Veerev silinder ★★

Autor: Andres Laan, lahtine, 2010, G 3

Alusele kinnitatud poolsilindril raadiusega R lebab selle kõrgeimas punktis seest tühi silinder raadiusega r . Mingisugusel hetkel nihkub keha natuke tasakaalust välja ja selle tulemusel hakkab libisemiseta veerema (hõõrdetegur on väga suur). Leidke, kui kõrgel aluse kohal keha poolsilindri pinnast eraldub. *Vihje:* kui veereva silindri mass on m ja ta massikeske liigub kiirusega v , on ta kineetiline energia mv^2 (ilma kordajata $\frac{1}{2}$!).



Ü45 Veoauto ★★

Autor: Kristian Kuppert, lahtine, 2011, G 3

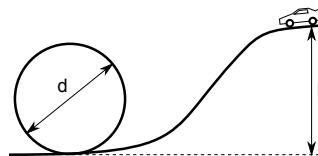
Veoauto kasti kõrgusega H on vedelik, mille pinna kõrgus kasti põhjast on h , kusjuures $h > \frac{H}{2}$. Kui suure kiirendusega a saab veoauto liikuda, ilma et vedelik kastist välja voolaks? Veoauto kasti pikkus on L .

Märkus. Auto kiirendab sujuvalt ning tänu sellele vedelik võnkuma ei hakka.

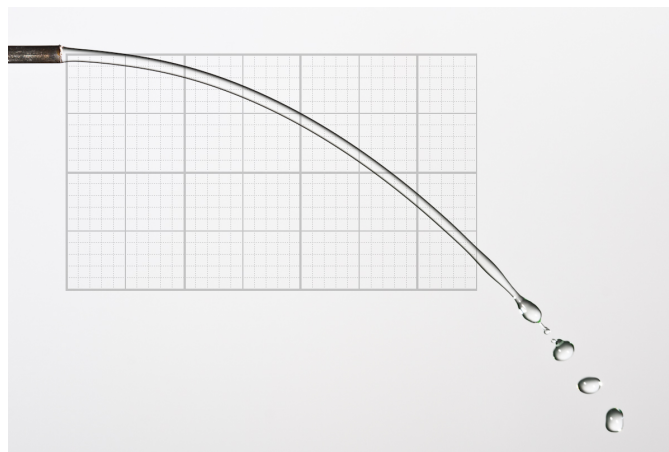
Ü46 Surmasõlm ★★

Autor: Andreas Valdmann, piirkonnavor, 2012, G 5

Mudelauto rada on kujutatud joonisel: auto alustab kaldtee tipus seisvast asendist, kogub laskumisel kiirust ja teeb silmuses surmasõlme. Mis on minimaalne kõrgus h , et auto silmuse läbimisel alla ei kukuks? Silmuse läbimõõt on d . Hõõrdumisega arvestada ei ole vaja.

**Ü47 Veejuga ★★** Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2012, G 2

Pildil on foto horisontaalsest torust väljuva veejoaga ning teljestik, mille väikseim jaotis on võrdne veejoa läbimõõduga selle algkõrgusel. Ühtlase kiirusega voolava veejoa alla pandud mõõteklaas ruumalaga $V = 150 \text{ cm}^3$ täitus ajaga $t = 5 \text{ min}$. Leidke toru siseläbimõõt.

**Ü48 Lasketiir ★★**

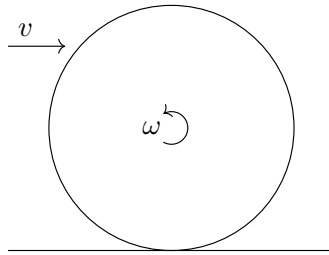
Autor: Aigar Vaigu, piirkonnavor, 2016, G 6

Siselasketiirus tulistatakse vintpüssist, mille kuuli kiirus $v = 320 \text{ m/s}$, kaugusel $s = 30 \text{ m}$ olevat märklauda. Laskur sihib püssiga samal kõrgusel olevat märki ja tabab seda otse kümnesse. Hinnake, kui kaugele sihtmärgist satuks kuul, kui relva enne laskmist keerata ümber sihtimistelje 180 kraadi? Õhutakistusega mitte arvestada.

Ü49 Silinder ★★

Autor: Kaur Aare Saar, lõppvoor, 2016, G 4

Silinder massiga m ja raadiusega R libiseb tasapinnal kiirusega v ja nurkkiirusega ω . Kui libisemine on lõppenud, liigub silinder kiirusega v esialgses vastupidises suunas. Leidke silindri esialgne nurkkiirus.



Ü50 Veok ringteel ★★

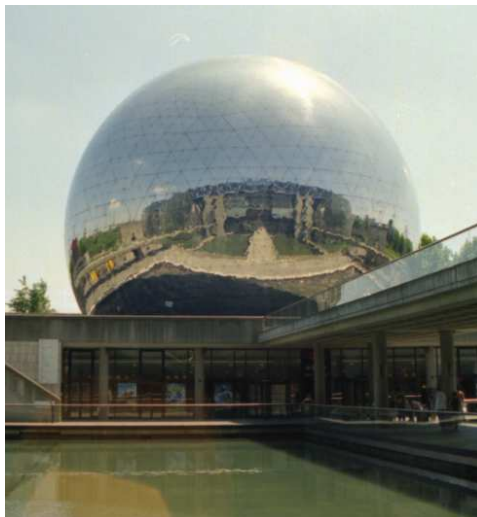
Autor: Jonatan Kalmus, piirkonnavor, 2018, G 5

Veok sõidab ringteel kõverusraadiusega R ühtlase kiirusega. Leida veoki maksimaalne võimalik kiirus, eeldusel et hõõrdetegur on piisavalt suur libisemise vältimiseks. Veoki massikeskme kõrgus maapinnast on h ja veoki laius l . Raskuskiiendus on g .

Ü51 Sfäär ★★★

Autor: Andre Säask, lahtine, 2005, G 6

Üks osa Pariisi Cité des Sciences teadusmuuseumi kompleksist — La Géode — kujutab endast hiigelsuurt sfääri raadiusega $R = 18$ m, mille sees asub maailma suurim kinoekraan (vt joonist). Hoonet väljastpoolt imetlev uudishimulik koolipoiss otsustab tabada selle hoone tipp-punkti tennisepalliga. Kui suure minimaalse kiirusega v peaks ta palli viskama, et palli liikumise trajektoor lõikuks hoone välispinnaga vaid ühes punktis — hoone tipp-punktis — ja see oleks ühtlasi ka palli liikumise trajektoori kõrgeimaks punktiks? Pall alustab liikumist kõrgusel $h = 1,5$ m.



Ü52 Anum ★★★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2005, G 7

Siledal pinnal asub kerge ristkülikuline anum, mis on täidetud vedelikuga tihedusega ρ_0 , vedeliku ruumala on V_0 . Anuma põhja sattunud põrnikas ruumalaga V ja tihedusega ρ hakkab anuma põhja suhtes roomama kiirusega u . Millise kiirusega hakkab anum pinnal liikuma? Anuma mass on tühine, veetase jääb kogu aeg horisontaalseks. Eeldada, et pinna ja anuma vahel hõõre puudub.

Ü53 Mullitaja ★★★

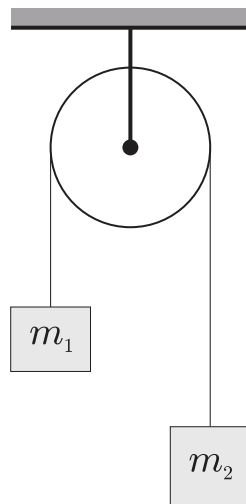
Autor: Jaak Kikas, lõppvoor, 2005, G 7

Veekogu põhjas asub mullitaja – õhuballoon väikese avausega, millest võrdsete ajavahemike $\Delta t = 1$ s järel väljuvad õhumullid raadiusega $R = 0,3$ mm. Taolise mullikese liikumisel vees mõjub sellele takistusjõud $F = 6\pi\eta Rv$, kus η on vedeliku voolamistakistust iseloomustav tegur (vedeliku viskoossus, vee korral on selle suuruse väärtuseks $1 \cdot 10^{-3}$ N s/m²) ja v on mullikese kiirus. Võite lugeda, et mullikese liikumine toimub kogu aeg kiirusega, mis on määratud tingimusega, et kõigi talle mõjuvate jõudude resultant on null. Vee tihedus $\rho = 1000$ kg/m³, raskuskiirendus $g = 9,8$ m/s², õhurõhk $p_0 = 100$ kPa. Mitu korda muutub vahemaa naabermullikeste vahel tõusul põhjast pinnale, kui veekogu sügavus on $H = 27$ m?

Ü54 Plokk ★★★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2006, G 5

Kui suure kiirendusega a_k ja mis suunas hakkab liikuma kahest kehast koosneva süsteemi masskese, kui kehad on seotud niidiga, mis on tõmmatud üle ploki (vt joonist)? Kehade massid on m_1 ja m_2 ($m_1 < m_2$), niit on kaalutu ja mitteelastne.



Ü55 Kada ★★★

Autor: Oleg Košik, lõppvoor, 2006, G 3

Vaatame lihtsa kada ehk ragulka konstruktsiooni. Elastne kummipael tõmmatakse kahe fikseeritud otspunkti vahele, laskmiseks asetatakse kivi paela keskele, pael tõmmatakse koos kiviga pingule ja lastakse vabaks. Kivi lastakse lendu horisontaaltasandi suhtes nurga $\alpha = 10^\circ$ all. Leidke, kui kaugele peab laskja tõmbama kivi, et tabada märki, mis asub kadast $L = 25$ m kaugusel ning sellega samal kõrgusel. Kui suurt jõudu peab ta selleks paelale rakendama? Kummipaela pikkus pingestamata olekus on $l = 60$ cm, mis on ühtlasi ka paela kinnituspunktide vahekaugus. Pael lugeda kaalutuks ning jäikusteguriga $k = 50$ N/m. Kivi mass on $m = 20$ g. Õhutakistusega ei ole vaja arvestada. Raskusjõu mõju kivi kiirendamisel kadas pole vaja arvestada. Raskuskiirendus on $g = 9,81$ m/s².

Ü56 Hooratas ★★★

Autor: Valter Kiisk, lõppvoor, 2007, G 4

Hooratas raadiusega R pöörleb nurkkiirusega ω . Lihtsuse huvides võib hooratast vaadelda peenikese rõngana (pöörlemistelg ühtib rõnga teljega).

a) Milline on energia salvestustihedus w (kineetiline energia massiühiku kohta) hoorattas?

b) Hooratas on valmistatud süsinikkiuga armeeritud polümeerist, mille tõmbetugevus $\sigma_{\max} = 2,4 \cdot 10^9$ Pa ja tihedus $\rho = 1500$ kg/m³. Hinnake energia salvestustiheduse maksimaalselt võimalikku väärtust sellises hoorattas (andes numbrilise vastuse).

Vihje. Tõmbetugevus on maksimaalne jõud ristlõike pindala kohta, mida antud materjal talub ilma purunemata.

Ü57 Maaler ★★★

Autor: Valter Kiisk, lahtine, 2010, G 5

Maaler on seina ülemise osa värvimiseks roninud kõrge, peaaegu vertikaalse redeli tippu. Ettevaatamatu liigutuse tulemusena hakkab redel kukkuma ümber. Kas vähemohalik oleks redelist kohe lahti lasta või pigem klammerduda redeli külge? Põrand on lai ja tühi, nii et (redeli) kukkumist ei takista miski. Redeli alumine ots ei libise. *Vihje.* homogeensel vardal pikkusega l ja massiga m on ümber otsa nurkkiirusega ω pööreldes kineetiline energia $\frac{ml^2\omega^2}{6}$.

Ü58 Benji-hüpe ★★★

Autor: Andreas Valdmann, piirkonnavor, 2010, G 6

Benji-hüppaja massiga $m = 80$ kg kasutab köit pikkusega $l = 35$ m, mille jäikustegur $k = 60$ N/m. Kui kõrgele maapinnast tuleks tõsta hüppeplatvorm, et jääks ohutusvaru $h = 5$ m? Mis on suurim kiirus, mille hüppaja saavutab? Raskuskiirendus $g = 9,8$ m/s². Hüppaja mõõtmetega arvestama ei pea.

Ü59 Kloori molekul ★★★

Autor: Ants Remm, lahtine, 2012, G 6

Kloori molekul, mis liigub kiirusega $v = 600 \text{ m/s}$, neelab footoni lainepikkusega $\lambda = 350 \text{ nm}$ ning jaguneb kaheks aatomiks. Ühe aatomi kiiruseks mõõdetakse $u = 1600 \text{ m/s}$, mis on risti molekuli esialgse kiirusega. Leidke kloori molekuli seoseenergia, kui kõik osakesed olid minimaalse siseenergiaga seisundis. Plancki konstant on $h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$, valguse kiirus on $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$, kloori aatomnumber on 35 ning Avogadro arv on $N_A = 6,0 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$. Footoni energia avaldub valemiga $E = \frac{hc}{\lambda}$. Eeldada, et footoni impulss on tühine võrreldes Kloori impulsi.

Ü60 Kiik ★★★

Autor: Andres Põldaru, lahtine, 2014, G 5

Kiige ühe otsa peal kaugusel l_1 kiige pöörlemisteljest asub mass m_1 . Kiige teise otsa peale, mis on pöörlemisteljest kaugusel l_2 , kukub kõrguselt h mass m_2 . Kokkupõrge on absoluutselt mitteelastne ning kiik on kokkupõrkehetkel horisontaalne. Kiige mass on väga väike ja sellega ei pea arvestama. Kui kiiresti liigub esimene mass vahetult pärast kokkupõrget?

Ü61 Vesiniku ioniseerimine ★★★

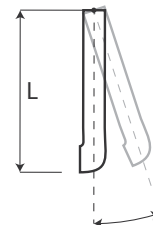
Autor: Jaan Toots, lahtine, 2015, G 6

Kui suur on vähim vesiniku aatomit ioniseerida suutva vaba prootoni kineetiline energia K_0 ? Eeldage, et elektron on vesiniku aatomis paigal ning elektromagnetiline vastasmõju aatomi tuuma ja vaba prootoni vahel on tühine. Vesiniku seoseenergia $E_0 = 13,6 \text{ eV}$, prootoni mass $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ ja elektroni mass $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$.

Ü62 Veetoru ★★★

Autor: Kristian Kuppert, piirkonnavaor, 2015, G 5

Veetoru pikkusega L on kinnitatud seina külge nii, et see saab vertikaaltasandis vabalt pöörelda. Veetoru mass koos seda täitva veega on M . Toru ots ristlõikepindalaga S on ülejäänud toruga võrreldes 90 kraadi pööratud (vt joonist) ning sellest voolab välja vesi kiirusega v ja tihedusega ρ . Kui suure nurga all vertikaali suhtes paikneb toru telg? Raskuskiirenduse väärtus on g .

**Ü63 Põrge ★★★**

Autor: Mihkel Kree, piirkonnavaor, 2015, G 6

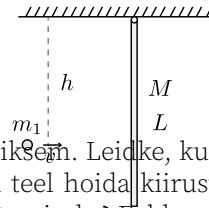
Algselt paigal olev rippuv varras massiga M ning pikkusega L on fikseeritud ülemisest otsast vabalt pöörleva kinnitusega. Varda inertsimoment otspunkti suhtes on $I = \frac{1}{3}ML^2$. Teraspall massiga m_1 lendab vastu varrast ning tabab seda kaugusel h riputuspunktist. Põrge on elastne, st soojuskadudeta. Huvitaval kombel jääb teraskuul pärast põrget hetkeks paigale ning hakkab seejärel vertikaalselt alla langema. Leidke kauguse h väärtus, mille korral niisugune seismajäämine võimalik on.

Ü64 Rattur ★★★

Autor: Ardi Loot, lahtine, 2016, G 6

Rattur massiga $m = 100 \text{ kg}$ sõidab ilma väntamata alla mäenõlvvalt langemisnurgaga $\theta_1 = 4,8^\circ$ (nurk horisoni ja mäenõlva vahel) ja märkab, et piisavalt pika nõlva korral on tema lõppkiiruseks $v_1 = 50 \text{ km/h}$. Kaks korda väiksema nõlva korral ($\theta_2 = 2,4^\circ$) on ratturi lõppkiirus aga $\Delta v = 15 \text{ km/h}$ võrra väiksem. Leidke, kui suur peab olema ratturi väntamise võimsus, et horisontaalsel teel hoida kiirust $v = 20 \text{ km/h}$. Kui suur osa võimsusest kulub tuuletakistuse ületamiseks? Eeldage, et tegemist on tuulevaikse ilmaga ja raskuskiirendus $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

Märkus. Arvestada tuleks nii kiirusest sõltumatu hõõrdejõuga kui ka tuuletakistusega, mis on võrdeline kiiruse ruuduga.

**Ü65 Kaks kuuli ja vedru ★★★**

Autor: Rasmus Kisel, piirkonnavaor, 2017, G 7

Vedru erinevatesse otstesse on kinnitatud väikesed kuulid, millest ühe mass on M ning teise oma tundmatu. Kogu süsteem pannakse pöörlema nii, et tundmatu massi kaugus pöörlemiskesksest on võrdne vedru esialgse pikkusega. Mis on selle pöörlemise periood, kui vedru jäikus on k ? Vedru mass on võrreldes kuulide massidega tühine.

Ü66 Reisirong ★★★

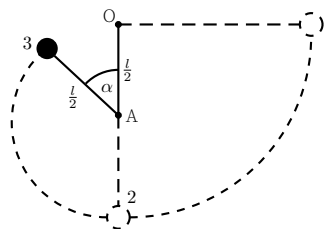
Autor: Moorits Mihkel Muru, lõppvaor, 2017, G 5

Reisirong sõidab mööda raudtee ringjoone kaarekujulist lõiku ühtlaselt aeglustudes. Lõigu pikkus on s ja rongil kulub selle läbimiseks aeg t . Pärast selle lõigu läbimist on rongi liikumise suund muutunud nurga φ võrra ja lõigu alguses oli rongi kiirus α korda suurem, kui see on lõigu lõpus. Leidke seos rongis istuva reisija massi m ja tema kaalu P vahel, kui reisirong on parajasti selle lõigu keskpunktis. Leidke reisija mass, kui $P = 840 \text{ N}$, $s = 1,5 \text{ km}$, $t = 60 \text{ s}$, $\alpha = 1,5$, $\varphi = 60^\circ$ ja $g = 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

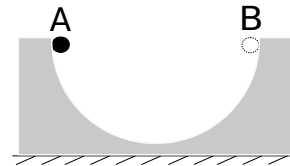
Ü67 Kaheosaline pendel ★★★

Autor: Hans Daniel Kaimre, lõppvaor, 2018, G 4

Punktis O kinnitatud niidi pikkusega l otsas ripub väike kuulike. Kuulike viiakse kõrvale ja vabastatakse tõuketa asendist 1. Kuuli jõudes asendisse 2, kohtab niit joonise tasandiga risti olevat varrast punktis A , mis asub punktist O kaugusel $l/2$ sellega samal vertikaalil. Lei-da, millise nurga α väärtuse korral niidi pinge $T = 0$ (asend 3). Õhutakistust ja hõõrdumist vardal arvestama ei pea.

**Ü68 Veerev pall ★★★** Autor: Hans Daniel Kaimre, piirkonnavaor, 2016, G 8

Klotsist on välja lõigatud poolsilindrikujuline tükk raadiusega R . Klots seisab siledal hõõrdevabal horisontaalsel pinnal (vaata joonist). Klotsi mass on M . Punkti A lükatakse liikuma mööda silindrikujulise väljalõike pinda väike pall raadiusega r ning massiga m . Kui palju on nihkunud klots hetkeks, mil pall jõuab punkti B?



Ü69 Vai ★★★★★ Autor: Jaak Kikas, piirkonnavor, 2006, G 10

Vertikaalset vaia pikkusega L ja massiga M lüüakse pinnasesse nii, et tema otsa pihta lastakse kõrguselt $H \gg L$ vaia otsast kukkuda koormisel massiga m . Lööki vaia pihta võib lugeda absoluutselt mitteelastseks, st pärast raskuse ja vaia kokkupuudet liiguvad nad kui üks tervik. Pinnase takistusjõud on $F = F_0 + kl$, kus l on maa sees oleva vaiaosa pikkus. Kui suur on löökide arv N , mis on vajalik selleks, et vai täies pikkuses maasse lüüa? Võite eeldada, et ühekordse löögi tagajärjel nihkub vai sügavamale väikese osa võrra oma pikkusest.

Ü70 Pidurdamine ★★★★★

Autor: Tanel Kiis, lahtine, 2012, G 7

Keha massiga M kukub vabalt raskusjõu toimel kiirendusega g . Tema kiirust proovitakse muuta, tulistades maalt otse üles iga t sekundi tagant väikeseid kuulikesi massiga m , mis pörkavad elastselt otse tagasi. Kui suur peab olema kuulikeste kiirus u , et pärast iga pörget oleks langeva keha kiirus üks ja seesama v ? Võib eeldada, et väikeste kuulikeste kiiruse muut raskusjõu toimel on tühine ja $m \ll M$.

Ü71 Robin Hood ★★★★★

Autor: Madis Ollikainen, piirkonnavor, 2012, G 9

Robin Hood on täpsuslaskmisvõistlustel, kus tal tuleb tabada märklauda, mis asub $L = 200$ m kaugusel. Millise nurga α all horisontaalsihi suhtes peab Robin vibust laskma, et tabada täpselt märklaua keskpunkti? Vibu vinnamisel teeb ta tööd $A = 500$ J ning vibu kasutegur on $\eta = 0,17$. Noole mass on $m = 54$ g ja see lastakse lendu märklaua keskpunktist $h = 70$ cm võrra kõrgemalt. Õhutakistusega ärge arvestage. Raskuskiirenduseks lugege $g = 9,8$ m/s².

Ü72 Sportauto ★★★★★

Autor: Mihkel Rähn, lõppvoor, 2014, G 7

Leidke esirattaveolise sõiduauto maksimaalne kiirendus. Auto mass on m , esi- ja tagarataste telgede vahe b , massikeskme kõrgus h ning massikeskme horisontaalne kaugus tagateljest s . Hõõrdetegur rataste ja maa vahel on μ .

Ü73 Latt ★★★★★

Autor: Kaur Aare Saar, lahtine, 2015, G 8

Pikka horisontaaltasapinnal lebavat latti lükatakse ühest otsast muutumatu kiirusega ning risti latiga. Kui kaugel sellest lati otsast asub lati pöörlemistelg? Lati pikkus on L . Hõõrdetegur lati ja tasapinna vahel on kõikjal ühesugune.

Ü74 Klaaskuul ★★★★★

Autor: Aigar Vaigu, piirkonnavor, 2008, G 6

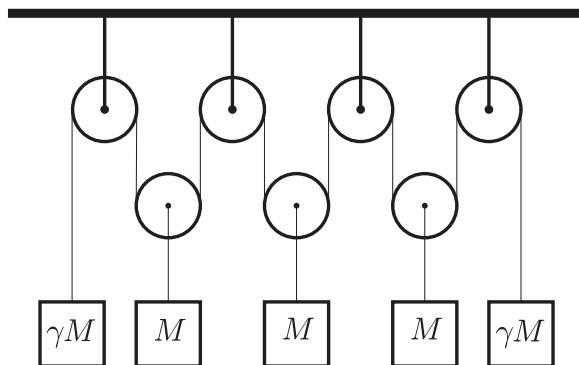
Klaaskuul kukkus vertikaalselt alla libedale horisontaalsele põrandale ning purunes kolmeks tükkiks, mis lendasid mööda põrandat laiali. Sündmus jäädvustati fotol (vt joonist). Tükkide kujutised osutusid välja venitatuks, sest säriaeg oli võrdlemisi pikk. Millised olid kuuli tükkide masside suhted? Hõõrdejõud tükkide liikumisel lugeda tühiselt väikeseks. Fotoobjektiivi optiline peatelg oli pildistamisel vertikaalne



Ü75 Plokid ★★★★★

Autor: Mihkel Kree, piirkonnavor, 2008, G 9

Polüspast ehk liitplokk koosneb seitsmest ploki (vt. joonist). Koormiste massid M ja γM on näidatud joonisel. Missuguse kiirendusega hakkavad liikuma äärmised koormised? Mis tingimust peab rahuldama suurus γ , et äärmised koormised hakkaksid langema? Plokkide ja nööri mass jätta arvestamata ning nööri lugeda venimatuks.



Ü76 Õõnes kera ★★★★★

Autor: Tanel Kiis, piirkonnavor, 2013, G 9

Jukul on rauast kera ($\rho_{\text{Fe}} = 7,9 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$) raadiusega $r = 10 \text{ cm}$ ja massiga $m = 30 \text{ kg}$. Juku teab, et kera sees on sfääriline õõnsus, mille keskpunkti kaugust d kera keskpunktist ta üritab leida. Selleks riputas ta kuuli kaks korda nööri otsa rippuma, kasutades riputuskohtadeks kera vastaspunkte. Ühel korral moodustas neid kinnituspunkte ühendav telg horisondiga nurga $\alpha = 60^\circ$, teisel korral aga nurga $\beta = 45^\circ$. Leidke d .

Ü77 Jalgpallurid ★★★★★

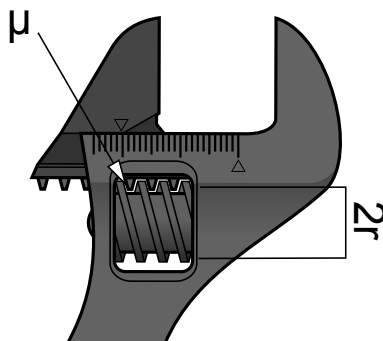
Autor: Andreas Valdmann, lõppvoor, 2013, G 9

Kaks jalgpallurit proovisid trikilööki, kus kaks palli õhus kokku põrkavad. Jalgpallurid seisid teineteisest $d = 20 \text{ m}$ kaugusel ja andsid samal ajahetkel sooritatud löögiga kumbki oma pallile algkiiruse $v = 15 \text{ m/s}$. Mis piirkonnas võisid pallid lennul kokku põrgata? Vastuseks tehke pealtvaates joonis, kuhu on kantud jalgpallurite asukohad ja kõikvõimalike kokkupõrkepunktide piirkond. Esitage ka selle piirkonna mõõdud. Võimalike kokkupõrkepunktide kõrgust maapinnast pole vaja eraldi välja arvutada ega joonisele kanda. Raskuskiirendus on $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

Ü78 Mutrivõti ★★★★★

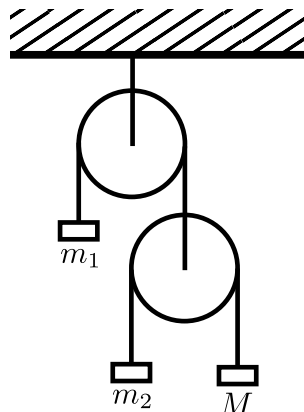
Autor: Andres Põldaru, lahtine, 2015, G 9

Kui suur peab olema reguleeritava mutrivõtme keerete arv pikkusühiku kohta n , et mutreid saaks kõvasti kinni keerata? Hõõrdetegur kokkupuutepindade vahel on μ ja raadius reguleerija teljest kokkupuutepinnani on r .

**Ü79 Plokid ★★★★★**

Autor: Taavet Kalda, lahtine, 2017, G 8

Joonisel on kujutatud kahest ploki ja kolmest raskusest, massidega m_1 , m_2 ja M koosnevat süsteemi. Nöörid on venimatud ning nööri ja plokkide massid on tühised võrreldes raskuste massidega. Hõõre ploki ja nööri vahel on tühiselt väike. Missugune peaks olema M väärtus selleks, et M jääks esialgu paigale, kui süsteem lahti lasta?



Ü80 Mänguauto ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2017, G 9

Mänguauto telgede vaheline kaugus on L ning massikese asub võrdsel kaugusel telgedest kõrgusel h horisontaalpinnast. Auto esimesed rattad saavad vabalt pöörlelda ja on tühise massiga, tagumised rattad on aga jäigalt kinni kiilunud ega pöörle üldse. Auto lebab horisontaalsel pinnal, rataste ja horisontaalpinna vaheline hõõrdetegur on μ , raskuskiirendus on g .

Horisontaalpinda hakatakse liigutama kõrge sagedusega horisontaalselt edasi-tagasi: ühe poolperioodi jooksul on pinna kiirusvektor suunatud auto tagaratastelt esiratastele ning teise poolperioodi jooksul on see vastassuunaline; mõlema poolperioodi jooksul püsib kiiruse moodul konstantsena; võngutamisel liigutatakse pinda nii kiiresti, et auto libiseb pinna suhtes kogu aeg kas ühes või teises suunas. Millise keskmise kiirendusega hakkab liikuma auto?

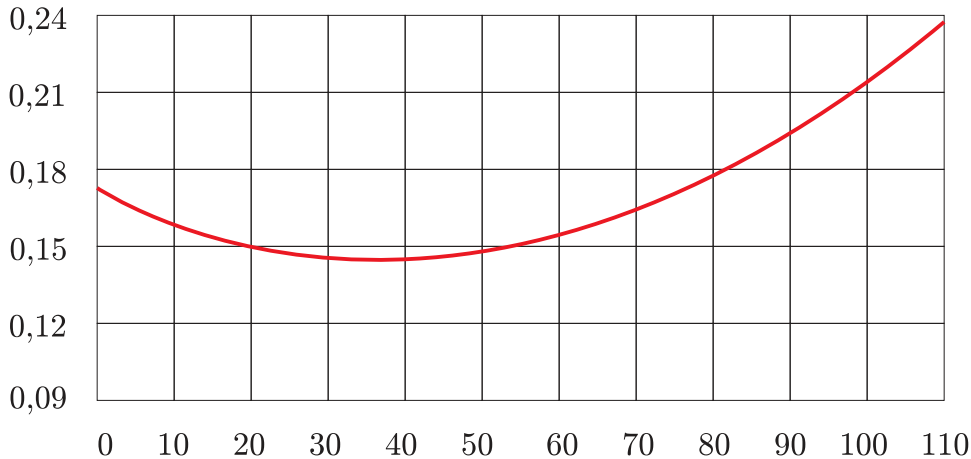
Ü81 Rong ★★★★★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2006, G 10

Rong sõidab kiirusega $v = 100 \text{ km/h}$ ja pidurdab järsult (blokeerides rattad). Graafikul on toodud rongi rataste ja rööbaste vahelise hõõrdeteguri μ sõltuvus kiirusest (km/h).

a) Kui pikk on rongi täieliku peatumiseni kulunud aeg?

b) Kui suur on pidurdusmaa pikkus? Mõlemad vastused tuleb leida graafikualuste pindaladena sobilikult valitud teljestikes.

**Ü82 Värinaalarm ★★★★★**

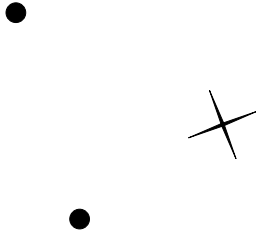
Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2011, G 9

Uurime mobiiltelefoni liikumist nõrgalt kaldus pinnal värinaalarmi töötamise ajal lihtsustatud mudeli abil. Kujutagu lauale asetatud mobiil risttahukat massiga M , mille sees liigub üles-alla väike keha massiga m . Liikugu see keha ajahetkedel $t = 0, 2\tau, 4\tau, \dots$ vahemaa x võrra hetkeliselt üles ning ajahetkedel $t = \tau, 3\tau, 5\tau, \dots$ algasendisse tagasi. Olgu mobiiltelefoni ja laua vaheline hõõrdetegur μ ning laua kaldenurk $\alpha \ll 1$. Mobiiltelefoni ja laua vahelised pörked lugege absoluutselt plastseiks. Millise keskmise kiirusega u hakkab mobiiltelefon mööda lauda liikuma?

Ü83 Killud ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2012, G 10

Savikuulike massiga 10 g kukkus vertikaalselt alla siledale horisontaalsele põrandale ja läks kolmeks killuks. Killud lendasid laiali ja peatusid punktides, mis on näidatud juuresoleval joonisel (ülaltvaade, ristiga on märgitud kukkumiskoht). Määrake kildude massid. Joonisel (lisalehel) võib teha lisakonstruktsioone ja mõõtmisi. Võite lugeda, et killud hakkasid kohe pärast kukkumist üles pörkumata libisema, õhuhõõre on tühine ja liugehõõrdetegur ei sõltu kiirusest.



Ü84 Liivakell ★★★★★

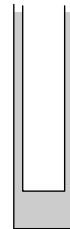
Autor: Roland Matt, lõppvoor, 2012, G 8

Uurime liivakella mudelit. Liivakell koosneb silindrilisest torust pikkusega L , mis on keskelt eraldatud ühtlaselt aukudega läbistatud plaadiga, millest liiv saab läbi voolata. Heas lähenduses ei sõltu liiva aukude läbimise massikiirus w ülemises anumast olevast liivahulgast. Liivakell asetatakse kaalule töörežiimis (kui liiv voolab) ja siis, kui kogu liiv on alla voolanud. Milline on kaalunäitude vahe? Liiva tihedus on ρ ja liivakella ristlõikepindala on S . Eeldage, et hetkel kukkuvat liiva mass on tühine võrreldes liiva kogumassiga.

Ü85 Silindrilised anumad ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2014, G 8

Silindriline anum siseraadiusega $R = 30$ mm on täidetud veega. Teine tühi silindriline anum raadiusega $r = 25$ mm, mille mass on tühiselt väike, on surutud koaksiaalselt suurema silindri sisse nii, et selle vettesukeldunud osa pikkus $L = 300$ mm (vt joonist). Leidke sisemise silindri kiirendus vahetult pärast seda, kui see vabaks lastakse. Vee pindpinevuse ning viskoossusega arvestada pole tarvis.



Ü86 Vedru ★★★★★

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2015, G 8

Kasti sees on vedru külge riputatud koormis. Nii kast kui koormis on massiga m . Vedru mass on tühiselt väike ning selle jäikustegur on k . Kastil lastakse kõrguselt h vabalt maha kukkuda nii, et langemise ajal on koormis tasakaaluolekus. Kokkupõrkel pehme pinnaga jääb kast hetkeliselt paigale. Kast on piisavalt kõrge selleks, et koormis vastu kasti ei põrkaks. Vedrut ei suruta ühelgi hetkel täielikult kokku.

a) Milline on vähim kõrgus h_m , millelt kukkudes hüppab kast tagasi üles?

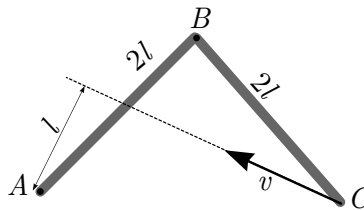
b) Kastil lasti kukkuda punktis a) leitud algkõrguselt $h \approx h_m$. Kui pika ajavahemiku t veedab kast maapinnal enne üles kerkimist?

Märkus. Pange tähele, et vabalangemises olev koormis on kaaluta olekus ning seetõttu on vedru langemise ajal välja venitamata. Maapinnale jõudes pole koormis enam tasakaaluasendis ning hakkab seetõttu uue tasakaaluasendi ümber võnkuma nurksagedusega $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Ü87 Vardad ★★★★★

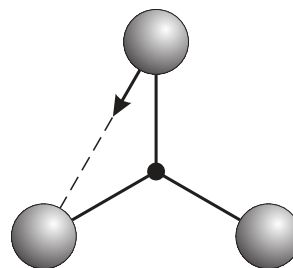
Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2017, G 10

Juuresoleval joonisel on kujutatud kahest vardast pikkusega $2l$ koostatud šarniirne konstruktsioon. Ühe varda otspunkt on fikseeritud liikumatuna punkti A ning teise varda otspunkt C liigub konstantse kiirusega v piki sihti, mis möödub punktist A kaugusel l . Leidke varraste ühenduspunkti B kiirendus hetkel, mil punktide A ja C vahekaugus on $2l$.

**Ü88 Kuulid ★★★★★**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2006, G 10

Joonisel kujutatud süsteem koosneb kolmest võrdkülgse kolmnurga tippudes paiknevast kuulist massiga m ja kolmest kergest vardast pikkusega l , mis on omavahel šarniirselt ühendatud (liigendiga). Süsteem lebab hõõrdevabalt siledal horisontaalpinnal. Ühte kuuli lükatakse teatud lühiajalise jõuga nii, et see omandab kiiruse v_0 , mis on suunatud naaberkuuli poole. Leidke teiste kuulide kiiruste suunad ja moodulid ning kõigi kuulide kiirendused vahetult peale esimese kuuli lükkamist.

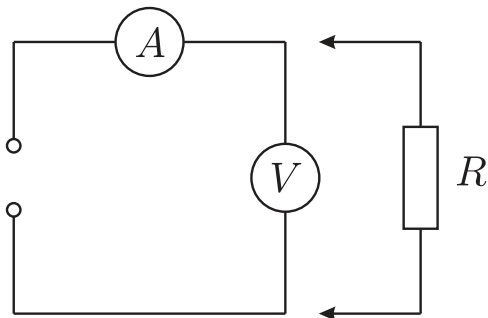


Elektriahelad

Ü89 Mõõteriistad ★

Autor: Koit Timpmann, lõppvoor, 2006, G 1

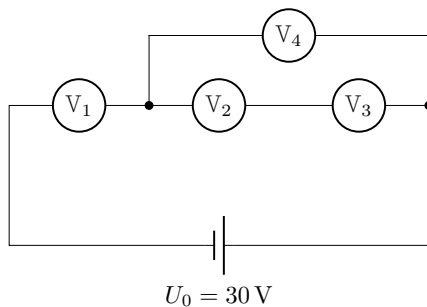
Vooluringis on ampermeeter ja voltmeeter ühendatud jadamisi. Klemmidele on rakendatud pinge $U = 9\text{ V}$. Kui voltmeetriga ühendada rööbiti takisti R , väheneb voltmeetri näit kaks korda, ampermeetri näit aga suureneb kaks korda. Kui suurt pinget näitas voltmeeter enne ja pärast takisti ühendamist?



Ü90 Voltmeetrid ★

Autor: Eero Vaher, piirkonnavor, 2016, G 1

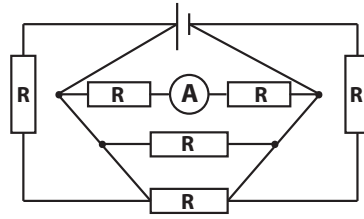
Elektriskeemis on pingevallikas pingega $U_0 = 30\text{ V}$ ning neli ühesugust voltmeetrit. Kui suur on iga voltmeetri näit?



Ü91 Voltmeeter ★

Autor: Erkki Tempel, piirkonnavor, 2017, G 1

Joonisel näidatud elektriskeemis on ideaalne ampermeeter, mis näitab voolutugevust I . Ampermeeter asendatakse ideaalse voltmeetriga. Kui suur on voltmeetri näit? Kõikide takistite takistus on R .

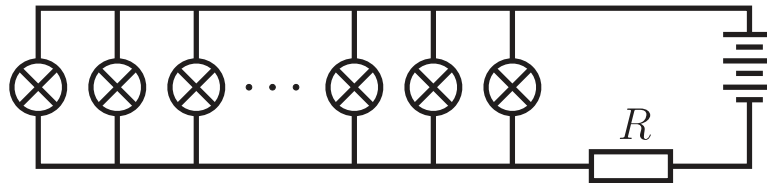


Ü92 Elektriküünlad ★

Autor: Valter Kiisk, piirkonnavor, 2009, G 4

Jõulukaunistuse valmistamiseks otsis Juku välja 10 taskulampipirni (nimipinge 3 V, võimsus 0,6 W) ja alaldi klemmipingega 5 V. Seejärel koostas ta skeemi, mis on kujutatud joonisel.

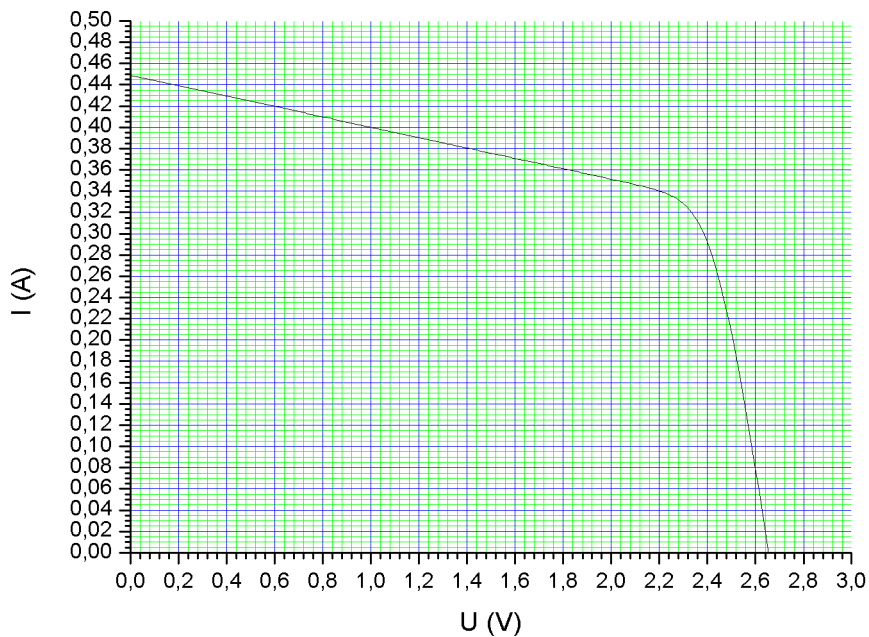
- a)** Kui suur peab olema takisti R takistus, et pinge lampidel ei ületaks nimipinget?
b) Skeemi sisselülitamisel avastas Juku, et lambid põlevad oodatust tuhmimalt. Selgus, et alaldi klemmipinge oli koormusega langenud 4 V-ni ning pinge lampidel 2,3 V-ni. Kui suur tuleks valida takisti R väärtus, et lambid põleksid normaalse heledusega?



Ü93 Päikesepaneel ★

Autor: Mihkel Pajusalu, lõppvoor, 2010, G 3

Joonisel on kujutatud päikesepaneeli läbiva voolu sõltuvus klemmipingest. Määrake paneeli klemmidega ühendatud koormise takistus, mille korral on koormisel eralduv võimsus maksimaalne.

**Ü94 Lambid ★**

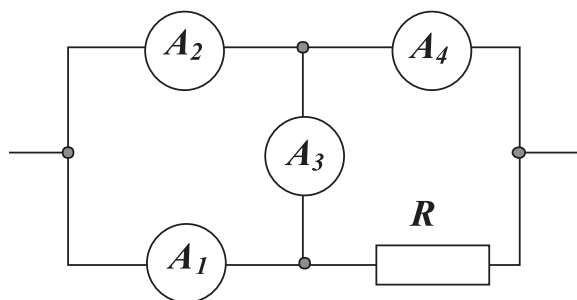
Autor: Mihkel Kree, piirkonnavor, 2015, G 2

Pingeallikaga on rööbiti ühendatud kaks lampi, kusjuures üks lampidest põleb k korda suurema võimsusega kui teine. Seejärel ühendatakse need lambid sama pingega allikaga jadamisi. Mitu korda muutub lampidel eralduv koguvõimsus? Kas see muutub suuremaks või väiksemaks?

Ü95 Ampermeetrid ★★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2008, G 4

Vooluahelasse on ühendatud neli ühesugust ampermeetrit, igaüks sisetakistusega r , ja takisti R . Esimese kahe ampermeetri näidud on $I_1 = 3 \text{ A}$ ja $I_2 = 5 \text{ A}$. Leida takistuste suhte R/r arvuline väärtus.



Ü96 Patarei ★★

Autor: Taavi Pungas, piirkonnavor, 2011, G 6

Patarei ühendatakse jadamisi takistiga takistusega R ja ampermeetriga, mis näitab voolutugevuseks I_1 . Kui lisada jadamisi veel üks takisti takistusega R , näitab ampermeeter voolutugevuseks I_2 . Leidke, mis vahemikku jääks suhe I_2/I_1 , kui vooluallika sisetakistus r oleks

- a) väiksem kui R ,
- b) suurem kui R .

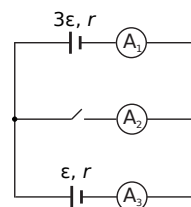
Ü97 Elektriskeem ★★

Autor: Oleg Košik, piirkonnavor, 2013, G 5

Joonisel toodud skeemil on ampermeetrid ideaalsed; patareide elektromotoorjõud ja sisetakistused on märgitud nende juurde. Leidke ampermeetrite näidud, kui

- a) lüliti on suletud;
- b) lüliti on lahti.

Märkus. praktikas tohib sellist skeemi kasutada vaid siis, kui ollakse veendunud, et tekkivad voolud jäävad ampermeetrite mõõtepiirkonda!



Ü98 Tetraeeder ★★

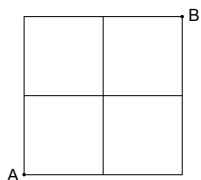
Autor: Eero Vaher, lahtine, 2014, G 4

Tetraeedri (neljast võrdkülgsest kolmnurgast koosneva püramiidi) servadeks on ühesugused takistid takistusega R . Leidke tetraeedri kahe tipu vaheline takistus.

Ü99 Ruudustik ★★

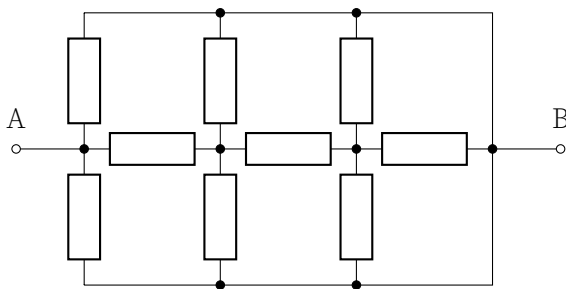
Autor: Taavi Pungas, lõppvoor, 2014, G 1

Traadist on valmistatud 2x2 ruudustik (vt joonist), iga väikese ruudu külje takistus on $r = 1 \Omega$. Leidke punktide A ja B vaheline takistus.

**Ü100 Takistid ★★**

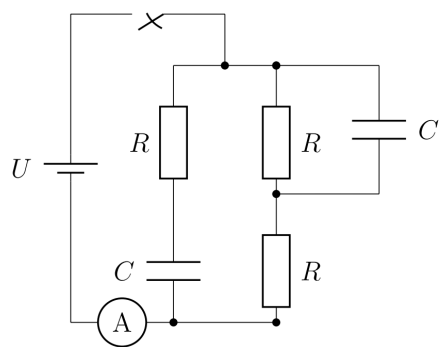
Autor: Hans Daniel Kaimre, lahtine, 2015, G 2

Leidke ühesugustest takistitest koosneva ahela kogutakistus R_{AB} . Iga takisti takistus on R .

**Ü101 Elektriskeem ★★**

Autor: Kristian Kuppart, lahtine, 2016, G 3

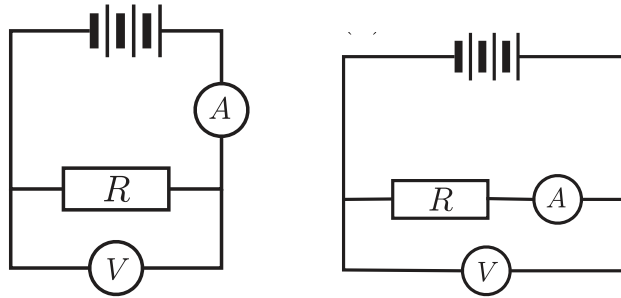
Leidke juuresoleval skeemil voolutugevus I läbi ampermeetri kahel juhul: vahetult pärast lüliti sulgemist ja pika aja möödumisel. Eeldada, et kondensatorid on enne lüliti sulgemist laadimata. Patarei lugeda ideaalseks.



Ü102 Vooluring ★★

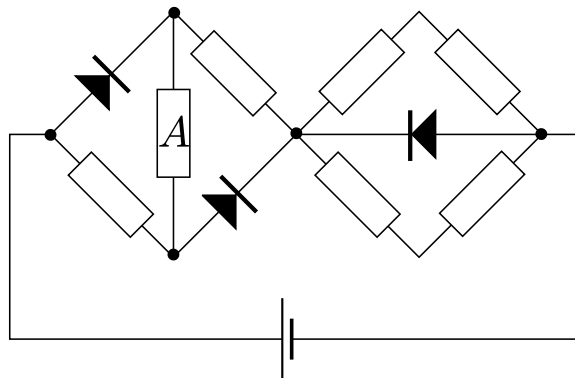
Autor: Valter Kiisk, piirkonnavor, 2005, G 4

Takisti takistuse määramiseks koostati kaks erinevat vooluringi kasutades voltmeetri, ampermeetrit ja vooluallikat (vt joonist). Leidke avaldis takistuse R arvutamiseks, kui vasakpoolse skeemi järgi mõõtes saadi voltmeetri näiduks U_1 ja ampermeetri näiduks I_1 ning parempoolse skeemi järgi mõõtes aga vastavalt U_2 ja I_2 . Vooluallika elektromotoorjõud on muutumatu ning sisetakistus tühine. Mõõteriistade sisetakistused ei ole teada.

**Ü103 Takistid ★★**

Autor: Aigar Vaigu, lõppvoor, 2005, G 4

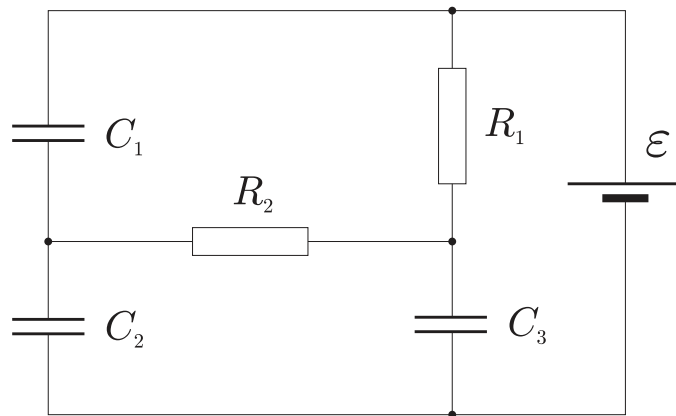
Mitu korda muutub joonisel kujutatud ahelas takistil A eralduv võimsus, kui vahetada alalispingeallika polaarsus? Kõik takistid on võrdse takistusega.



Ü104 Elektriskeem ★★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2006, G 2

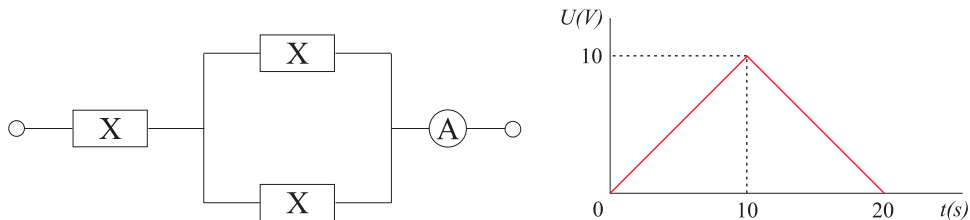
Leida laengud q_1 , q_2 ja q_3 kõikidel skeemil toodud kondensaatoritel.



Ü105 Skeem ★★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2009, G 3

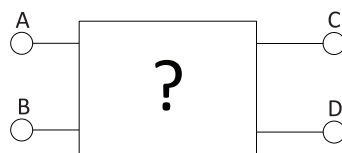
Elemendi X takistus muutub sõltuvalt selle pingest. Kui $U_X \leq 1\text{ V}$, siis selle takistus on $R_1 = 1\ \Omega$, kui aga $U_X > 1\text{ V}$, siis on takistus $R_2 = 2\ \Omega$. Kolm elementi X ühendatakse ideaalse ampermeetriga, nagu näidatud joonisel. Väljundklemmidele rakendatakse pinge, mille ajaline sõltuvus on toodud graafikul. Joonestage ampermeetri näidu ajalise sõltuvuse graafik.



Ü106 Must kast ★★

Autor: Kristian Kuppert, lõppvoor, 2013, G 4

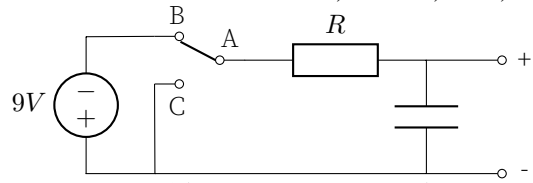
Joonisel näidatud musta kasti kõik klemmid ühendatakse korraks kokku. Seejärel, kui klemmide A ja B külge ühendada patarei pingega U ja klemmide C ja D külge voltmeeter, on voltmeetri näit alghetkel U . Mõõtmise järel ühendatakse kõik klemmid veel korraks kokku. Kui ühendada sama patarei klemmide C ja D külge ning voltmeeter klemmide A ja B külge, on voltmeetri näit alghetkel $\frac{U}{2}$. Teades, et mustas kastis on ainult identsed kondensaatorid, joonistage musta kasti skeem.



Ü107 Elektroonikaskeem ★★

Autor: Sandra Schumann, lahtine, 2017, G 4

Joonisel on antud teatud elekt-roonikaseadme ühe osa skeem, mis koosneb 9 V vooluallikast, takistist ja kondensaatorist koosnevast filtrist, väljundklemmidest ja lülitist. Lüliti kaks võimalikku asendit on “sees” (ühendatud on A ja B) ning “väljas” (ühendatud on A ja C). Antud olukorras ei ole väljundklemmide külge midagi ühendatud.



Kui toodud skeemis viia lüliti asendist “sees” asendisse “väljas” (st lülitada seade välja) ja muuta seejärel vooluallika polaarsus vastupidiseks, siis töötab elektroonikaseade pärast sisselülitamist endiselt. Kui aga vooluallika polaarsust muuta ilma seadet välja lülitamata, siis põleb takisti R läbi. Eeldusel, et takisti põleb läbi niipea, kui sellel eralduv võimsus ületab 0,25 W, leia R minimaalne ja maksimaalne võimalik väärtus.

Ü108 Takisti ★★★

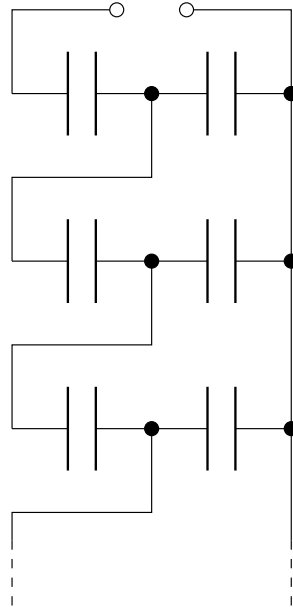
Autor: Jaan Kalda, piirkonnavaor, 2007, G 7

Oletagem, et me tahame teha takisti takistusega $R = 1\Omega$, mille takistuse temperatuurisõltuvus oleks toatemperatuuri ümbruses võimalikult väike. Olgu meil kasutada raudtraat ristlõikepindalaga $s = 0,030\text{ mm}^2$ ja grafiitpulk ristlõikepindalaga $S = 3,0\text{ mm}^2$. Kuidas valmistada soovitud takistit ja kui pikki grafiitpulga ning terastraadi juppe tuleb seejuures kasutada? Grafiidi ja raua eritakistused on vastavalt $\rho_g = 3,0 \cdot 10^5\ \Omega\text{ m}$ ning $\rho_r = 9,7 \cdot 10^{-8}\ \Omega\text{ m}$; takistuse temperatuurikoefitsiendid (suhtelised muutused $\Delta R/R$ temperatuuri kasvamisel ühe kraadi võrra) on $\alpha_g = -5,0 \cdot 10^{-3}\ \text{K}^{-1}$ ning $\alpha_r = 6,41 \cdot 10^{-3}\ \text{K}^{-1}$

Ü109 Kondensaatoriredel ★★★

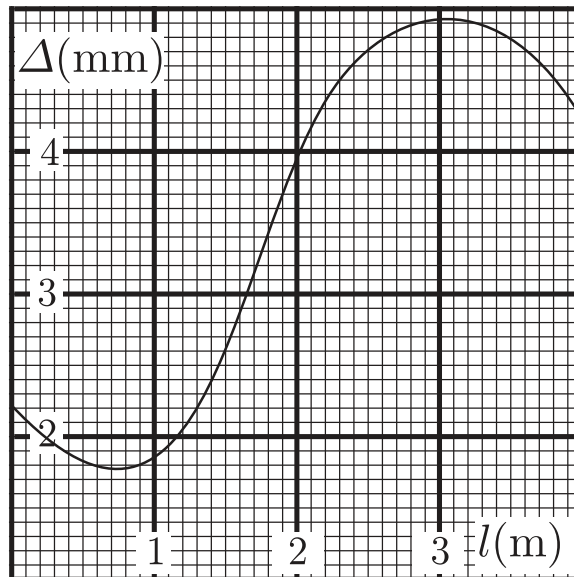
Autor: Siim Ainsaar, piirkonnavor, 2007, G 8

Ühesugustest kondensaatoritest mahtuvusega C on koostatud joonisel näidatud lõpmatu ahel. Leidke ahela kogumahtvus C_k .

**Ü110 Traat ★★★**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2008, G 7

Ühtlase ristlõikega traati (ristlõike pindala $S = 1 \text{ mm}^2$) venitati nii, et tema erinevad lõigud venisid erinevalt. Enne venitamist oli traadile märgitud jooned iga millimeetri tagant. Joonisel on toodud nende joonte vahekaugused Δ pärast venitamist sõltuvalt kaugusest traadi ühest otsast l (l on mõõdetud pärast venitamist). Leidke selle nüüdseks 4 meetri pikkuse traadi takistus, arvestades, et traadi materjali tihedus ja eritakistus $\rho = 1 \cdot 10^{-6} \Omega \text{ m}$ venitamise tagajärjel ei muutunud.



Ü111 Kondensaator ★★★

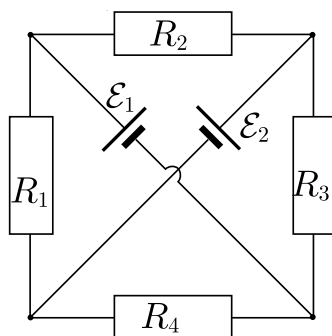
Autor: Aigar Vaigu, piirkonnavor, 2010, G 7

Muudetava mahtuvusega kondensaator on ühendatud patareiga, mille klemmide pinge on U . Kondensaatori mahtuvust muudetakse laadimisel nii, et kondensaatori laadimise vool I on konstantne. Leidke patarei võimsus ja kondensaatori laadimisel energia salvestamise kiirus. Põhjendage võimalikku erinevust.

Ü112 Elektriline sild ★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2012, G 3

Joonisel toodud skeemis on tegemist ühesuguste takistitega takistustega $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R$ ning ühesuguste ideaalsete patareidega elektromotoorjõududega $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}$. Leidke voolutugevused takistites (st I_1, I_2, I_3 ja I_4 avaldised suuruste R ja \mathcal{E} kaudu).



Ü113 Must kast ★★★

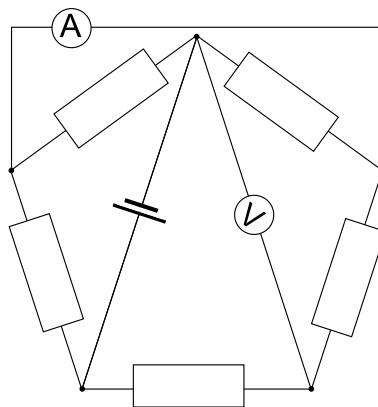
Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2015, G 4

Mustas kastis on kolmest takistist ja ideaalsest ampermeetrist koosnev skeem. Lisaks on mustal kastil kolm väljundklemmi A , B ja C . Kui rakendada pinge $U = 12\text{ V}$ klemmide A ja B vahele, siis on ampermeetri näit $I_{AB} = 2\text{ A}$. Klemmide A ja C puhul on lugem $I_{AC} = 4\text{ A}$ ning klemmide B ja C puhul $I_{BC} = 6\text{ A}$. Joonistage mustas kastis olev skeem ning märkige sellele takistite takistused.

Ü114 Viisnurk ★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2017, G 6

Leidke joonisel toodud skeemis ampermeetri ja voltmeetri näidud. Kõik takistid on takistusega $R = 1\ \Omega$, pinge patarei klemmidel $U = 7\text{ V}$.

**Ü115 12 lampi ★★★**

Autor: Valter Kiisk, piirkonnavor, 2018, G 8

Juku käsutuses on 12 ühesugust taskulampipirni ning patarei, mille klemmipinge on täpselt 5 korda suurem pirni nimipingest. Lisaks leidis ta juhtumisi takisti, mille takistus on parajasti pool lambi hõõgniidi takistusest töörežiimis (viimase sai ta teada jagades lambi soklile kirjutatud nimipinge ja -voolu omavahel).

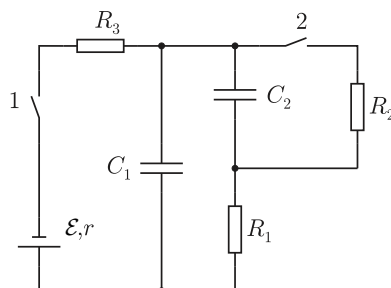
a) Kuidas tuleb ühendada nimetatud komponendid elektriahelasse, et kõik 12 pirni põleksid normaalheledusega?

b) Mitu korda kasvab (või kahaneb) lampide koguvõimsus, kui üks lampidest läbi põleb? Lampide takistuse sõltuvust temperatuurist võib jätta arvestamata.

Ü116 Kondensaatorid ★★★

Autor: Mihkel Rähn, piirkonnavor, 2006, G 7

Joonisel toodud elektriskeemil on vooluallikas elektromotoorjõuga \mathcal{E} ja sisetakistusega r , kolm takistit takistustega $R_1 = R_2 = R_3 = R$ ning kondensaatorid mahtuvustega C_1 ja C_2 . Arvutage, kui suured on elektrilaengud kondensaatoritel pärast pika aja möödumist, kui:

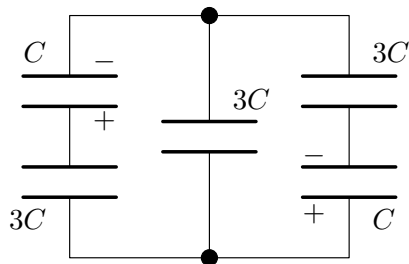


- a) lüliti 1 on suletud, lüliti 2 on avatud;
- b) mõlemad lülitid on suletud;
- c) eelmisest seisust avatakse mõlemad lülitid üheaegselt.

Ü117 Kondensaatorid ★★★

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2009, G 3

Koosnegu kondensaatorite süsteem viiest kondensaatorist. Alghetkel on kolm neist laenguta ning kahel paikneb laeng q (vt joonist). Missugune laeng koguneb keskmisele kondensaatorile, kui süsteem on jõudnud tasakaaluolekusse?



Ü118 Elektrienergia ★★★

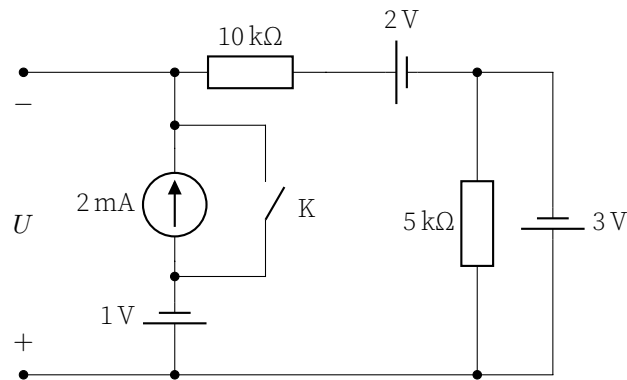
Autor: Eero Vaher, piirkonnavor, 2014, G 8

Suletud elektriabehelas on jadamisi ühendatud takisti takistusega $R = 100 \Omega$, kondensaator mahtuvusega $C = 200 \text{ nF}$, tühise aktiivtakistusega induktiivpool induktiivsusega $L = 10 \text{ mH}$ ning sobivali ühendatud ideaalsed mõõteseadmed. Hetkel t_0 mõõdeti voolutugevuseks läbi kondensaatori $I = 300 \text{ mA}$ ning pingeks poolil $U = 50 \text{ V}$. Teada on, et mõõtmise hetkel on vool poolis suunatud kõrgema potentsiaaliga piirkonnast madalama potentsiaaliga piirkonda. Kas mõõtmise hetkel t_0 oli rohkem energiat poolil või kondensaatoril?

Ü119 **Vooluallikad ★★★**

Autor: Sandra Schumann, lõppvoor, 2016, G 7

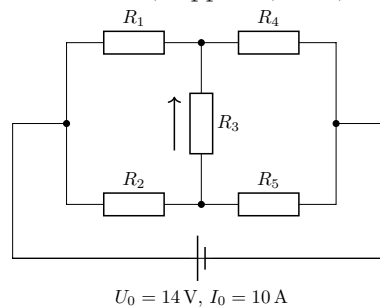
Vaatleme joonisel näidatud elektriskeemi, kus noolega tähistatud skeemielement on konstantse voolu allikas voolutugevusega $I = 2 \text{ mA}$ noolega tähistatud suunas. Leidke pinge U väljundklemmidel ja voolutugevus läbi takisti $R = 10 \text{ k}\Omega$ kahe juhu jaoks: **a)** kui lüliti K on suletud ja **b)** kui lüliti on avatud.



Ü120 **Takistuste tuvastamine ★★★**

Autor: Eero Vaher, lõppvoor, 2018, G 7

Vooluallikaga on ühendatud viis takistit. Neist kolme takistus on 1Ω , ülejäänud kaks on tundmatu, kuid ühesuguse takistusega. Vooluallika pinge $U_0 = 14 \text{ V}$ ning voolutugevus selles $I_0 = 10 \text{ A}$. Pinge ja voolutugevus kolmandal takistil on vastavalt $U_3 = 2 \text{ V}$ ning $I_3 = 2 \text{ A}$. Joonisel on märgitud elektrivoolu suund takistis R_3 . Määrake kõigi takistite takistused.

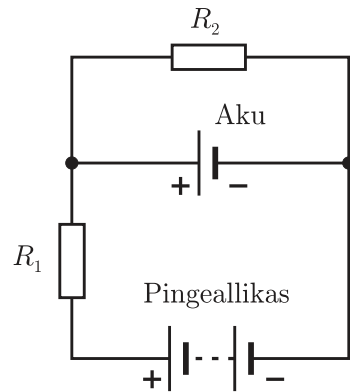
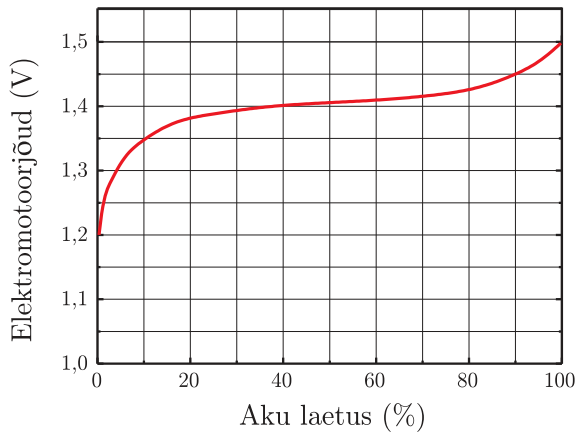


Ü121 **Aku laadimine ★★★★★**

Autor:

Valter Kiisk, piirkonnavor, 2008, G 8

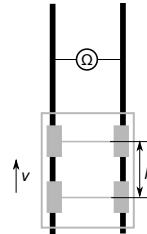
Teatava akumulaatori elektromotoorjõud kasvab laadimise käigus nõnda, nagu kujutatud joonisel. Samas on toodud ka elektriskeem, mida Juku kavatseb kasutada sellise akumulaatori laadimiseks. Pingeallika klemmidel on pinge 6 V . Nii pingeallika kui ka aku sisetakistust võib lugeda tühiseks. Kuidas peaks Juku valima takistite R_1 ja R_2 väärtused, kui ta taotleb, et maksimaalne laadimisvool ei ületaks 100 mA ja laadimisvool muutuks nulliks, kui akumulaator on täielikult laetud?



Ü122 Raudtee ★★★★★

Autor: Mihkel Pajusalu, piirkonnavor, 2012, G 8

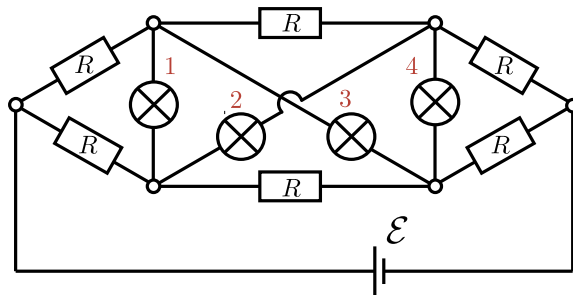
Möödame raudteel elektritakistust kahe kõrvutise rööpa vahel nii, nagu joonisel. Rööbastel sõidab vagun kiirusega v . Olgu vagunil kaks rattapaari, mille vahekaugus on l . Joonistage graafik takistuse muutumisest ajas alates hetkest, kui vaguni esimene rattapaar on möõtepunkti ees sellest kaugusel $l/2$, kuni ajani, kui tagumine rattapaar on möõtepunkti taga sellest kaugusel $l/2$. Mõlema rattapaari takistuseks olgu r ja rööpa takistus pikkusühiku kohta ρ .



Ü123 Lambid ★★★★★

Autor: Mihkel Kree, lahtine, 2013, G 9

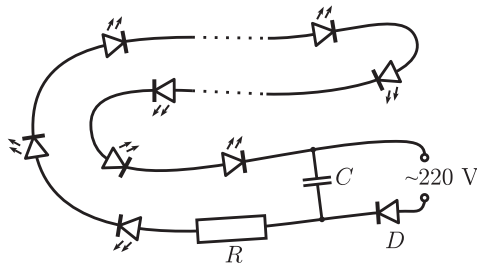
Juku ehitas kodus niisuguse elektriskeemi nagu joonisel näidatud, kasutades selleks kuut ühesugust takistit takistusega $R = 10\ \Omega$, nelja ühesugust lampi takistusega $r = 20\ \Omega$ ning pingeaallikat elektromotoorjõuga $\mathcal{E} = 5\ \text{V}$. Arvutage igas lambis (joonisel tähised 1, 2, 3, 4) eralduv võimsus. Pingeaallika sisetakistusega mitte arvestada.



Ü124 Jõulukaunistus ★★★★★

Autor: Valter Kiisk, lõppvoor, 2010, G 8

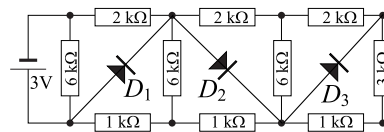
Jõulukaunistuse hankimiseks majandussurutise tingimustes otsustas Juku ühendada jadamisi kokku 50 valgusdiodi ja toita seda ahelat läbi alaldusdiodi D otse võrgupingega (vt joonist). Voolu piiramiseks on ahelasse lülitatud takisti ning voolu pulsatsiooni väljasilumiseks kondenssaator. Pinge alaldusdiodil on tühine, igal valgusdiodil aga $U_d = 3\text{ V}$. Kui suure takistusega R ja maksimumvõimsusega N tuleks valida takisti, kui valgusdiodid taluvad voolu kuni $I = 20\text{ mA}$? Kui suure mahtuvusega C kondenssaator kindlustab, et voolutugevuse pulsatsioon jääb $\alpha = 5\%$ piiresse? Võrgupinge sagedus on $f = 50\text{ Hz}$ ning amplituudväärtus $U_0 = 311\text{ V}$.



Ü125 Dioidid ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2012, G 8

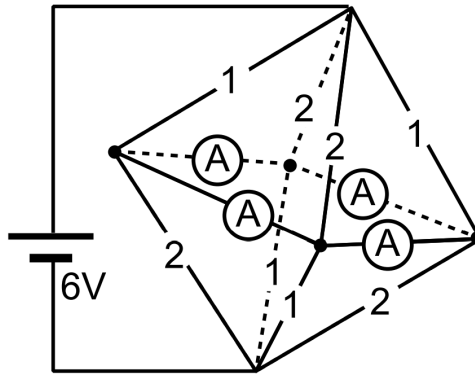
Millised võimsused eralduvad skeemil märgitud dioididel? Dioidide voolu võib lugeda nulliks kõikide vastupingete jaoks ning samuti ühest voldist väiksemate päripingete jaoks; suvalise pärioolu puhul on diodi pinge $1,0\text{ V}$. Takistite takistused ja elektromotoorjõu väärtus on toodud joonisel. Dioidi skeemitähise noole suund näitab pärioolu suunda.



Ü126 Oktaeeder ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2016, G 8

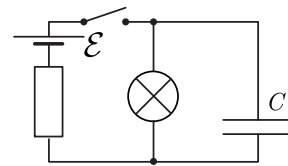
Juuresolev skeem kujutab traadist oktaeedrit, iga traadi juurde on kirjutatud selle takistus oomides. Ampermeetreid ühendavad traadid on tühiselt väikese takistusega. Leidke ampermeetrite näidud.



Ü127 Kondensaator ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2018, G 9

Vaatleme joonisel kujutatud elektriskeemi, mis koosneb kondensaatorist mahtuvusega C , patareist elektromotoorjõuga \mathcal{E} , takistist ja hõõglambist, mida võib lugeda mittelineaarseks takistik (pinge sõltub voolust mittelineaarselt). Algselt oli kondensaator laenguta ja lüliti oli avatud. Seejärel suleti lüliti lühikeseks ajaks, misjärel see avati uuesti ning hoiti lahtisena seni, kuni kondensaator oli täielikult tühjenenud. Selle aja jooksul, mil lüliti oli suletud, eraldus kogu skeemil soojushulk Q_1 ; lüliti avamise järel eraldus täiendavalt veel soojushulk Q_2 . Leidke laeng, mis läbis hõõglambi sel perioodil, kui lüliti oli suletud.



Ü128 Närvirakk ★★★★★

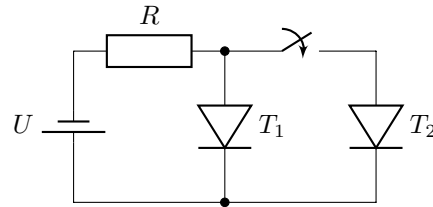
Autor: Andres Laan, lõppvoor, 2011, G 9

Närviraku membraani võib vaadelda kui õhukest kilet mahtuvusega C , mida läbivadioonkanalid, mis võimaldavad laengutel liikuda läbi membraani. Närviraku elektrilise tasakaalu seisukohast on olulisteks ioonideks naatrium ja kaalium. Kui naatriumioon (laenguga $+e$) läbib ioonkanali (sisenedes närvirakku), siis sooritavad keemilised jõud töö $e\mathcal{E}_{Na}$, st võib öelda, et naatriumioonidele mõjub ioonkanalis elektromotoorjõud \mathcal{E}_{Na} . Kaaliumioonide puhul on kanali läbimise protsess täpselt samasugune, kuid efektiivne elektromotoorjõud on sel puhul $\mathcal{E}_K (\neq \mathcal{E}_{Na})$. Peale keemiliste jõudude töö toimivad laengu liikumisel ioonkanalis ka hõõrdejõud, mida saab kirjeldada elektrilise takistuse abil: naatriumioonide jaoks on membraani elektriline takistus R_{Na} ja kaaliumioonide jaoks R_K . Millise laengu omandab närviraku membraan elektrilise tasakaalu saabudes?

Ü129 Türistor ★★★★★

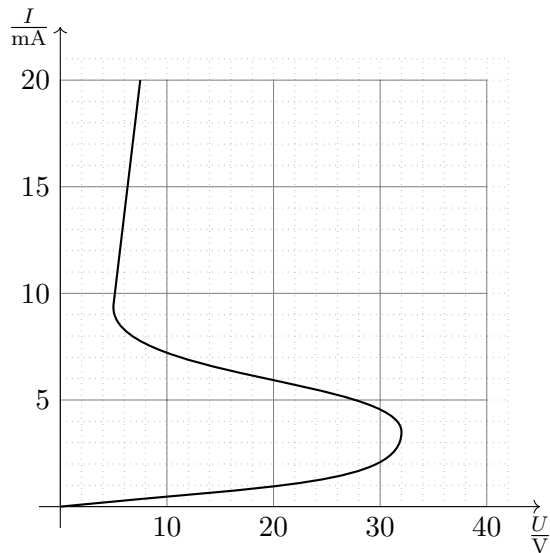
Autor: Jaan Toots, lõppvoor, 2015, G 10

Türistori (dioodisarnase elemendi) volt-ampere karakteristik on juuresoleval graafikul. Kaks sellist türistori on ühendatud pingevalika ja takistiga kõrvalolevasse skeemi. Takistus $R = 2 \text{ k}\Omega$.



a) Alguses on lüliti avatud. Pingevalika pinget suurendatakse lineaarselt $t = 42 \text{ s}$ jooksul väärtuselt $U_0 = 0 \text{ V}$ kuni väärtuseni $U_a = 42 \text{ V}$. Skitseerige ahelat läbiva voolutugevuse $I(t)$ sõltuvus ajast. Milline on voolutugevuse lõppväärtus I_a ?

b) Leidke lõppvoolutugevused mõlemas türistoris, kui lüliti suletakse ilma ahelale rakendatud pinget U_a muutmata.



Elektrostaatika

Ü130 Kondensaator ★

Autor: Madis Ollikainen, lahtine, 2012, G 3

Füüsikatudeng leidis vanade demonstratsioonideks mõeldud eksperimentaalseadmete hulgast ühe plaatkondensaatori. Noore füüsikuna tundis ta kohe hirmsat soovi sellega veidi mängida. Ta mõõtis kondensaatori plaatide vahekauguseks d ning seejärel laadis kondensaatori pingeni U . Nüüd asetas ta kondensaatori plaatide vahele ühe kuulikese, mis kukkus alumise plaadi peale ja siis hakkas uuesti ülespoole tõusma. Kuulikesel kulus alumiselt plaadilt ülemiseni jõudmiseks aeg t . Leidke kuulikese massi ja alumiselt plaadilt saadud laengu suhe.

Ü131 Juhe ★★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2005, G 5

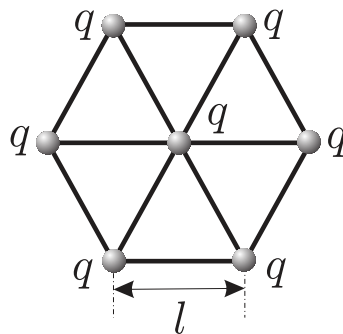
Sirgjooneline juhe asub sügaval maa all ühtlases pinnases. Lekkevool ühikulise pikkusega juhtmest on i . Leidke lekkevoolu tihedus (A/m^2) kaugusel r juhtmest. Juhtme pikkus on palju suurem kui r . Lekkevool on konstantne piki juhet.

Märkus. Lekkevooluks nimetatakse voolu, mis levib isolaatorites.

Ü132 Kuulikesed ★★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2005, G 4

Seitse ühesugust laetud kuulikest laenguga q on seotud omavahel samast materjalist võrdse algpikkusega elastsete niitidega ja saavad liikuda vaid ühes fikseeritud tasapinnas (vt joonist). Vahemaa kahe suvalise naaberkuulikese vahel tasakaalu olekus on l . Leidke tõmbepinged niitides.



Ü133 Tolmukübe ★★

Autor: Aigar Vaigu, piirkonnavor, 2006, G 8

Tolmukübe massiga $m = 1 \cdot 10^{-9}$ g on kondensaatori horisontaalsete plaatide vahel tasakaalus. Laengu pindtihedus kondensaatori plaatidel $\sigma = 2,6 \cdot 10^{-5}$ C/m². Kui suur on tolmutükeme elektrilaeng? Millise kiirendusega hakkaks tolmukübe langema, kui kondensaatori polaarsus muuta vastupidiseks? Eeldada, et elektriväli kondensaatori plaatide vahel on homogeenne. Õhutakistust mitte arvestada. Elektriline konstant $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ F/m, õhu dielektriline läbitavus $\epsilon \approx 1$.

Ü134 Kuulikesed ★★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2007, G 7

Kaks ühesugust kuulikest, millest kumbki kannab laengut q , asuvad vertikaalsihis kaugusel H üksteisest. Alumine kuulike on jäigalt kinnitatud, ülemine aga hakkab liikuma vertikaalselt alla suunatud algkiirusega v . Kui suur on minimaalne kaugus h alumise kuulikeseni, millele suudab läheneda ülemine kuulike? Ülemise kuulike mass on m . Raskuskiirendus on g .

Ü135 Laetud rõngas ★★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2009, G 4

Peenikesest traadist rõngas raadiusega R on ühtlaselt laetud negatiivse laenguga Q . Elektron massiga m ja laenguga e läheneb rõngale mööda sirget, mis on risti rõnga tasandiga ning läbib rõnga keskpunkti. Millist tingimust peab rahuldama elektroni kiirus punktis, mis asub kaugusel $d = R\sqrt{3}$ rõnga keskpunktist, et elektron saaks rõngast läbi lennata?

Ü136 Ioonmootor ★★

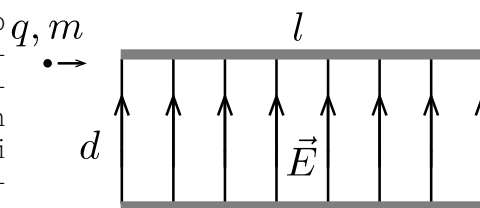
Autor: Mihkel Pajusalu, lahtine, 2010, G 6

Kosmosesond on varustatud lihtsa ioonmootoriga, mis koosneb ksenooni ioonide Xe^+ allikast ja kahest elektroodist, mille vahele rakendatakse pinge U ja mille vahelist maad läbides ioone kiirendatakse. Kui suurt kogust (mass) ksenooni on vaja, et selle mootoriga sondi kiirust tõsta $\Delta v = 1 \text{ km/s}$ võrra? Ksenooni aatommass $\mu = 131,29 \text{ g/mol}$, kosmosesondi mass $M = 1000 \text{ kg}$, kiirendav pinge $U = 100 \text{ kV}$, elementaarlaeng $e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, Avogadro arv $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.

Ü137 Elektron ★★

Autor: Mihkel Kree, lahtine, 2017, G 3

Elektron liigub vaakumis ning siseneb paralleelsete plaatide vahel paiknevas ruumipiirkonda selle ülemisest servast nii, et elektroni kiirusvektor on paralleelne plaatidega (vt joonist). Kui suur on elektroni minimaalne võimalik kiirus v_{\min} plaatide vahelisest ruumipiirkonnast väljumisel? Plaatide pikkus on l ja nende vahekaugus d . Plaatide vahel on ühtlane elektriväli \vec{E} ning ääreefektidega pole vaja arvestada. Elektroni laeng on q ning mass m . Gravitatsioonijõuga pole vaja arvestada.

**Ü138 Lendav elektronkahur ★★★**

Autor: Siim Ainsaar, lõppvoor, 2006, G 6

Jaan Tatikal tuli järjekordne lennumasinaiidee, mida ta kohe realiseerima tõttas. Ta nimelt ehitas palkidest platvormi, mille alla kinnitas telerist välja lõhutud elektronkahuri koos vajaliku elektroonika ja akuga. Elektrone kiirendav pinge on U , voolutugevus elektronkiires I . Leidke, kui suurt tõstejõudu F suudab see seade tekitada. Missugust tingimust peaksid U ja I rahuldama, et taoline lennumasin suudaks leiduri õhku tõsta? Kas see on ka realistlik (televiisorites $U \approx 30 \text{ kV}$,

$I \approx 100 \mu\text{A}$)? Relativistlikke efekte pole vaja arvestada; elektroni algkiirus katoodi juures on 0. Eeldage, et kiir üldse moodustub (õhu olemasoluga ärge arvestage). Tatika mass koos platvormi ja seadmega on $m_T \approx 150 \text{ kg}$, raskuskiirendus $g \approx 9,8 \text{ m/s}^2$. Elektroni laengu ja massi suhe $k = e/m_e \approx 1,76 \cdot 10^{11} \text{ C/kg}$.

Ü139 Elektronikiir ★★★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2008, G 7

Kitsas elektronikiir läbib vaakumis tasaparalleelsete plaatide vahelise pilu ja langeb seejärel fluorestseeruvale ekraanile, mis asub plaatide ekraanipoolsemast servast kaugusel $l = 15 \text{ cm}$. Kui plaatidele antakse pinge $U = 50 \text{ V}$, nihkub helendav punkt ekraanil endisest asukohast kaugusele $s = 21 \text{ mm}$. Plaatidevaheline kaugus $d = 18 \text{ mm}$, plaatide mõõtmed elektronide liikumise suunas on $b = 6 \text{ cm}$. Milline on elektronide algkiirus plaatide vahele sattumisel? Elektroni laengu ja massi suhe $e/m \approx 1,76 \cdot 10^{11} \text{ C/kg}$.

Ü140 Kuup ★★★

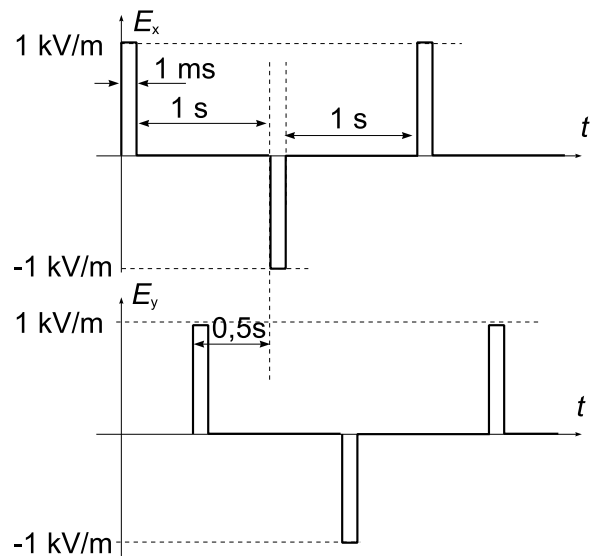
Autor: Jaan Kalda, piirkonnavaor, 2008, G 7

Õhukesest elektrit mittejuhtivast materjalist on valmistatud kuup küljepikkusega a . Kuubil on elektrilaeng ühtlase pindtihedusega σ (pindtihedus on laeng pinnapiirkonda kohta). Ühe tahu keskkoha lõigatakse väike ruudukujuline auk mõõtmetega $b \times b$ ($b \ll a$). Leida elektrivälja tugevus kuubi keskpunktis.

Ü141 Liikuv laeng ★★★

Autor: Jaan Kalda, piirkonnavaor, 2009, G 6

Laetud osake laengu ja massi suhtega $q/m = 1 \text{ C/kg}$ seisab algselt paigal. Seejärel hakkab ta liikuma x - ja y -telje sihis toimivate elektrivälja impulsside mõjul. Elektrivälja vastavate komponentide E_x ja E_y sõltuvus ajast on toodud graafikul (graafiku mastaap ei ole korrektne, juhenduda tuleb graafikul näidatud numbritest impulsi kestvuse $\tau = 1 \text{ ms}$ ja amplituudi $E_0 = 1 \text{ kV/m}$ ning perioodi $T = 2 \text{ s}$ jaoks). Visandage osakese trajektoor ja leidke keskmine kiirus (visandi tegemisel ja arvutustes võib lugeda ajavahemiku $\tau = 1 \text{ ms}$ jooksul toimuvad muutused hetkelisteks).



Ü142 Sfäärid ★★★

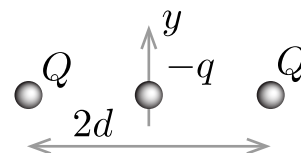
Autor: Kristian Kuppart, lahtine, 2011, G 8

Kaks juhtivast materjalist sfääri raadiustega R_1 ja R_2 on ühendatud pika juhtmega. Ühele sfäärile antakse mingi laeng. Leidke suhe $\frac{E_1}{E_2}$, kus E_1 ja E_2 on elektrivälja tugevused vastavate sfääride pinnal. Eeldage, et juhtme mahtuvus on tühine ning juhtme pikkus on oluliselt suurem sfääride raadiustest.

Ü143 Laengud ★★★

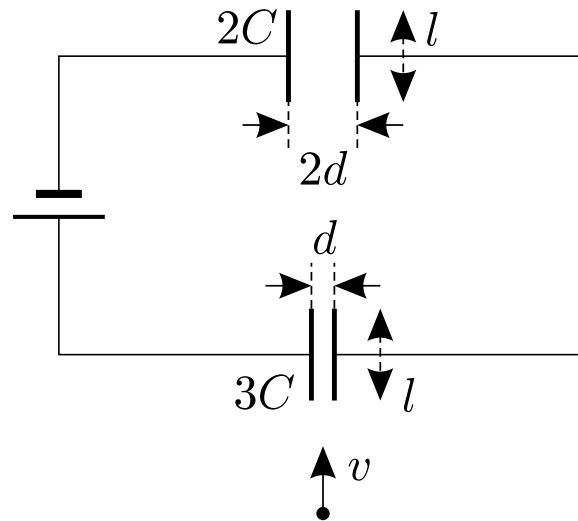
Autor: Mihkel Kree, piirkonnavor, 2017, G 9

Kaks kera, kumbki laenguga Q , on liikumatult fikseeritud nii, et nende keskpunktide kaugus on $2d$. Täpselt nende kerade keskele paigutatakse kolmas kera laenguga $-q$ ning massiga m , mis saab liikuda ainult mööda y -telge (vt joonis). Leidke selle kolmanda kera väikeste y -suunaliste võnkumiste periood T .



Ü144 Kondensaatorid ★★★★★ Autor: Oleg Košik, lõppvoor, 2005, G 8

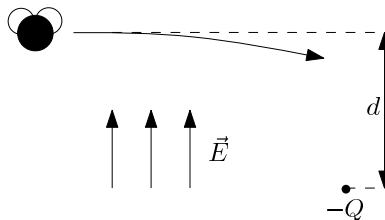
Kondensaatorid mahtuvustega $2C$ ja $3C$ on ühendatud pingesallikaga, mille pinge on U . Osake massiga m ning laenguga q lendab algiirusega v , mis on suunatud paralleelselt kondensaatorite plaatidega (vt joonist). Osake lendab mõlema kondensaatori plaatide vahelt läbi. Mõlema kondensaatori plaatide pikkus on l ning plaatide vahelised kaugused on vastavalt $2d$ ja d . Leidke nurk, mille võrra kaldub osake võrreldes esialgse trajektooriga, kui ta väljub joonisel ülemisest kondensaatorist. Eeldada, et see nurk on väike.



Ü145 Kärbes ★★★★★

Autor: Stanislav Zavjalov, lahtine, 2010, G 7

Kärbes on otsustanud lennates püsida ainult ekvipotentsiaalsete pindade peal. Ta lendab sisse ruumi, mis on täidetud homogeense elektriväljaga \vec{E} , välja jõujoontega risti. Elektriväljas hoitakse paigal ka laengut $-Q$ nii, et kärbse trajektoori esialgse puutuja ja laengu vahemaa on d (vt. joonist; $-Q < 0$). Kui lähedale kärbes laengule jõuab? Eeldage, et $Q \leq \pi\epsilon_0 E d^2$.



Ü146 Pendel ★★★★★

Autor: Jonatan Kalmus, lõppvoor, 2018, G 6

Elektriliselt isoleeritud metallkuul massiga M ja laenguga $Q > 0$ ripub vertikaalse vedru otsas jäikusega k tasakaaluasendis gravitatsiooniväljas g . Nüüd tekitatakse vertikaalne elektrivälja tugevusega E , mis on esialgu suunatud alla ning edaspidi alati kuuli liikumise suunas. Eeldada, et elektrivälja muutub hetkeliselt. Leida kuuli kaugus algsest asukohast ajahetkel $t = 7\pi\sqrt{\frac{M}{k}}$.

Ü147 Laetud klotsid ★★★★★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2006, G 9

Horizontaalsel siledal dielektrilisel pinnal asuvad kaks laetud klotsi massidega m ja samanimeliste laengutega q . Alghetkel on vahemaa nende vahel l . Mis tingimisel hakkavad klotsid liikuma ja kui suur on vahemaa L nende vahel, kui liikumine lõppeb? Hõõrdetegur klotside ja pinna vahel on μ . Klotside mõõtmeid ja liikuvate laengute elektromagnetkiirgust mitte arvestada. Pinna dielektriline läbitavus on 1.

Ü148 Kosmoseprügi ★★★★★

Autor: Siim Ainsaar, lõppvoor, 2009, G 9

Kaks ühesugust elektriliselt laetud kuuli, mis on ühendatud ideaalse nööri, hõljuvad vabalt kosmoses. Kummaagi kera laeng on q ja mass M , nööri pikkus on l . Ootamatult lendab nööriga risti selle keskkoha pihta kosmoseprügi tükk massiga m ja kiirusega v ning jääb nööri külge kinni. Millisele vähimale kaugusele d lähenevad teineteisele kuulid? Eeldada, et kuulikeste diameetrid on väiksemad kui otsitav kaugus d .

Ü149 Koonus ★★★★★

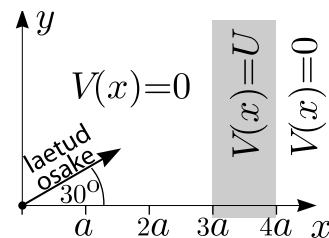
Autor: Stanislav Zavjalov, piirkonnavor, 2012, G 10

Ühtlaselt laetud koonus kõrgusega H tekitab oma tipus S potentsiaali φ_0 . Sellest lõigatakse ära väiksem koonus kõrgusega h , mis on suure koonusega sarnane, kahe koonuse tipud ühtivad. Seejärel eemaldatakse väiksem koonus lõpmatusesse. Milline on uus potentsiaali väärtus punktis S ?

Ü150 Laengud ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2012, G 9

Positiivselt laetud osake kiirendatakse koordinaatide alguspunktis pinge $4U$ (kus $U > 0$) abil teatud kiiruseni, mis lebab $x - y$ tasandis 30° -kraadise nurga all x -telje suhtes, vt joonist. Elektriline potentsiaal $V(x, y) \equiv V(x)$ sõltub ainult x -koordinaadist: kui $3a < x < 4a$, siis $V(x) = U$ ning vastasel korral $V(x) = 0$; peale elektrostaatilise jõu osakesele mingeid muid jõude ei mõju ning $a > 0$.



a) Visandage laengu trajektoori $x - y$ -tasandis (geomeetrilisi mõõtmeid ja nurki pole vaja märkida).

b) Nüüd on laetud osakeste allikaks koordinaatide alguspunktis asuv koaksiaalne vaakumdiod, mistõttu pinge $4U$ abil kiirendatud osakesi liigub isotroopselt (võrdsel hulgal) kõigis $x - y$ -tasandi suundades; z -suunaline kiiruskomponent on kõigil osakestel 0. Milline osa kõigist kiiratud osakestes jõuab ruumpiirkonda $x > 4a$?

Ü151 Kondensaator ★★★★★

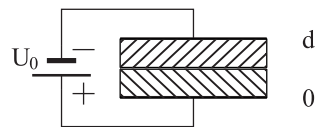
Autor: Stanislav Zavjalov, lõppvoor, 2013, G 10

Ruudukujuliste plaatidega kondensaator plaadi pindalaga S ning plaatidevahelise kaugusega $d \ll \sqrt{S}$ on laetud pingeni U_0 ning seejärel patareist lahti ühendatud. Kondensaatori sisse viiakse ruudukujuline juhtiv plaat, samuti pindalaga S ning paksusega $d/2$, kuni plaat on täielikult kondensaatori sees. Protsessi jooksul plaat ei puutu kokku kondensaatori plaatidega ning on nendega paralleelne. Kui palju tööd tehti plaadi sisseviimisel? Selgitage, kas plaat tõmbus ise sisse või pidid välisjõud selle sisse lükkama. Servaeefekte pole vaja arvesse võtta. Vaakumi dielektriline läbitavus on ϵ_0 .

Ü152 Kondensaator ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2017, G 7

Plaatkondensaator mahtuvusega C omab plaatidevahelist kaugust d . Plaatide vahele asetatakse kaks dielektrilist plaati paksusega $d/2$. Ühe plaadi dielektriline läbitavus on ϵ , teisel 2ϵ . Milline on nüüd kondensaatori mahtuvus? Milline laeng on plaatide eralduspinnal, kui kondensaatorile rakendatakse pinge U_0 ?

**Ü153 Laengutega pulk ★★★★★**

Autor: Jaan Kalda, piirkonnavor, 2015, G 10

a) Dielektrikust pulk massiga m ja pikkusega L kannab kummaski otsas positiivset laengut q (keskosa on laenguta, seega kogulaeng on $2q$). Piirkonnas $x < 0$ on x -telje sihiline elektrivälja tugevusega E_0 ja piirkonnas $x > 0$ – sama tugev x -teljega antiparalleelne elektrivälja. Pulga keskpunkt on koordinaatide alguspunktis ja pulk on paralleelne x -teljega. Pulgale antakse x -telje sihiline algkiirus v . Leidke võnkumiste periood. Pulk on paigaldatud nii, et see ei saa pöörelda, vaid üksnes liikuda x -telje sihis.

b) Leidke väikeste võnkumiste periood siis, kui konfiguratsioon on muus osas sama, kuid punktlaengute asemel on kogulaeng Q jaotunud ühtlaselt üle terve pulga.

Ü154 Kuulid ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2016, G 10

Kaks metallkuulikest raadiusega R on ühendatud peenikese metalltraadi abil ja asuvad homogeenses elektriväljas tugevusega E . Metalltraadi pikkus on l , kusjuures $l \gg R$. Süsteem on tasakaalus. Leidke mehaaniline pinge T traadis.

Ü155 Kaks kuuli ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2018, G 10

Kaks ühesugust metallkuuli raadiusega R ja massiga m on ühendatud peenikese terastraadiga pikkusega $L \gg R$. Piirkonnas $x \geq 0$ on elektrivälja tugevusega E , mis on suunatud piki x -telge; piirkonnas $x < 0$ elektrivälja puudub. Alghetkel on kuulid paigal ja üksteisest kaugusel L , nii et traat on pingul ning paralleelne x -teljega; ühe kuuli keskpunkt asub punktis $x = R$ ning teine kuul – piirkonnas $x < 0$. Visandage kvalitatiivselt kuulide kiiruse graafik sõltuvuses ajast (kvantitatiivset

ajaskaalat ei ole vaja) ning leidke nende kiirus punkti $x = 2L$ läbimisel. Terastraadi mahtuvus lugeda tühiselt väikeseks.

Ü156 Kolm kuuli ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2016, G 10

Kolm väikest kuuli massiga m kannavad ühesuguseid elektrilaenguid q ning on ühendatud isoleerivast materjalist niitude abil võrdhaarseks kolmnurgaks ABC , kus $\angle BAC = 120^\circ$ ning selle nurga tipus asuva kuuli A vastaskülje niidi pikkus $|BC| = L$. Niit BC lõigatakse katki. Leidke **a)** kuuli A maksimaalne kiirus edasise liikumise käigus ning **b)** kuulikeste kiirendused vahetult pärast niidi läbi lõikamist. Gravitatsioonilise vastasmõjuga mitte arvestada.

Gaasid

Ü157 Jalgpall ★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2006, G 1

Kui suure rõhuni p_N võib pumbata jalgpalli palli kolbpumbaga $N = 40$ pumpamise käigus? Iga pumpamiskäigu jooksul võtab pump atmosfäärist õhu koguse ruumalaga $v = 150 \text{ cm}^3$. Atmosfääri rõhk $p_0 = 0,1 \text{ MPa}$, palli ruumala $V = 31$. Lugeda, et õhu temperatuur pallis võrdub välistemperatuuriga.

Ü158 Allveelaev ★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2007, G 3

Uppunud allveelaevadest on inimesed mõnikord pääsenud avades esialgu alumised ventiilid (mida mööda vesi sisse tungib), seejärel ülemise luugi ning siis ise koos õhumulliga veepinnale tõustes. Kui suur osa k laeva ruumalast polnud täidetud veega peale ventiilide avamist, kui laev asus sügavusel $h = 42 \text{ m}$? Merevee tihedus $\rho = 1,03 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$. Õhu rõhk laevas alghetkel $p_0 = 0,1 \text{ MPa}$. Võite lugeda, et vee sisse laskmise käigus õhu temperatuur laevas ei muutunud (tänu soojusvahetusele ümbritseva veega).

Ü159 Tuukrid ★

Autor: Ott Krikmann, piirkonnavor, 2007, G 4

Tuukrid (akvalangistid) kasutavad sageli oma varustuse ja keha keskmise tiheduse ühtlustamiseks vee tihedusega (vees hõljumise saavutamiseks) õhuga täidetavat hermeetilist vesti, kuhu õhku pumbatakse hingamisaparaadist (akvalangist). Oletame, et tuuker saavutas hõljumise veepinna lähedal, pumbates teatud ruumala õhku oma vesti. Seejärel sukeldus ta $h = 25 \text{ m}$ sügavusele. Mitu korda pidi tuuker sellel sügavusel oma vesti ruumala suurendama, et saavutada hõljumise selles sügavuses? Õhurõhk on $p_0 = 105 \text{ kPa}$.

Ü160 Toaõhk ★

Autor: Mihkel Rähn, lõppvoor, 2008, G 3

Leida seos toaõhu molekulide summaarse kulgliikumise kineetilise energia ja toatemperatuuri vahel. Õhu rõhk on p ja toa ruumala V .

Ü161 Õhupall ★

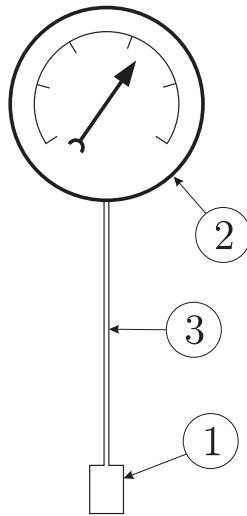
Autor: Eero Vaher, lõppvoor, 2015, G 1

Heeliumiga täidetud õhupall suudab tõsta koormist massiga kuni $M = 200 \text{ kg}$. Kui suur on õhupalli ruumala V ? Koormise ruumala lugeda tühiseks. Õhupalli kesta mass on arvestatud koormise massi sisse. Õhu tihedus on $\rho = 1,2 \text{ kg/m}^3$, õhu rõhk $p = 100 \text{ kPa}$, õhu temperatuur $T = 20 \text{ }^\circ\text{C}$. Heeliumi molaarmass on $\mu = 4,0 \text{ g/mol}$, ideaalse gaasi konstant $R = 8,3 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

Ü162 Gaasitermomeeter ★★

Autor: Valter Kiisk, piirkonnavor, 2006, G 5

Gaasitermomeeter koosneb mõõteampullist 1 ja manomeetrist 2, mis on omavahel ühenduses peenikese kapillaari 3 kaudu (vt joonist). Manomeetri ja mõõteampulli ruumalade suhe on $\alpha = 30$. Kapillaari ruumala võib lugeda tühiselt väikeseks. Seade täidetakse toatemperatuuril oleva gaasiga rõhuni $p_0 = 1 \text{ atm}$. Gaasi võib lugeda ideaalseks. Manomeetrit hoitakse toatemperatuuril $T_0 = 293 \text{ K}$, mõõteampull asetatakse keskkonda, mille temperatuuri on tarvis määrata. Leidke keskkonna temperatuur, kui manomeetri näit on $p = 0,7 \text{ atm}$.

**Ü163 Tuulik ★★**

Autor: Valter Kiisk, piirkonnavor, 2007, G 5

Teatud tuuleturbiin (tiiviku diameeter $d = 50 \text{ m}$) töötab maksimaalse efektiivsusega tuule kiirusel $v = 9 \text{ m/s}$. Sel juhul õnnestub $\eta = 40\%$ tiiviku poolt haaratava õhuvoolu kineetilisest energiast muundada elektriks (kineetilise energia arvutamisel ei arvestata õhu pidurdumist tiivikul). Leidke nendel tingimustel tuuliku elektriline võimsus. Õhu tihedus on $\rho = 1,3 \text{ kg/m}^3$.

Ü164 Rong tunnelis ★★

Autor: Eero Uustalu, lõppvoor, 2009, G 4

Rong liikus kiirusega $v = 54 \text{ km/h}$ läbi pika horisontaalse silindrikujulise tunneli. Kui palju tõusis tunnelis asuva õhu temperatuur? Tunneli läbimõõt oli $d = 5 \text{ m}$. Rongi elektrimootor tarbis tunnelit läbides võimsust $P = 800 \text{ kW}$. Õhu molaarmass on $M = 29 \text{ g/mol}$, õhurõhk tunnelis $p = 100 \text{ kPa}$ ja algtemperatuur $t_0 = 17^\circ\text{C}$. Õhk lugeda kaheaatomiliseks ideaalseks gaasiks. Eeldada, et rongi liikumisest tekkinud õhuvoolude liikumisest tulenev alarõhk on atmosfäärirõhuga võrreldes tühine

Märkus. Kaheaatomilise gaasi siseenergia ühe molekuli kohta on $5/3$ korda suurem kui samal temperatuuril oleval üheaatomilisel gaasil.

Ü165 Õhupalli vägi ★★

Autor: Eero Vaher, lahtine, 2013, G 4

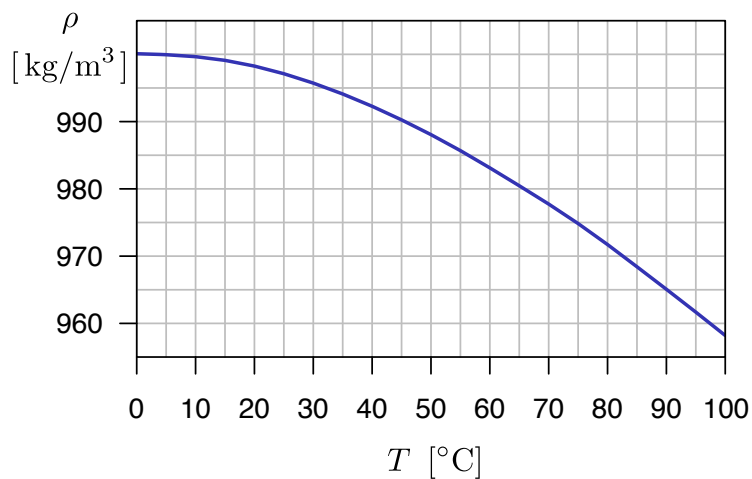
Heeliumiga täidetud õhupall suudab Maal tõsta õhku koormise massiga kuni 100 kg. Kui suure massiga koormise suudaks samasugune õhupall üles tõsta Marsil (õhupalli kesta massi loeme koormise massi hulka)? Koormise ruumala lugege tühi-seks. Õhu tihedus Maal on $\rho_0 = 1,2 \text{ kg/m}^3$, õhu rõhk Maal $p_0 = 100 \text{ kPa}$, õhu temperatuur Maal $T_0 = 20^\circ\text{C}$, "õhu" tihedus Marsil $\rho_1 = 0,015 \text{ kg/m}^3$, "õhu" rõhk Marsil $p_1 = 600 \text{ Pa}$, "õhu" temperatuur Marsil $T_1 = -60^\circ\text{C}$. Heeliumi molaarmass on $\mu = 4,0 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$, ideaalse gaasi konstant $R = 8,3 \frac{\text{J}}{\text{K mol}}$.

Ü166 Paisupaak ★★

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2014, G 3

Maja küttesüsteem sisaldab suurt akumulatsioonipaaki, kus hoitakse ringlevat soo- ja vett, ning paisupaaki, et kompenseerida vee soojuspaisumist. Paisupaak on fikseeritud ruumalaga anum, millest osa võtab enda alla õhk ning ülejäänud täidab küttesüsteemist pärinev vesi, mis saab vabalt süsteemi tagasi voolata. Hetkel, mil kogu vesi oli toatemperatuuril $t_0 = 20^\circ\text{C}$, täideti paisupaak suruõhuga nii, et õhu ruumala paagis oli $V_1 = 0,080 \text{ m}^3$ ning rõhk $p_1 = 1,5 p_0$, kus $p_0 = 0,10 \text{ MPa}$ on atmosfäärirõhk. Kogu süsteemis oleva vee ruumala toatemperatuuril on $V_0 = 1,0 \text{ m}^3$.

Torustikus on ka avariiventil, et vältida torude lõhkemist. Ventil avaneb, kui rõhk torustikus ületab atmosfäärirõhku $\Delta p = 1,2 p_0$ võrra. Millise temperatuurini saab vett süsteemis soojendada, ilma et avariiventil avaneks? Metall soojuspaisumisega mitte arvestada. Vee tiheduse sõltuvus temperatuurist on toodud graafikul. Eeldage, et graafiku kuju ei sõltu rõhust (vaadeldavad rõhumuutused on selleks liiga väikesed). Samuti eeldage, et õhu temperatuur paisupaagis püsib toatemperatuuril t_0 .



Ü167 Balloon ★★

Autor: Kaur Aare Saar, lahtine, 2015, G 3

Pikk silindrikujuline balloon raadiusega $r = 0,3 \text{ m}$ on tehtud terasest, mis talub pindalaühiku kohta jõudu kuni $\sigma = 250 \text{ MPa}$. Leidke suurim balloonis oleva gaasi rõhk, mida balloon talub. Ballooni seina paksus on $t = 2 \text{ mm}$.

Ü168 Saunauks ★★

Autor: Mihkel Kree, piirkonnavaor, 2016, G 5

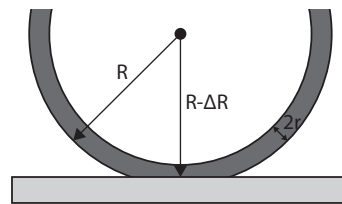
Sauna leiliruumis ruumalaga $V = 10 \text{ m}^3$ on õhu temperatuur $t = 90 \text{ }^\circ\text{C}$. Kerisele visatakse leilik veekogus $m = 150 \text{ g}$, mis koheselt aurustub. Mõtleme hüpoteetiliselt, et leiliruum on hermeetiliselt suletud. Missuguse jõuga peaksid saunalised ust pindalaga $A = 2,0 \text{ m}^2$ käepidemest kinni hoidma, et see lahti ei läheks? Gaasikonstant $R = 8,3 \text{ J}/(\text{mol}\cdot\text{K})$ ning vee molaarmass $\mu = 18 \text{ g/mol}$. Kui ülesande õigesti lahendate, siis küllap avastate, et leitud jõud on ebatavaliselt suur. Selgitage ühe lausega, miks tegelikult saunas ukse kinnihoidmiseks nii suurt jõudu pole vaja rakendada.

Ü169 Rattamatk ★★

Autor: Ardi Loot, lahtine, 2017, G 5

Juku on rattamatkal ning soovib ratta tagumist rehvi natuke rohkem täis pumbata. Et oleks lihtsam, kulutab Juku palju vaeva ja pakib raske matkavarustuse pakiraamilt maha ja keerab ratta tagurpidi (rattad taeva poole). Hinnake, mitu protsenti vähem jõudu peab ta pumpamisel rakendama võrreldes olukorraga, kui tagumine ratas on koormatud?

Ratta raadius $R = 33,0 \text{ cm}$, rehvi raadius $r = 2,5 \text{ cm}$, tagumisele rattale toetuv mass (ratas koos matkavarustusega) $m = 30 \text{ kg}$, koormatud rehvi rõhk $p = 150 \text{ kPa}$ (mõõdetud õhurõhu suhtes), õhurõhk $p_0 = 100 \text{ kPa}$ ja raskuskiirendus $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.



Vihje. Koormamata rattarehvi ruumala on antud valemiga $V = 2\pi^2 (R - r) r^2$ ning see väheneb koormamisel $\Delta V \approx S \cdot \Delta R/2$ võrra, kus $S \approx 2\pi \Delta R \sqrt{Rr}$ on rehvi kokkupuutepinna suurus maaga ja $\Delta R \ll r$ on rehvi deformatsiooni ulatus (vt joonist).

Ü170 Silinder külmkapis ★★

Autor: Rasmus Kisel, piirkonnavaor, 2017, G 6

Suletud silindris sisemise raadiusega R ja sisemise kõrgusega h on vedelik, mis võtab enda alla teatud osa k silindri siseruumalast. Silinder on algselt toatemperatuuril T_1 . Silinder asetatakse sügavkülmkusse, kus on konstantne temperatuur T_2 , mis on madalam silindris oleva aine sulamistemperatuurist. Teada on, et silindris oleva aine tihedus on vedelas olekus ρ_0 ja tahkes olekus $\lambda\rho_0$. Leidke, mitu korda suureneb silindris oleva õhu rõhk võrreldes esialgsega pärast vedeliku tahkumist. Eeldage, et vedeliku tahkumisel silindri mõõtmed ei muutu.

Ü171 Heelium ★★★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2008, G 6

Kolme mooli heeliumi soojendamisel muutus gaasi rõhk võrdeliselt gaasi ruumalaga. Mitme kraadi võrra tõusis heeliumi temperatuur, kui gaasile anti soojushulk $Q = 300 \text{ J}$?

Ü172 Õhk ★★★

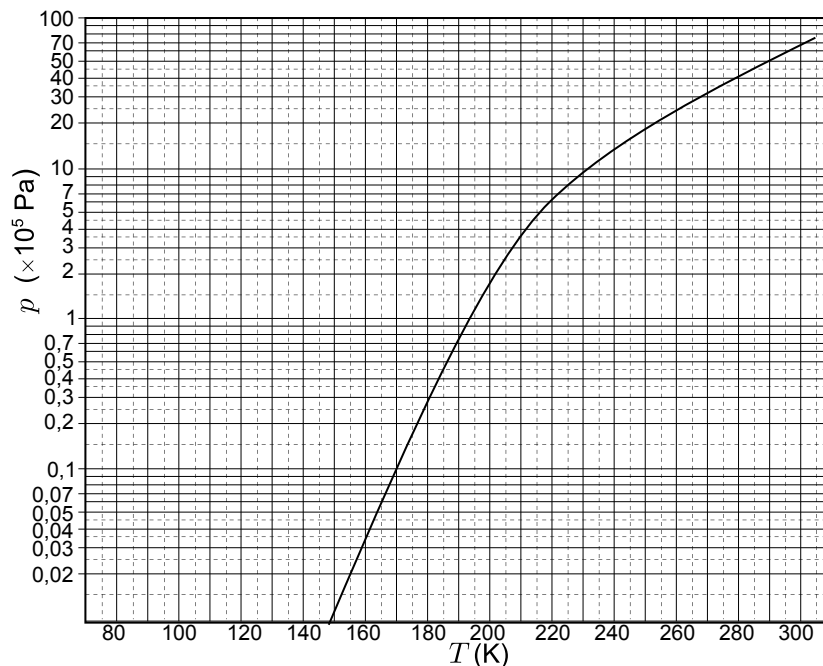
Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2009, G 7

Kaks anumad ruumalade suhtega $\alpha = V_1/V_2 = 2$ on ühendatud lühikese toruga, mille keskel asub ventiil. Ventiil laseb gaasi läbi juhul kui rõhkude vahe on suurem kui $\Delta p = 1,1p_0$, kus p_0 on atmosfäärirõhk. Temperatuuril $t_1 = 27^\circ\text{C}$ on suuremas anumal õhk normaalrõhul, väiksemas anumal on vaakum. Milliseks kujuneb rõhk väiksemas anumal, kui mõlemad anumad soojendada temperatuurini $t_2 = 127^\circ\text{C}$?

Ü173 Õhuhoki ★★★

Autor: Mihkel Heidelberg, lõppvoor, 2010, G 6

Heast soojusjuhist plaadile asetatakse kuivast jääd (st tahkest süsihappegaasist) kerge seibi raadiusega $r = 1 \text{ cm}$; seibi surutakse pealt jõuga $F = 10 \text{ N}$. Millise minimaalse aluse temperatuuri juures hõljub seib sublimeeruva süsihappegaasi tekitatud gaasipadjal? Aluse temperatuur lugege ühtlaseks ja samaks temaga vahetus kontaktis oleva ainekihiga. Õhurõhk $p_0 = 100 \text{ kPa}$ ja kuiva jää aururõhu sõltuvus temperatuurist on kujutatud graafikul.



Ü174 Süstal ★★★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2011, G 5

Kord sooritas noor füüsik eksperimendi, et leida süstlakolvile mõjuvat hõõrdejõudu. Ta tõmbas $V_0 = 10$ ml mahuga süstlasse 5,0 ml õhku ja sulges siis süstla otsa sõrmega. Seejärel tõmbas ta süstla kolvi näiduni $V_1 = 9,2$ ml ja lasi sellel seejärel aeglaselt tagasi liikuda. Kolb liikus, kuni näiduks jäi $V_2 = 5,8$ ml. Mõõtmisel selgus, et süstlakolvi sisediaameeter oli $d = 9$ mm ja kraadiklaas näitas, et ruumis oli $t = 27^\circ\text{C}$, õhu suhteline niiskus $R = 30\%$ ja õhurõhk $p_0 = 103,6$ kPa. Milline oli süstlakolvile mõjuv hõõrdejõud?

Märkus. Kuna tegu on praktilise probleemiga, siis ei pruugi kõik algandmed vajalikud olla.

Ü175 Kuumaõhupall ★★★

Autor: Andreas Valdmann, piirkonnavor, 2012, G 6

Mis temperatuurile tuleb kuumaõhupalli sees õhk kütta, et õhupall lendu tõuseks? Välisõhu temperatuur $t = 20^\circ\text{C}$, õhupalli ruumala $V = 3000$ m³ ja ei muutu. Õhupalli kesta ja laadungi kogumass $m = 700$ kg ja õhu tihedus 20 kraadi juures $\rho_{20} = 1,2$ kg/m³.

Ü176 Korvpall ★★★

Autor: Andreas Valdmann, lõppvoor, 2012, G 4

NBA standarditele vastava korvpalli mass on $m = 600$ g, übermõõt $C = 76$ cm ning ülerõhk palli sees $p_1 = 55$ kPa. Kui sügavale vee alla tuleks korvpall suruda, et see iseenesest põhja hakkaks vajuma? Vee tihedus $\rho = 1000$ kg/m³, raskuskiirendus $g = 9,8$ m/s² ja õhurõhk veepinnal $p_0 = 100$ kPa. Võib eeldada, et sukeldamise jooksul palli sees õhutemperatuur ei muutu ja palli kesta ruumala on tühine.

Ü177 Paisupaak ★★★

Autor: Ardi Loot, lahtine, 2016, G 7

Selleks, et vältida küttesüsteemis vee paisumise tulemusena tekkivat ülerõhku, lisatakse süsteemi paisupaak. See koosneb silindrist ruumalaga V , mis on jaotatud vabalt liikuva õhukese vaheseinaga kaheks osaks. Üks neist osadest täidetakse suruõhuga ($T_0 = 20^\circ\text{C}$) rõhuni p_0 , võttes enda alla kogu silindri ruumala. Seejärel ühendatakse silindri teine osa küttesüsteemiga temperatuuril $T_1 = T_0$ ning süsteem täidetakse veega, kuni saavutatakse rõhk $p_1 = 300$ kPa ning vee koguruumala süsteemis $V_s = 100$ L. Täitmise lõppedes on paisupaagist $\beta = 10\%$ täidetud veega. Talvel suureneb kütmise tõttu süsteemis oleva vee ruumala $\alpha = 1\%$ võrra, ning selle tulemusena tõuseb süsteemi rõhk p_2 -ni, kusjuures paisupaagis olev õhk soojeneb temperatuurini $T_2 = 40^\circ\text{C}$. Leidke, kui suur peab olema paisupaagis õhu algne rõhk p_0 ja minimaalne paisupaagi ruumala V , et vee paisumise tulemusena tekkiv lisarõhk $\Delta p = p_2 - p_1$ poleks suurem kui 50 kPa.

Ü178 Õhk ★★★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2006, G 8

Leida niiske (suhteline niiskus $f = 90\%$) ja kuiva õhu tiheduste suhe rõhu $p_0 = 0,1$ MPa ja temperatuuri $t = 27^\circ\text{C}$ juures. Küllastunud auru tihedus sellel temperatuuril on $\rho_0 = 0,027$ kg/m³. Õhu molaarmass $\mu_1 = 0,029$ kg/mol, vee molaarmass $\mu_2 = 0,018$ kg/mol.

Ü179 Gaasid ★★★★★

Autor: Oleg Košik, lõppvoor, 2007, G 6

Isoleeritud silindrilises anum as vabalt liikuva koormise all on vesinik ja heelium, mis on teineteisest eraldatud vabalt liikuva ja aeglaselt soojust juhtiva õhukese vaheseinaga (vt. joonist). Alguses on gaaside temperatuurid võrdsed, kusjuures vesinik hõlmab heeliumist 3 korda väiksema ruumala. Vesinikule anti teatud soojushulk, mille tulemusena nihkus koormis $d_1 = 5,5 \text{ cm}$ võrra ülespoole. Pika aja möödudes täheldati, et koormis nihkus veel. Mis suunas ja kui palju see nihkus? Gaasid lugeda ideaalseteks. Vesiniku soojusmahtuvus konstantsel rõhul on $C_{\text{PH}_2} = 7R/2$ ning heeliumil $C_{\text{PHe}} = 5R/2$.

**Ü180 Korsten ★★★★★**

Autor: Jaan Kalda, piirkonnavor, 2009, G 9

Hinnake, milline oleks suitsu kiirus korstnast väljumisel, kui õhutakistusega (sh turbulentsest liikumisest tingitud takistusega) korstnas ning ahjulõõrides võiks mitte arvestada. Korstna kõrgus (mõõdetuna korstnaja juurest, kuhu siseneb ahjust tulev soe õhk) on $h = 10 \text{ m}$ ja õhu keskmine temperatuur korstnas $t = 80 \text{ }^\circ\text{C}$. Lugeda, et ahju uks ja korstna jalg on samal kõrgusel. Välisõhu temperatuur on $t_0 = 0 \text{ }^\circ\text{C}$.

Ü181 Terasanum ★★★★★

Autor: Valter Kiisk, piirkonnavor, 2017, G 8

Sfäärilise terasanuma sisediameeter on $d = 0,5 \text{ m}$ ja mass $m = 25 \text{ kg}$. Maksimaalselt mitu liitrit gaasi (arvestatuna normaalrõhule) õnnestuks säilitada sellises anumal kõrge rõhu all? Terasa tihedus on $\rho = 7,9 \text{ g/cm}^3$ ja maksimaalne talutav tõmbejõud pindalaühiku kohta $\sigma = 450 \text{ MN/m}^2$. Normaalrõhk on $p_0 = 101,3 \text{ kPa}$.

Ü182 Õhupall ★★★★★

Autor: Ardi Loot, lõppvoor, 2017, G 7

Juku tahab õhupalli täis pumbata. Tal on suur pump, mille otsas olev ventiil on alguses suletud. Ta paneb pumba otsa õhupalli, seejärel vajutab pumbale peale, kuni rõhk pumbas tõuseb p -ni. Kokku surumise tõttu tõuseb pumbas oleva õhu temperatuur T -ni. Juku keerab ventiili lahti ja õhupall täitub aeglaselt, samal ajal vajub pumba käepide järjest allapoole. Juku vajutab kogu protsessi vältel pumbale täpselt sama suure jõuga kui alguses. Mis on õhu temperatuur õhupallis, kui see on täis pumbatud? Soojuskadudega läbi pumba ja õhupalli seinte mitte arvestada, samuti õhupalli kummi venitamisel tehtud tööga mitte arvestada. Väline õhurõhk ja temperatuur on p_0 ja T_0 . Õhu soojusmahtuvus konstantsel ruumalal on c_V .

Ü183 Kuumaõhupall ★★★★★

Autor: Ants Remm, piirkonnavor, 2014, G 10

Juku läheb lendama kerakujulise kuumaõhupalliga, mille raadius $r = 8,7 \text{ m}$, mass koos reisijatega $M_0 = 390 \text{ kg}$ ning lisaks on kütusena kaasas $M_k = 20 \text{ kg}$ propaani. Kui kaua saab kesta Juku õhupallilend?

Õhupall on kaetud kattega, mis vähendab soojusjuhtivust ning soojuskiirgust tühistab väärtusteni. Tööolukorras imbub õhk läbi õhupalli kesta kiirusega $\lambda = 500 \text{ g/s}$.

Õhurõhk ja temperatuur lennukõrgusel on $p_0 = 100 \text{ kPa}$ ja $T_0 = 10^\circ\text{C}$. Propaani kütteväärtus $k = 50 \text{ MJ/kg}$. Õhu keskmine molaarmass $\mu = 29 \text{ g/mol}$ ning soojusmahtuvus konstantsel rõhul $C_p = 1,0 \frac{\text{kJ}}{\text{K}\cdot\text{kg}}$. Universaalne gaasikonstant on $R = 8,3 \frac{\text{J}}{\text{K}\cdot\text{mol}}$.

Ü184 Kerkiv õhupall ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2018, G 8

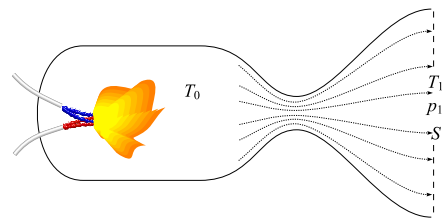
Ilusa päikeselise ilma korral on harilikult tegemist nn adiabaatilise atmosfääriga. See tähendab, et õhumassid on pidevas üles-alla liikumises. Kerkides õhk paisub ja jahtub adiabaatiliselt; pideva segunemise tõttu on kerkiva õhumassi temperatuur võrdne seda antud kõrgusel ümbritsevate õhumasside temperatuuriga. On võimalik näidata, et sellisel juhul kahaneb temperatuur lineaarselt kõrgusega, $T = T_0 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\mu g h}{R}$, kus $\gamma = 1,4$ on õhu adiabaadinäitaja, $\mu = 29 \text{ g/mol}$ – õhu keskmine molaarmass, $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ – vabalangemise kiirendus, $R = 8,31 \text{ J/mol K}$ – gaasikonstant, ja h – kõrgus maapinnast; õhutemperatuur maapinnal $T_0 = 293 \text{ K}$. Venimatust kuid vabalt painduvast nahast valmistatud õhupall mahutab maksimaalselt ruumala V_0 jagu gaasi; see täidetakse sellise koguse heeliumiga, mis võtab maapinnal enda alla ruumala $V_0/2$. Õhupall lastakse lahti ja see hakkab aeglaselt kerkima; lugeda, et õhupallis oleva heeliumi temperatuur on kogu aeg võrdne ümbritseva õhu temperatuuriga. Hinnake, millisel kõrgusel h_1 on õhupalli tõstejõud 1% võrra väiksem kui maapinnal. Teilt oodatakse sellist hinnangut kõrgusele, mille suhteline viga pole suurem ühest kümnendikust, kusjuures vea piisavat väiksust pole vaja tõestada.

Märkus. Adiabaatilise protsessi korral kehtib seos $pV^\gamma = \text{Const}$, kus p tähistab gaasi rõhku ja V – ruumala.

Ü185 Rakettmootor ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2010, G 10

Vedelkütusel töötava rakettmootori skeem on toodud juuresoleval joonisel. Põlemiskambris moodustuvad põlemisproduktid (gaasid) omandavad kõrge rõhu ja temperatuuri. Seejärel väljuvad need adiabaatiliselt paisudes ja jahtudes läbi düüsi. Õigesti konstrueeritud düüsi korral (kaela läbimõõt vastab põlemiskiirusele ja -temperatuurile) jätkub adiabaatiline paisumine ka peale düüsikaela läbimist ning suur osa soojusenergiast muundatakse gaasijoja kineetiliseks energiaks. Leidke rakettmootori veojõud F eeldusel, et (a) on teada düüsi väljundristlõike pindala S , temperatuur põlemiskambris T_0 ning gaaside temperatuur T_1 ja rõhk p_1 düüsisist väljumise hetkel, kusjuures $T_0 \gg T_1$; (b) põlemiskambris on gaaside kineetiline energia tühine võrreldes soojusenergiaga; (c) atmosfäärirõhu mõju veojõule on tühine; (d) moodustuva gaasisegu ühe mooli soojusmahtuvus konstantsel ruumalal on $c_V = \frac{5}{2}R$, kus R on gaasikonstant.



Geomeetiline optika

- Ü186 Kiil ★** Autor: Valter Kiisk, lõppvoor, 2007, G 3
Laserkiire teele asetatakse enam-vähem risti õhuke klaasplaat (klaasi murdumisnäitaja $n = 1,5$). Selle tulemusena nihkub $L = 2$ m kaugusel ekraanil olev laserkiire kujutis $d = 5$ mm võrra. Järeldatakse, et plaat on kergelt kiilukujuline. Leidke selle kiilu tipunurk α .
Vihje. Väikeste nurkade φ puhul $\sin \varphi \approx \tan \varphi \approx \varphi$.
- Ü187 Lääts ★** Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2009, G 2
Lääts tekitab esemest $d = 24$ cm kaugusele ekraanile kujutise, mis on esemest 3 korda suurem. Leidke lääts fookuskaugus.
- Ü188 Kiirtekimbu laiendi ★** Autor: Koit Timpmann, piirkonnavoor, 2010, G 3
Kaks ühise optilise peateljega lääts moodustavad seadme, millega saab paralleelsest valgusvihust moodustada esialgselt laiema või kitsama paralleelse valgusvihu. Kasutatava seadme esimese lääts optiline tugevus on -20 dpt. Kui kaugusele esimesest läätselt tuleks paigutada teine lääts, et laiendada seadmele langev valgusvihk 2,5-kordseks?
- Ü189 Segadus optikalaboris ★** Autor: Roland Matt, lahtine, 2011, G 1
Optik koristas vana laborit ja leidis sealt ühe markeerimata nõguslääts ja ühe kumerlääts. Nende optiliste tugevuste määramamiseks paigutas ta läätsed üksteise taha ja lasi neist läbi kaks paralleelset laserkiirt, mille vahekaugus oli $x_1 = 1,0$ cm. Ta muutis läätsede vahekaugust seni, kui süsteemist väljunud kiired olid jällegi paralleelsed (seda kontrollis ta, määrates nende vahekaugust paberilehekesega erinevatel kaugustel), nüüd oli kiirte vahekauguseks $x_2 = 26$ mm. Sellises olukorras oli läätsedevaheliseks kauguseks $d = 32$ cm. Millise optilise tugevusega olid läätsed?
- Ü190 Lääts ★** Autor: Koit Timpmann, piirkonnavoor, 2016, G 3
Punkt A ja selle tõeline kujutis A' asuvad lääts optilisest peateljest vastavalt 4 cm ja 1 cm kaugusel. Punktist A kuni selle kujutiseni A' on otsejoones 15 cm. Kui suur on lääts fookuskaugus?
- Ü191 Valgusallika kujutis ★** Autor: EFO žürii, lahtine, 2017, G 2
Sama suure fookuskauguse absoluutväärtusega f kumer- ja nõguslääts asuvad nii, et nende fookused ning optilised peateljed ühtivad. Läätsede ees optilisel peateljel kumerläätselt kaugusel $1,5f$ asub punktvalgusallikas A . Leidke punktvalgusallika kujutise asukoht läbi kahe lääts. Tehke joonis.

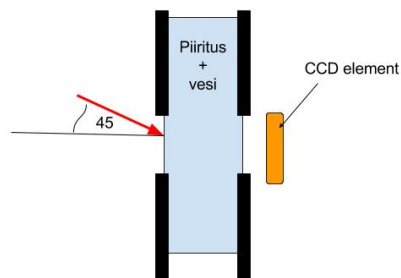
Ü192 Piiritusetehas ★

Autor: Aigar Vaigu, piirkonnavor, 2017, G 4

Piiritusetehases mõõdetakse piirituse ja vee segus oleva piirituse mahuprotsenti joonisel näidatud optilise seadme abil, kus segu paikneb kanalis laiusega $d = 1$ cm. Kui suure vahemaa võrra muutub seadme fototundlikul elemendil kiire asukoht, kui piiritus mahuprotsendiga 40 % asendada piiritusega mahuprotsendiga 85 %? Võib eeldada, et segu murdumisnäitaja n_{segu} on lineaarne kombinatsioon vee ja piirituse murdumisnäitajatest

$$n_{\text{segu}} = Xn_{\text{piiritus}} + (1 - X)n_{\text{vesi}},$$

kus X on piirituse mahuline sisaldus vahemikus 0 – 1 ja $n_{\text{piiritus}} = 1,3615$ ning $n_{\text{vesi}} = 1,3330$.

**Ü193 Kaks valgusallikat ★**

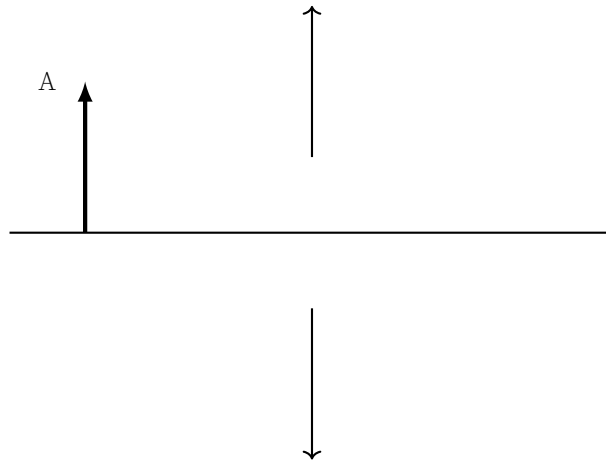
Autor: EFO žürii, piirkonnavor, 2018, G 2

Kaks punktikujulist valgusallikat asuvad kumerläätse optilisel peateljel erinevates punktides. Nendest valgusallikatest läätse abil tekitatud kujutised kattuvad. On teada, et üks valgusallikas asub läätse keskpunktist $a = 18$ cm kaugusel. Kui kaugel sellest valgusallikast asub teine valgusallikas? Läätse fookuskaugus $f = 9$ cm.

Ü194 Poolitatud lääts ★

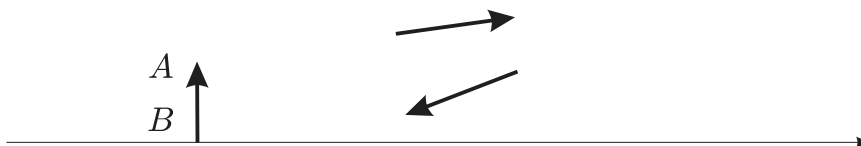
Autor: Hans Daniel Kaimre, lõppvoor, 2018, G 1

Kersti paneb kokku optilise skeemi, nii et koondav lääts on objektist ja ekraanist, kuhu terav kujutis tekib, võrdsel kaugusel. Ta jätab objekti ja ekraani asukoha samaks, kuid lõikab läätsse optilise peatelje juurest pooleks ning nihutab kaks tekkinud poolikut läätsse optilisest peateljest eemale. Joonistage lisalehel uue skeemi jaoks kiirte käik. Objekt on tähistatud A-ga.

**Ü195 Nõguspeegel ★★**

Autor: EFO žürii, lõppvoor, 2006, G 2

On teada esemelt lähtunud ühe kiire suund enne ja pärast peegeldumist sfääriliselt nõguspeeglilt. Teades eseme AB ja optilise peatelje asukohta, konstrueeri eseme kujutis ja tähistage nõguspeegli fookuse asukoht. Ignoreerida sfäärilisi aberratsioone.

**Ü196 Plaat ★★**

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2007, G 4

Tasaparalleelsel plaadil paksusega $d = 5$ cm on alumine pind hõbetatud. Valguskiir langeb plaadi ülemisele pinnale nurga $\alpha = 30^\circ$ all, osaliselt peegeldub sellelt ning osaliselt murdub plaadi sisse. Seejärel peegeldub murdunud kiir plaadi alumiselt pinnalt ning murdub teist korda, väljudes tagasi õhku. Leidke plaadi materjali murdumistegur n , kui kaugus esimese peegeldunud ja teise murdunud kiire vahel $l = 2,5$ cm.

Ü197 Kärbes ★★

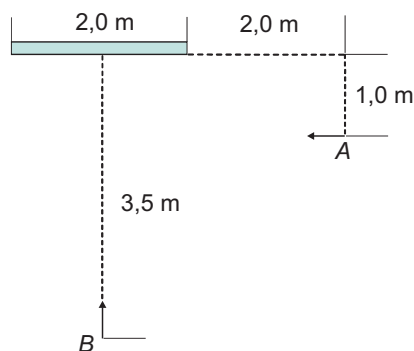
Autor: Taavi Pungas, lahtine, 2012, G 4

Kumerläätsel optilisel peateljel, kaugusel a läätsest, lendab kärbes. Kärbe kiirus on v ning tema suund on risti optilise peateljega. Leidke kärbe kujutise kiirus (nii suund kui väärtus). Läätsel fookuskaugus on $f < a$.

Ü198 Peegel ★★

Autor: Oleg Košik, piirkonnavor, 2012, G 1

Suure ruumi seinal on 2,0 m laiune peegel. Peegli kõrval 2,0 m kaugusel peeglist ja 1,0 m kaugusel seinast seisab inimene, kes hakkab liikuma paralleelselt peegli kiirusega 1,0 m/s. Samal hetkel hakkab minema mööda peegli keskjooant peegli poole kiirusega 1,0 m/s tema tuttav, kes alghetkel seisab 3,5 m kaugusel peeglist. Millise aja pärast märkavad tuttavad teineteist peeglis?

**Ü199 Läätsed ★★**

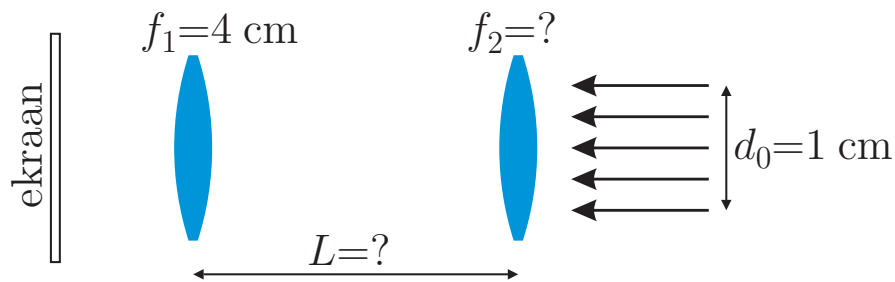
Autor: Tanel Kiis, lõppvoor, 2013, G 1

Jukul on suur hulk nõgusläätsi, mille fookuskauguste leidmiseks ta konstrueeris lihtsa süsteemi. Ta suunas optilise peateljega paralleelse laserikiire läbimõõduga $2R$ tuntud fookuskaugusega f_1 koondava läätse keskpunkti, pärast mida koondus laserikiir ekraanil ühte punkti. Kui nüüd panna fookuskaugusega f_2 nõguslääts võrdsele kaugusele koondavast läätsest ja ekraanist, on laserikiire läbimõõt ekraanil $2r$. Leidke f_2 eeldusel, et $2f_2 < f_1$.

Ü200 Valgustamine ★★

Autor: Valter Kiisk, lõppvoor, 2015, G 2

Lääts fookuskaugusega $f_1 = 4 \text{ cm}$ on paigutatud nii, et läätsele suunatud paralleelsete valguskiirte kimp diameetriga $d_0 = 1 \text{ cm}$ koondub ekraanil ühte punkti. Mõnikord on tarvis valgustada ekraanil suuremat ala, kuid läätse nihutamine või valgusallika vahetamine pole võimalik. Kui suur peab olema olemasolevast läätsest paremale paigutatava lisaläätsel fookuskaugus f_2 , et ekraanil tekiks ühtlaselt valgustatud laik diameetriga $d = 2 \text{ cm}$, kui läätse vahekaugus on L ?



Ü201 Valgusvihk ★★

Autor: Mihkel Kree, piirkonnavor, 2005, G 5

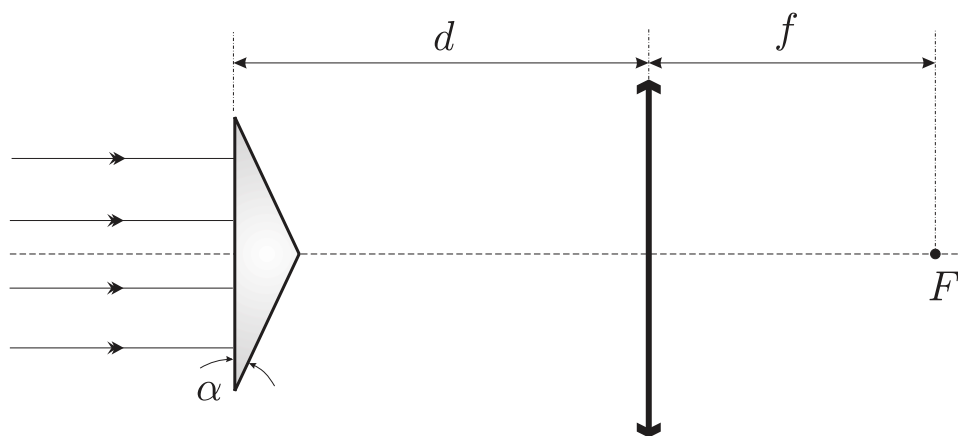
On antud ülesanne muuta kitsas paralleelne valgusvihk võimalikult laiaks paralleelseks valgusvihuks. Kasutada saab vaid kahte lätse etteantud kolmest: kumerlääts (fookuskaugus $f_1 = 20$ cm), kumerlääts ($f_2 = 40$ cm) ning nõguslääts ($f_3 = -10$ cm). Kuidas tuleb toimida ning mitu korda laiemaks valgusvihk sel juhul muutub? Eeldage, et läätsede mõõtmed on oluliselt suuremad valgusvihu laiusest.

Ü202 Biprisma ★★

Autor: Mihkel Kree, piirkonnavor, 2006, G 6

Paralleelne kiirtekimp langeb võrdhaarsele kolmnurksele prismale risti prisma tahuga (vt joonist). Prisma teravnurgad on väikesed, suurusega α . Prisma materjali murdumisnäitaja on n . Prismast kaugusel d paikneb koondav lääts fookuskaugusega f . Lääts optiline peatelg on paralleelne kiirtekimbu esialgse sihiga ning läbib prisma tipunurka. Missugune pilt tekib lääts fokaaltasandis asuvale ekraanile? Leida pilti iseloomustavad parameetrid. Kuidas sõltub pilt kaugusest d ?

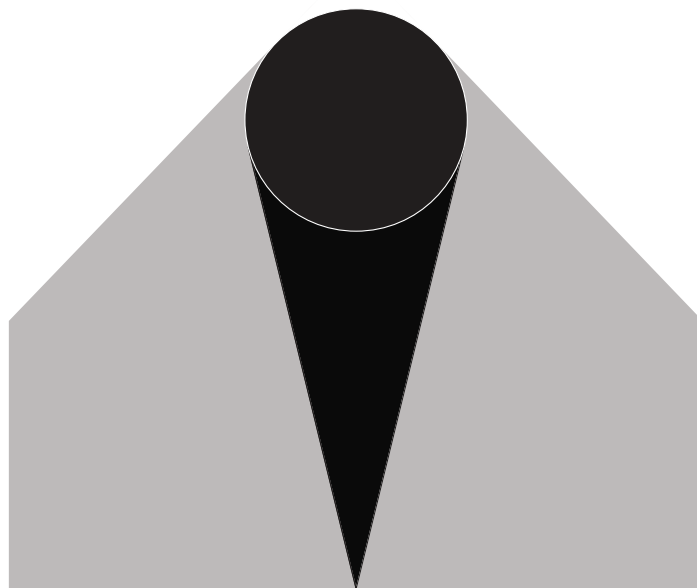
Märkus. Väikeste nurkade korral kehtib lähendus $\tan \alpha \approx \sin \alpha \approx \alpha$.



Ü203 Varjud ★★

Autor: Jaak Kikas, piirkonnavor, 2007, G 6

Läbipaistmatut kera valgustab kerakujuline valgusallikas. Joonisele on kantud läbipaistmatu kera poolt tekitatud täis- ja poolvarju koonuste lõiked joonise tasandiga (kera keskpunkt asub samas tasandis). Konstrueerige valgusallika lõige joonise tasandiga. Valgusallika keskpunkt asetseb samuti joonise tasandis.



Ü204 Veetalune valgus ★★

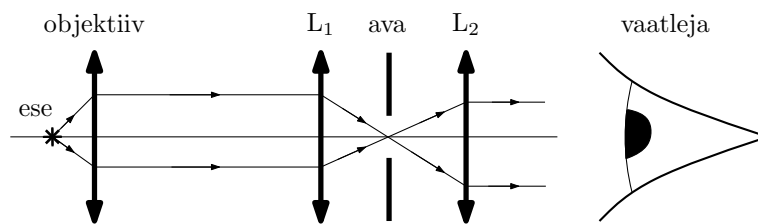
Autor: Jaak Kikas, lõppvoor, 2008, G 5

Kas basseini kohal rippuv punktvalgusallikas, mida vaadeldakse basseini põhjast, on heledam siis, kui bassein on veest tühi, või siis, kui ta on veega täidetud ja kaugus silmast veepinnani võrdub valgusallika kõrgusega veepinna kohal? Mitu korda? Veepinnalt peegeldub tagasi $r = 2\%$ valgust, vee murdumisnäitaja on $n = 1,33$ ja neeldumine vees on tühine. Allika heledus on võrdeline silmaavasse sattuva valguse energiaga, silmaava läbimõõdu loeme samaks kõigis vaatlustingimustes ja väikeseks võrreldes vaatleja sügavusega.

Ü205 Konfokaalne mikroskoop ★★

Autor: Mihkel Rähn, lõppvoor, 2009, G 7

Harilikest mikroskoopidest parema ruumilise lahutuse saamiseks kasutatakse konfokaalseid mikroskoobe. Juuresoleval joonisel on kujutatud konfokaalse mikroskoobi põhielemendid: objektiiv, läätsed L_1 ja L_2 ning nende ühises fokaaltasandis asuv väike ringikujuline ava. Joonisel on samuti esitatud optilisel peateljel asuvast väikesest uuritavast esemest lähtuvate kiirte käik. Objektiivi fokaaltasandist kaugemal ja lähemal olevatest objektidest lähtuvad kiired ei läbi enamuses ava, vaid neelduvad ava servadel. Kõrvalnähtusena vaateväli kitseneb. Kui kaugel optilisest peateljest võib olla objektiivi fokaaltasandis olev ese, et see oleks veel nähtav? Läätsede L_1 , L_2 ja objektiivi fookuskaugused on vastavalt f_1 , f_2 ja f_{obj} , ava läbimõõt d .

**Ü206 Klaaskuulike ★★**

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2010, G 4

Paljudes helkurmaterjalides kasutatakse valguse tagasisuunamiseks tillukesi klaaskuulikesi, mis kantakse tiheda kihina materjali pinnale. Uurigem, milline peaks olema selliste klaaskuulikeste murdumisnäitaja. Teeme järgmised eeldused: (a) klaaskuulile langeb valguskiir nii, et valguskiire ja pinnanormaali vaheline nurk α on väike ($\alpha \ll 1$ rad); (b) valguskiir murdub klaasi pinnal, peegeldub ühekordselt kuuli sisepinnalt ja väljub seejärel kuulist (murdudes teistkordselt kuuli pinnal). Millise murdumisnäitaja n korral suundub selline valguskiir täpselt tagasi? Tehke kiirtekäigu joonis ja põhjendage vastust. *Abivalem:* väikese α korral radiaanmõõdus $\sin \alpha \approx \alpha$.

Ü207 Optiline kiud ★★

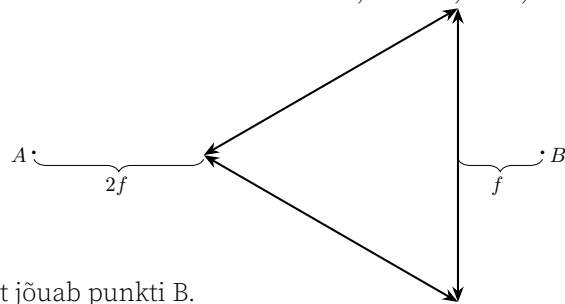
Autor: Andreas Valdmann, lahtine, 2016, G 4

Optiline kiud koosneb silindrikujulisest klaassüdamikust murdumisnäitajaga $n_1 = 1,46$ ja seda toruna ümbritsevast kattest murdumisnäitajaga $n_2 = 1,44$. Leidke pikast optilisest kiust väljuva valguskoonuse tipunurk, lähtudes klassikalisest optikast.

Ü208 Kolmläätis ★★

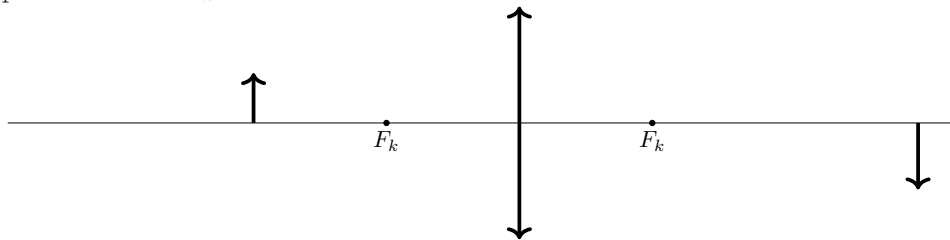
Autor: Andres Põldaru, lahtine, 2016, G 5

Kolm läätse on kokku pandud nii, et nendest tekib võrdkülgne kolmnurk. Läätseidel on üks ühine fookus. Punktvalgusallikas pannakse punkti A, mis on kolmnurga tipust kaugusel $2f$, kus f on läätsede fookuskaugus. Põhjendada konstrueerimise teel, kas osa valgusest jõuab punkti B.

**Ü209 Puuduv lääts ★★**

Autor: Eero Vaher, piirkonnavaor, 2017, G 5

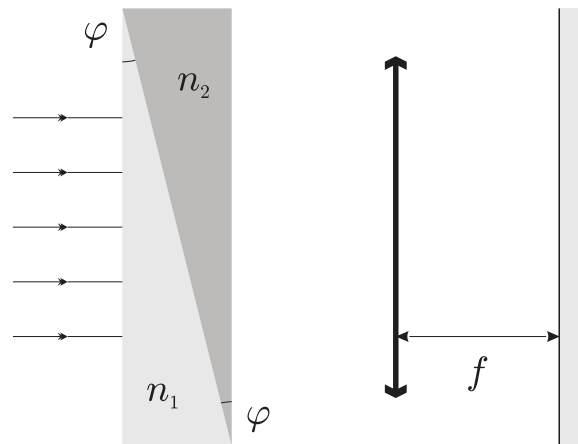
Esemelt lähtuv valgus läbib esmalt nõgusläätsse ning seejärel kumerläätsse. Joonisel on kujutatud eseme, kumerläätsse ning lõpuks tekkiva kujutise asukohad ning kumerläätsede fookused F_k . Konstrueerige lisalehel nõgusläätsse ning selle eseme poolse fookuse F_n asukohad.

**Ü210 Kiilud ★★★**

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2006, G 6

Tasaparalleelne plaat koosneb kahest klaaskiilust väikse nurgaga $\varphi \ll 1$ (vt joonist). Kiilude murdumisnäitajad on n_1 ja n_2 ($n_2 > n_1$). Plaadile risti tema pinnaga langeb paralleelne valgusvihk. Plaadi taga asub koondav lääts fookuskaugusega f . Läätsede fokaaltasandis asub ekraan. Joonistage kiirte käik süsteemis. Kui palju nihkub valguslaik ekraanil, kui me eemaldame plaadi?

Vihje. Väikeste nurkade puhul kehtib ligikaudne võrdus $\tan \varphi \approx \sin \varphi \approx \varphi$.



Ü211 Klaaskuup ★★★

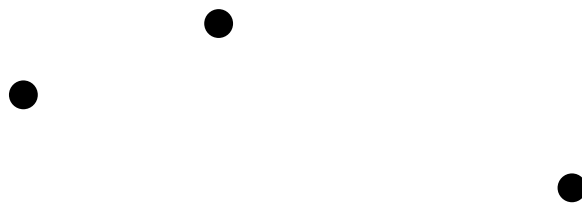
Autor: Tundmatu autor, piirkonnavor, 2009, G 7

Klaaskuubi neli tahku on värvitud mustaks nõnda, et värvimata jäänud tahud paiknevad kõrvuti (omavad ühist serva). Missugune peab olema klaasi murdumisnäitaja n , et ka värvimata tahud paistaksid mustadena?

Ü212 Peeglid ★★★

Autor: Jaan Kalda, piirkonnavor, 2009, G 8

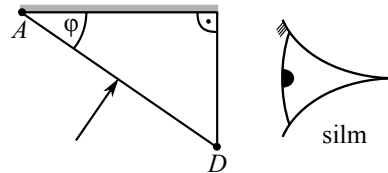
Kui paigutada kaks tasapeeglit nii, et nende tasapinnad moodustavad nurga $\alpha < 180^\circ$ ning peegeldavad pinnad on vastamisi, siis peeglite vahele paigutatud asjast võib tekkida mitu kujutist: lisaks peegeldustele veel peegelduse-peegeldused jne. Joonisel on kujutatud valgusallika S kaks peegeldust ning üks peegelduse-peegeldus ülaltvaates (st peeglite tasapindade lõikejoone sihis). Leida konstruktsiooni abil peeglite ning valgusallika asukohad. Peeglitel on ainult üks peegeldav külg.



Ü213 Periskooprillid ★★★

Autor: Andreas Valdmann, lõppvoor, 2014, G 4

Kui liiga kaua järjest raamatut lugeda, võib kael pikast allapoole vaatamisest ära väsida. Selle vältimiseks on välja mõeldud erilised prillid, mille abil saab pead kallutamata alla vaadata. Prillide põhiliseks elemendiks on joonisel kujutatud prisma, mille pealmine tahk on kaetud valgust peegeldava materjaliga. Prisma tipunurk φ on valitud selliselt, et kui prismasse sisenev valguskiir on pinnaga risti, siis on seda ka väljuv kiir. Prisma on tehtud materjalist murdumisnäitajaga $n = 1,5$.

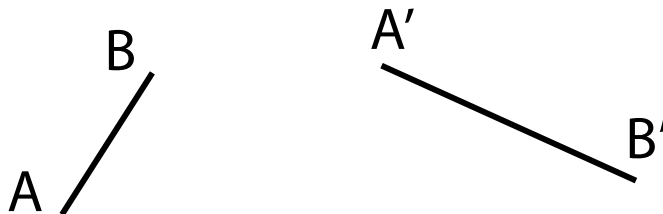


- Lõigul AD on punktid B ja C , mis jagavad selle kolmeks piirkonnaks: AB , BC ning CD . Sõltuvalt sellest, millisele piirkonnale kiir langeb, on kiire käiguks prismas kolm põhimõtteliselt erinevat võimalust. Tehke joonis kiirte käigust kõigi juhtude jaoks.
- Leidke nurga φ väärtus.
- Olgu külje AD pikkus l . Kui kaugel asuvad punktid B ja C tipust A ?
- Miks on prillides üldsegi vaja kasutada suhteliselt keerulist prismaga süsteemi, selle asemel et kiirte kallutamiseks kasutada ühte tasapeeglit?

Ü214 Lääts ★★★

Autor: Mihkel Kree, lahtine, 2015, G 5

Joonisel on kujutatud objekt AB ning sellest kumerläätses tekkinud tõeline kujutis $A'B'$. Leidke konstrueerimise teel läätses keskpunkti ning fookuse asukoht.



Ü215 Peegelpõhi ★★★

Autor: Sandra Schumann, lõppvoor, 2018, G 3

Peegelpõhjaga tühja anumasse paigutatakse koondav klaaslääts nii, et läätses optiline peatelg on risti anuma põhjaga. Läätses kaugus anuma põhjast on $l = 10$ cm. Läätses suunatakse paralleelne valgusvihk, mis koondub pärast läätses läbimist mingis punktis A . Siis valatakse anum vett täis (lääts jääb vee alla). Valgusvihk koondub endiselt samas punktis A . Leidke läätses fookuskaugus f õhus.

Klaasi murdumisnäitaja $n_k = 1,49$, vee murdumisnäitaja $n_v = 1,33$, õhu oma $n_0 = 1,0$. Murdumisnäitaja näitab, kui mitu korda on valguse kiirus vaakumis suurem kui aines.

Märkus. Läätse fookuskauguse f_v leidmiseks vees kehtib valem

$$f_v = f \cdot \frac{n_k n_v - n_0 n_v}{n_k n_0 - n_0 n_v}.$$

Ü216 Kapillaartoru ★★★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2009, G 8

Klaasist kapillaartoru on sisemise raadiusega r ja välimise raadiusega R . Millist tingimust peavad rahuldama r , R ja klaasi murdumisnäitaja n , et küljelt vaadates paistaks, et kapillaartoru seinapaksus on null?

Ü217 Fookuskaugus ★★★

Autor: Eero Vaher, piirkonnavor, 2015, G 8

Õhukese tasanõgusa läätse parem külg on hõbetatud. Kui suur on sellise optilise elemendi fookuskaugus f vasakult langeva valguse jaoks? Läätse nõgusa osa kõverusraadius on R , läätse materjali murdumisnäitaja ümbritseva keskkonna suhtes on n .



Ü218 Lääts ★★★★★

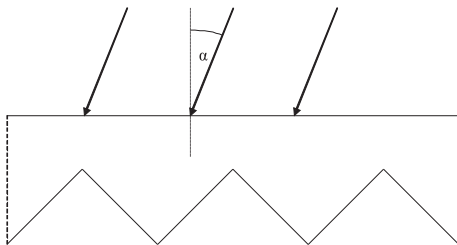
Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2007, G 9

Teritamata pliiatsi telg ühtib koondava läätse peateljega. Mitu korda on pliiatsi kujutise pikkus tema enda pikkusest erinev, kui pliiatsi ühe otsa kujutise diameetri ja pliiatsi diameetri suhe on k_1 ning teise otsa jaoks on see suhe k_2 ? Pliiatsi mõlemad otsad asuvad läätsesest fookuskaugusest suuremal kaugusel.

Ü219 Hajuti ★★★★★

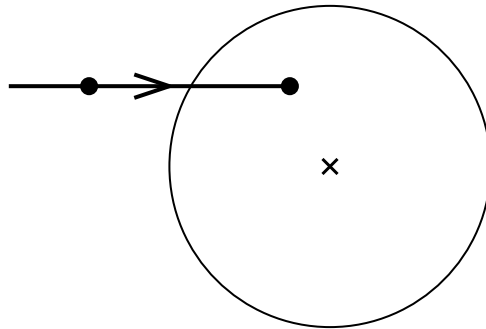
Autor: Andreas Valdmann, piirkonnavor, 2010, G 8

Mõnedes valgustites kasutatakse valguse hajutamiseks joonisel kujutatud ristlõikega pleksiklaasist plaati. Valgus langeb selle siledale poolele ja läbib hajuti vaid juhul, kui langemisnurk on suurem kriitilisest nurgast α_{kr} . Leidke nurga α_{kr} väärtus. Pleksiklaasi murdumisnäitaja $n = 1,5$. Kõik sakilise poole tahud on 45-kraadise nurga all sileda poole pinna suhtes.



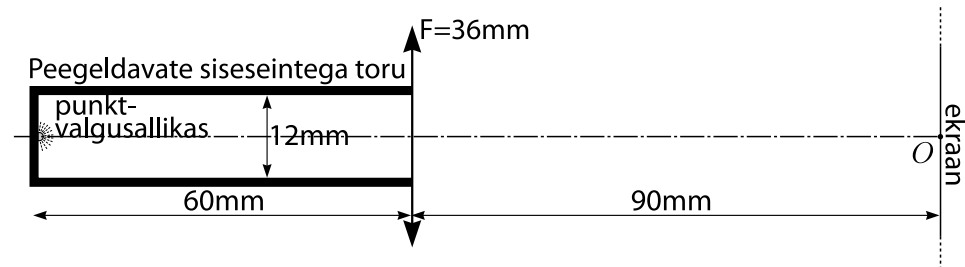
Ü220 Nõguslääts eestvaates ★★★★★ Autor: Siim Ainsaar, piirkonnavoor, 2011, G 10

Joonisel on kujutatud eestvaates nõguslääts, mille optiline peatelg on joonise tasandiga risti ja lõikub läätsesga punktis O . Antud on ka üks horisontaalne valguskiir ning selle lõikepunktid eesmise fokaaltasandi ning läätsesga (vastavalt punktid K ja L). Joonestage antud vaates lisalehel kiire edasine käik ning ta lõikepunkt tagumise fokaaltasandiga. Põhjendage lahendust.



Ü221 Toru ★★★★★ Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2012, G 6

Peegeldavate siseseintega toru põhjas on punktvalgusallikas, vt joonist. Toru sisediameeter on $d = 12 \text{ mm}$, toru pikkus $l = 60 \text{ mm}$. Vastu toru lahtist otsa on paigutatud koondav lääts fookuskaugusega $F = 36 \text{ mm}$ ning toru otsast kaugusele $L = 90 \text{ mm}$ ekraan, millele kinnitatud millimeeterpaberile on märgitud lõikepunkt optilise peateljega O . Visandage kujutis, mida võib näha ekraanil.



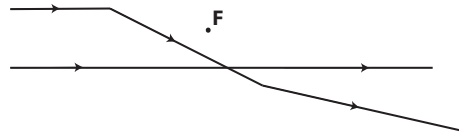
Ü222 Mikroskoop ★★★★★ Autor: Valter Kiisk, lõppvoor, 2013, G 7

Nn digitaalne mikroskoop koosneb piki optilist peatelge nihutatavast läätses (objektiivist), mis tekitab vaadeldavast esemest tõelise kujutise elektroonilise maatriksensori pinnale. Terav kujutis tekib objektiivi kahe erineva asendi korral. Vastavate joonsuurenduste suhteks määrati 25. Kummas asendis ja mitu korda on sensori pinnauhikule langev kiirgusvõimsus suurem? Võib eeldada, et läätses mõõtmel on palju väiksemad tema kaugusest objektist.

Ü223 Optiline skeem ★★★★★

Autor: Erkki Tempel, lahtine, 2014, G 7

Kõrvaloleval joonisel on kujutatud kahe algselt paralleelse kiire käik läbi kahe ühesuguse kumerläätsese, mis ei asetse paralleelselt. Läätsede fookused ühtivad ning asuvad punktis F. Konstrueerige skeemile läätsed koos optiliste peatelgedega.



Ü224 Luup ★★★★★ Autor: Valter Kiisk, lõppvoor, 2016, G 6

Kui asetada poolkera-kujuline klaaskeha (lääts) tasapinnalise poolega vastu paberit, on võimalik vähemalt läätsese keskosa ümbruses näha paberi pinna suurendatud kujutist. Kui mitmekordne kujutis saadakse, vaadeldes kauguselt, mis on hulga suurem läätsese mõõtmetest? Klaasi murdumisnäitaja $n = 1,5$.

Ü225 Gravitatsioonilääts ★★★★★ Autor: Mihkel Kree, piirkonnavoor, 2007, G 10

Üldrelatiivsusteooria ennustab, et mustast august möödumisel kaldub valguskiir gravitatsiooni tõttu kõrvale oma esialgselt liikumissuunast nurga $\varphi = 4GM/c^2r$ võrra, kus M on musta augu mass ning r trajektoori lähima punkti kaugus sellest. Sattugu must auk täpselt vaatleja ja tähe vahele, nii et kaugus vaatlejast musta auguni on L_1 ning mustast august täheni L_2 . Missugune on tähe kujutis vaatleja jaoks (põhjendage oma vastust kiirte käigu visandi abil) ning kui suur on kujutise nurkläbimõõt? Kuna vaatlejani jõudvate kiirte jaoks on r palju väiksem tähe kaugusest, võib kasutada väikeste nurkade lähendust $\sin \alpha \approx \tan \alpha \approx \alpha$.

Ü226 Nurgapeegel ★★★★★ Autor: Andreas Valdmann, lõppvoor, 2016, G 8

Jukul oli katsetamiseks kolm ruudukujulist tasa-peeglit. Ühte peeglist vaadates ja paremat silma kinni pigistades nägi ta endast joonisel kujutatud peegelpilti. Järgmisena paigutas Juku kolm peeglit sedasi, et need moodustasid kuubi kolm tahku, millel on üks ühine tipp. Sealjuures jäid peegelpinnad kuubi sisemisele poolele. Joonistage peegelpilt, mida paremat silma kinni pigistav Juku endast otse nurgapeegli nurka vaadates nägi ja põhjendage tulemust konstrueerimise teel.



Ü227 **Akvaarium ★★★★★**
lahtine, 2005, G 10

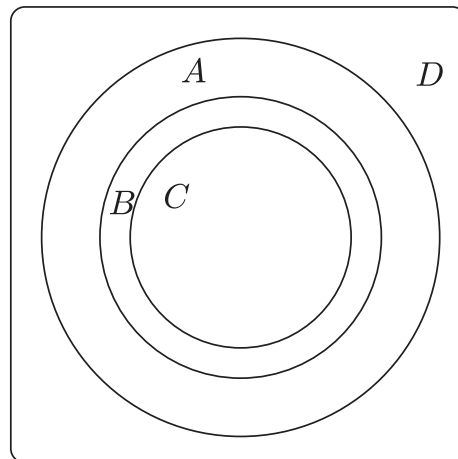
Autor: Tundmatu autor,

Leidke maksimaalne suurendus k , mille tekitab sfääriline akvaarium, kui vaadata väljastpoolt selles ujuvat kala. Suurenduse all mõistame siin kala kujutise ja tegeliku kala suuruste suhet. Vee murdumisnäitaja $n = 1,3$. Väikeste nurkade puhul kehtib ligikaudne võrdus $\sin \alpha \approx \alpha$.

Ü228 **Kuup ★★★★★**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2007, G 8

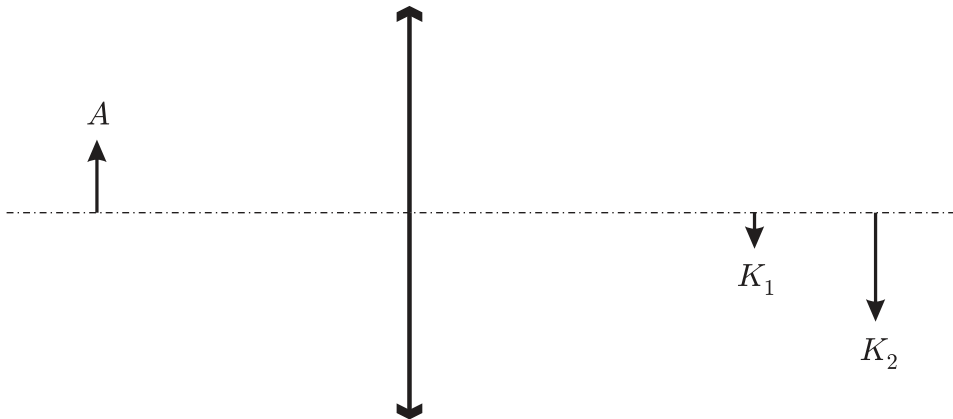
Läbipaistvast klaasist tehtud kuubis on suur kerakujuline õõnsus, mis on täidetud sinist värvi gaasiga. Kuup lebab kollaste seintega toas valgel põrandal. Juuresolev kuubi joonis on tehtud kuubi kohalt pildistatud foto põhjal, millelt on eemaldatud kõik värvid ning jäetud alles selgeltnähtavad kontuurid ja erivärviliste piirkondade eraldusjooned (joonte kujud ja mõõtmed on täpselt sellised nagu fotol). Kuubi mõõtmed lugeda hulga väiksemateks põranda mõõtmetest ning kõrgusest, millelt on tehtud joonise aluseks olnud foto. Millistele värvidele vastavad tähed A , B , C , D ? Põhjendage vastust. Leidke klaasi murdumisnäitaja.



Ü229 Nõguspeegel ★★★★★

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2007, G 9

Optiline süsteem koosneb kumerläätsesest ja nõguspeeglist, mille optilised peateljed ühtivad. Kumerpeegli asukohta pole joonisel märgitud. On teada, et objektist A tekib teisele poole läätses kaks kujutist K_1 ja K_2 . Konstrueerige kumerpeegli kõveruskeskpunkt O ja kumerpeeglis objektist A tekkinud näiv kujutis A' . Eeldada, et optilises süsteemis on nurgad piisavalt väikesed, et sfäärilisi aberratsioone ei teki.

**Ü230 Kärbes ★★★★★**

Autor: Aigar Vaigu, piirkonnavor, 2008, G 10

Kärbes on merevaigutükis, mille murdumisnäitaja on $n = 1,6$. Tüki üks pinnaosa on sfääriline kõverusraadiusega $r = 3 \text{ mm}$. Kui vaadata kärbse pead läbi selle pinnaosa, siis näib pea asuvat kõveruskeskpunkti läbival sirgel $k = 5 \text{ mm}$ sügavusel merevaigus. Kui sügaval on kärbse pea tegelikult?

Märkus. Kasutada väikeste nurkade lähendust $\tan \alpha \approx \sin \alpha \approx \alpha$, kus $\alpha \gg 1$ on väike nurk mõõdetuna radiaanides.

Ü231 Punktallikad ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2010, G 9

Juuresoleval joonisel on neli punkti, millest kaks on valgusallikad ja kaks nende tõelised kujutised, mille on tekitanud õhuke lääts. Leidke konstrueerimise teel läätses tasand ja optiline peatelg. Kui võimalusi on rohkem kui üks, siis leidke need kõik.



Ü232 Optiline süsteem ★★★★★ Autor: Andreas Valdmann, lõppvoor, 2011, G 8

Klaasist murdumisnäitajaga n on valmistatud õhuke kaksikkumer lääts, mille mõlema pinna kõverusraadius on r (lääts paksus $d \gg r$). Lääts üks pind kaetakse peegeldava metallikihiga. Leidke kumerläätselt ja nõguspeeglist tekkinud optilise süsteemi fookuskaugus.

Vihje. Fookuskauguse leidmiseks võib vaadelda optilise peatelje lähedasi kiiri, mis levivad selle suhtes väikese nurga all. Sel juhul saab rakendada väikeste nurkade valemit $\sin \alpha \approx \tan \alpha \approx \alpha$, kus α on radiaanides.

Ü233 Ring ja ellips ★★★★★ Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2015, G 7

Juuresoleval joonisel on kujutatud ring ja sellest koondava lääts poolt tekitatud kujutis. Leidke lääts keskpunkt, optiline peatelg ja fookus.



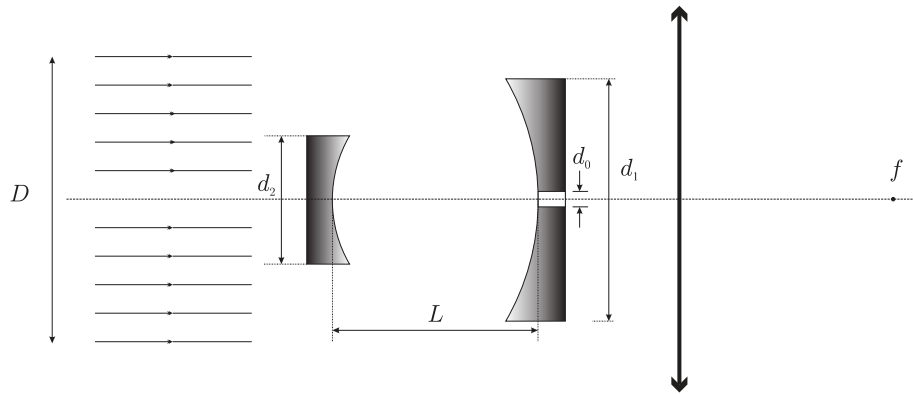
Ü234 Kaamera ★★★★★ Autor: Ardi Loot, lõppvoor, 2017, G 8

Juku pildistab virmalisi isehitatud kaameraga, mis koosneb ruudukujulisest valgustundlikust elemendist küljepikkusega $2h = 2,0$ cm ja kumerläätselt fookuskaugusega $f = 14$ cm. Jukule ei meeldi, et kaamera on niivõrd suur ja ta tahab, et kaamera oleks maksimaalselt $L_m = 7,0$ cm pikk (kaamera pikkus on kaugus valgustundlikust elemendist välimise läätseni). Selleks paigaldab ta vana kumerläätselt asemel uue kumerläätselt fookuskaugusega $f_2 = 3,0$ cm valgustundlikust elemendist kaugusele L_m . Kui suure fookuskaugusega ja kui kaugelt kumerläätselt peaks Juku süsteemi lisama ühe nõgusläätselt, et säiliks kaamera esialgne vaatenurk?

Ü235 Sähvatus ★★★★★ Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2006, G 9

Optiline süsteem koosneb kahest nõguspeeglist ja kumerläätselt (vt joonist), mille optilised peateljed ühtivad. Ringikujulise ristlõikega valgusimpulss siseneb süsteemi optilise peatelje sihis ning valgusvihtu telg ühtib sellega. Peeglite kõverusraadiused on $R_1 = 8$ m ja $R_2 = 4$ m ning peeglite vahekaugus $L = 6$ m. Peeglite läbimõõdud on $d_1 = 160$ mm ja $d_2 = 96$ mm. Kiire läbimõõt on $D = 192$ mm.

Läätse läbimõõd on suurem valgusvihu omast. Suurema peegli keskel on ava läbimõõduga $d_0 = 1 \text{ mm}$. Joonistage valguse intensiivsuse ajaline kulg kumerläätse fookuses f . Eeldage, et süsteemi saabuva impulsi kestvus $\tau \ll L/c$. Valguse kiirus $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.



Ü236 Klaasilinder ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2014, G 10

Klaasilindri välispinnal märgitakse markeriga punkt. Kui seda silindrit vaadata suurelt kauguselt (hulga suuremalt kui silindri raadius) nii, et punkt paistab läbi silindri selle sümmeetriateljel olevat, siis on lisaks näha veel kahte punkti kujutist. Üks kujutis on näha ühel ja teine teisel pool sümmeetriatelge. Kui silindrit keerata ümber oma sümmeetriatelje, siis teatud hetkel sulavad kaks punkti kujutist kokku ning kaovad ära. Kolmas kujutis jääb alles. Kui silindrit edasi keerata, siis hetkel, kui selle pöördenurk algasendi suhtes on 15° , kaob ka kolmas kujutis, nõnda et markeriga tehtud punkti polegi enam näha. Kui suur on klaasi murdumisnäitaja?

Kinemaatika

Ü237 Autod ★

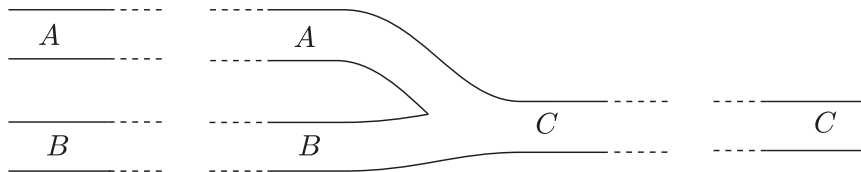
Autor: Oleg Košik, piirkonnavor, 2006, G 1

Tartu ja Tallinna vahemaa on $s = 180$ km. Jalgrattur sõidab Tartust Tallinna poole kiirusega $v_1 = 30$ km/h. Sõites luges ta kokku, et $t_0 = 5$ min jooksul tuli talle vastu $n_0 = 20$ autot. Mitu Tallinnast Tartusse sõitvat autot on korraga maanteel? Eeldada, et autod sõidavad võrdsete vahemaadega kiirusega $v_2 = 90$ km/h kogu maantee ulatuses.

Ü238 Ummik ★

Autor: Jaan Kalda, piirkonnavor, 2007, G 2

Vaatleme kahe üherajalise tee, A ja B , liitumist üherajaliseks teeks C . Tipptunni ajal on kõik kolm teed täidetud autodega; kahe naaberauto keskmise vahemaa võib lugeda kõigil kolmel teel ühesuguseks. Tee A pikkus on $L_A = 1$ km, tee B pikkus $L_B = 3$ km ning tee C pikkus $L_C = 2$ km. Autode keskmine kiirus teel A on $v_A = 3$ km/h ning tee B läbimiseks kulub autol $t_B = 36$ min. Kui kaua kulub autol jõudmaks tee A algusest tee C lõpuni?



Ü239 Auto ★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2008, G 1

Paigalseisust liikuma hakanud autol kulus teatud vahemaa läbimiseks $t = 15$ s. Millise ajaga läbis auto viimase viiendiku sellest vahemaast? Auto liikumine lugeda ühtlaselt kiirenevaks.

Ü240 Ratturid ★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2009, G 1

Kolm ratturit sõitsid linnast A linna B . Linnast A väljusid nad üheaegselt. Esimese ratturi keskmine kiirus oli $v_1 = 30$ km/h, teise ratturi oma $v_2 = 20$ km/h. Esimene rattur jõudis sihtpunkti kell 19.00, teine rattur kell 20.00 ning kolmas rattur kell 21.00. Milline oli kolmanda ratturi keskmine kiirus v_3 ?

Ü241 Rong ★

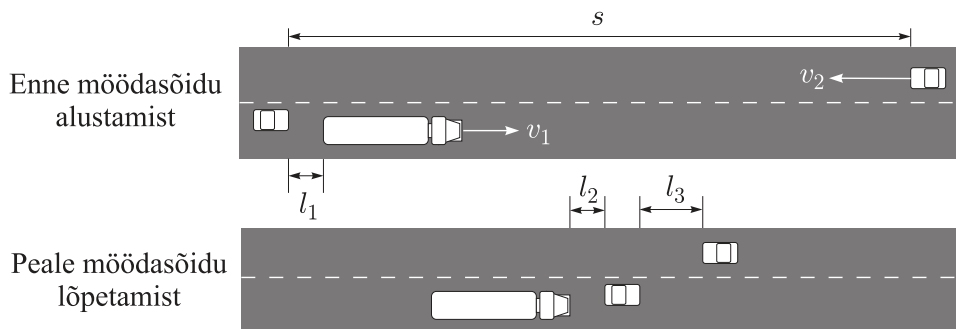
Autor: Koit Timpmann, piirkonnavor, 2013, G 1

Kaubarong läbis kahe jaama vahelise teelõigu keskmise kiirusega 36 km/h. Kogu sõiduajast $2/5$ vältel liikus rong ühtlaselt kiirenevalt, siis $2/5$ vältel liikus jääva kiirusega ning viimase $1/5$ vältel pidurdas ühtlaselt aeglustuvalt. Kui suur oli rongi maksimaalne kiirus kahe jaama vahelisel teel?

Ü242 Veok ★

Autor: Valter Kiisk, piirkonnavor, 2005, G 1

Veok sõidab maanteel ühtlase kiirusega $v_1 = 80 \text{ km/h}$. Veokile järgneb $l_1 = 10 \text{ m}$ kaugusel sõiduauto. Veoki pikkus on $L_1 = 12 \text{ m}$, sõiduauto pikkus $L_2 = 4 \text{ m}$. Sõiduauto sooritab möödasõidu ühtlase kiirendusega $a = 2 \text{ m/s}^2$. Möödasõit lõpeb siis, kui sõiduauto on veokist $l_2 = 10 \text{ m}$ kaugusel. Kui pikas minimaalses ulatuses s peaks vastassuunaline rada vaba olema ohutuks möödasõiduks? Ohutuks kauguseks vastutulevast autost loetakse $l_3 = 30 \text{ m}$. Vastutulevad autod sõidavad kiirusega $v_2 = 90 \text{ km/h}$.

**Ü243 Rongiõnnetus ★**

Autor: Oleg Košik, piirkonnavor, 2011, G 4

Kehrast Aegviidu poole sõitis kiirusega $v_1 = 63 \text{ km/h}$ kaubarong. Aegviidust hakkas sama teed pidi sõitma Kehra poole elektrirong kiirendusega $a_2 = 0,15 \text{ m/s}^2$. Kui rongide vahemaa oli $s = 2750 \text{ m}$, märkas kaubarongi vedurijuht vastusõitvat elektrirongi ning vajutas pidurile. Elektrirongi kiirus oli selleks hetkeks $v_2 = 18 \text{ km/h}$. Leidke rongide sõidukiirused vahetult kokkupõrke eel. Kaubarongi pidurduskiirendus on $a_1 = -0,1 \text{ m/s}^2$.

Ü244 Rongivile ★

Autor: Mihkel Kree, lahtine, 2015, G 1

Rong läheneb jaamale sirgjooneliselt ning muutumatu kiirusega. Vedurijuht laseb vilet kestusega $t_0 = 10 \text{ s}$, peatuses rongi ootav jaamaülem möödab vile kestuseks aga $t_1 = 9 \text{ s}$. Arvutage rongi liikumise kiirus v . Heli kiirus õhus $c = 340 \text{ m/s}$.

Ü245 Kaubarong ★

Autor: Erkki Tempel, piirkonnavor, 2015, G 1

Tavaliselt sõidab kaubarong ühtlase kiirusega $v = 72 \text{ km/h}$, kuid seekord hilines jaama $\Delta t = 5 \text{ min}$. Raudteel olid hooldetööd ning rong pidi mingi aja sõitma kiirusega $v_h = 18 \text{ km/h}$. Rongi kiirendus pidurdamisel oli $a_p = 0,2 \text{ m/s}^2$ ning kiirendamisel $a_k = 0,1 \text{ m/s}^2$. Kui pika tee sõitis rong kiirusega 18 km/h ?

Ü246 Kiirabiauto ★

Autor: Sandra Schumann, lahtine, 2017, G 1

Jukust sõitis tänaval mööda kiirabiauto. Juku kuulis, et möödumisel langes kiirabiauto sireeni toon väikese tertsi võrra. Kui kiiresti sõitis kiirabiauto? Heli kiirus õhus Juku juures oli $v_h = 343 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Eeldada, et Juku kaugus kiirabiauto sirgjoonelisest trajektoorst on tühiselt väike. Doppleri seadus annab seose sageduste ja liikumiskiiruste vahel.

$$\frac{f_v}{f_a} = \frac{v_h + v_v}{v_h + v_a},$$

kus f_v on vastuvõtja mõõdetud heli sagedus, f_a on allika tekitatud heli sagedus, v_v on heli vastuvõtja kiirus ja v_a on heliallika liikumise kiirus.

Vihje. Väike terts on muusikaline intervall, mis vastab 1,5-toonisele erinevusele heli sageduses. Üks oktav tähistab 2-kordset erinevust heli sageduses ja vastab 6 toonile. Eeldada, et toonid on jaotatud oktavis nõnda, et kui kolme helisageduse f_1, f_2, f_3 jaoks kehtib $\frac{f_2}{f_1} = \frac{f_3}{f_2}$ ja f_1 ning f_2 vahel on üks toon, siis on ka f_2 ja f_3 vahel üks toon.

Ü247 Pidurdus ★

Autor: Mihkel Rähn, piirkonnavor, 2017, G 2

Kaks autot sõidavad teineteise järel kiirustega $v = 50 \text{ km/h}$. Esimene auto pidurdab maksimaalselt, mida nähes tagumise auto juht samuti pidurdab maksimaalselt. Esimese auto pidurid rakenduvad samal hetkel, kui süttivad pidurituled. Tagumise auto juhil kulub eesmise auto piduritulede süttimisest kuni oma auto pidurite rakendumiseni $t = 1,5 \text{ s}$. Teekatte hõõrdetegur $\mu = 1$ ning raskuskiirendus $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

a) Kui suur peaks olema autodevaheline vahemaa sõidu ajal, et pidurdamisel ei toimuks tagant otsasõitu?

b) Kui autodevaheline vahemaa enne pidurdamist on $l = 5 \text{ m}$, siis kui suur on autode kiirus üksteise suhtes kokkupõrke hetkel?

Ü248 Sonar ★★

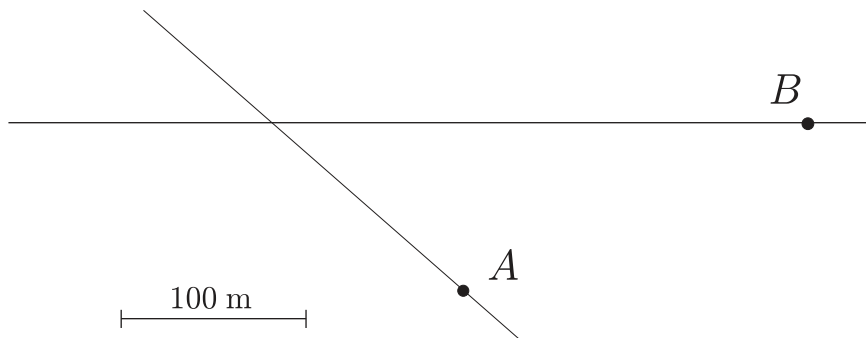
Autor: Oleg Košik, piirkonnavor, 2006, G 3

Vaatame järgmist meetodit laeva kiiruse määramiseks. Saadame rannikult sellest eemalduvale laevale ultraheli signaali sagedusega f_1 . Laevalt peegeldub signaal tagasi rannikule, kus vastuvõtja fikseerib signaali sagedusega f_2 . Teades, et heli kiirus õhus on v_h , määrake laeva kiirus v .

Ü249 Autod ★★

Autor: Jaan Kalda, piirkonnavor, 2008, G 2

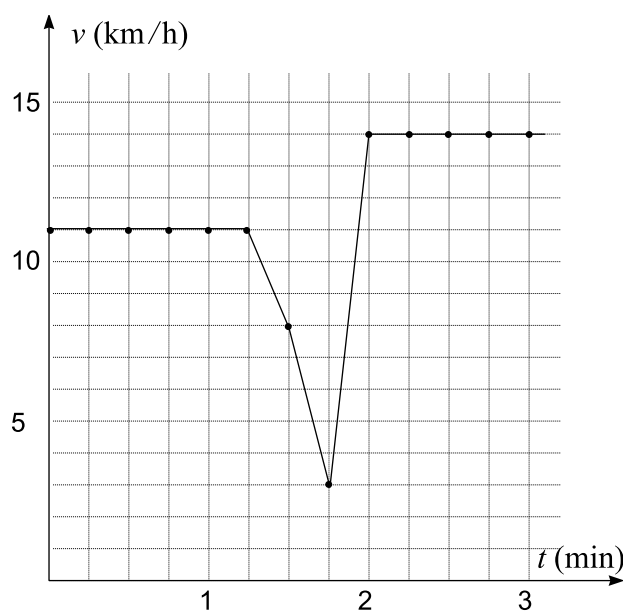
Juuresolev joonis on tehtud kõrgelt otse alla pildistatud foto põhjal, millel on jäädvustatud kaks autot (tähistatud punktidega A ja B), mis lähenevad ristmikule jäävate kiirustega $v_A = 40 \text{ km/h}$ ja $v_B = 60 \text{ km/h}$. Kasutades joonist ja sellel antud mõõtkava, leidke autode edasisel liikumisel nende vaheline minimaalne kaugus.



Ü250 GPS ★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2009, G 5

Tervisesportlane kasutab GPS seadet oma jooksutreeningu tulemuste salvestamiseks. Tema GPS seade määrab iga 15 sekundi järel jooksja täpse asukoha, mille põhjal arvutab ja salvestab GPS seade viimase 15 sekundi keskmise kiiruse. GPS esitab saadud tulemused graafikul punktidenä, mis on ühendatud sirglõikude abil. Jooksja märkas, et ketsipael oli lahti läinud. Ta peatus, sidus selle kinni ning tänu väike- sele puhkusele jätkas jooksu juba natuke suurema kiirusega, vt juuresolevat GPS-i esitatud graafikut. Kui kaua kestis peatus? Pidurdumiseks ning puhkusjärgselt kiirendamiseks kulunud aeg lugeda tühiseks; jooksu kiirus oli konstantne nii enne peatust kui ka pärast seda.



Ü251 Jalgrattur ★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2013, G 3

Poiss mõõdab jalgrattaga sõites tuule kiirust enda suhtes: kui ta sõidab piki teed ühes suunas kiirusega 10 km/h, saab ta tulemuseks 20 km/h, ning kui ta sõidab vastassuunas kiirusega 20 km/h, siis saab ta tulemuseks samuti 20 km/h. Kui kiiresti maa suhtes puhub tuul?

Ü252 Viul ★★

Autor: Jaan Toots, lõppvoor, 2014, G 2

Viiulikeelt pikkusega L kaugusel $\frac{3}{7}L$ ühest otsast alla vajutades ning lühemal osal poognaga tõmmates kõlab mingi põhisagedusega heli. Samal kaugusel $\frac{3}{7}L$ keelt ainult puudutades (alla vajutamata), on kõlav heli erinev. Milline on nende kahe põhisageduse suhe?

Ü253 Pöördlava ★★★

Autor: Taavi Pungas, piirkonnavor, 2012, G 4

Sageli on teatrilava põranda osaks pöörlev ketas. Näitleja soovib sellise ketta kõrval olevast punktist A ajaga t jõuda võimalikult kaugemale mõnda teise ketta kõrval olevasse punkti. Kus asub selline kaugeim sihtpunkt B ? Väljendage vastus nurgana $\alpha = \angle AOB$, kus O on ketta keskpunkt. Näitleja kõnnib kiirusega v , ketta pöörlemisperiood on T ja raadius r . Võite eeldada, et $\alpha < 180^\circ$.

Ü254 Pallivise ★★★

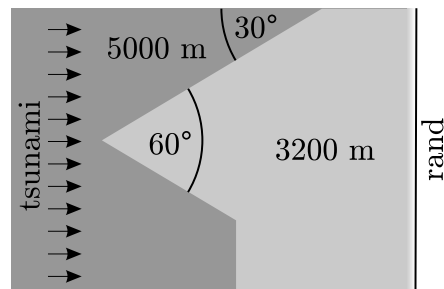
Autor: Eero Vaher, lõppvoor, 2015, G 5

Juku elab silindrikujulises kosmosejaamas, mille pöörlemine tekitab kunstliku raskusjõu. Jaama raadius on R , selle pöörlemise nurkkiirus ω . Juku viskab palli otse üles algkiirusega $v = \frac{\sqrt{3}}{3}\omega R$. Kui kaugele Jukust mööda jaama pinda pall maandub?

Ü255 Tsunami ★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2005, G 6

Joonisel on ülaltvaates toodud ookeanipõhja sügavus kodeeritud halltoonidega: tumedam hall vastab sügavamale, heledam hall madalamale veele. Ookeanipõhjas on astang, kus $h_1 = 5000$ m sügavune vesi läheb $h_2 = 3200$ m sügavuseks; ranna lähedal toimub madaldumine väga kiiresti. Rannale läheneb tsunami nii, nagu näidatud joonisel. Tsunami liikumiskiirus $v = \sqrt{gh}$, kus $g = 9,8$ m/s² ja h tähistab vee sügavust. Millisesse ranna punkti jõuab kõige kõrgem laine? Põhjendage vastust.



Ü256 Hävituslennuk ★★★

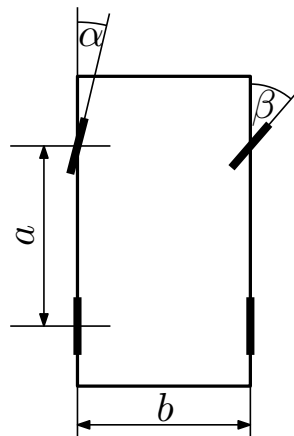
Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2011, G 7

Ühel ilusal augustipäeval käis Mati paraadil vaatamas NATO hävituslennukeid, mis tegid üle rahva peade demonstratsioonilende. Diktor ütles valjuhääldist, et lennuk lendab horisontaalselt üle rahva kiirusega $v = 1350 \text{ km/h}$. Matit huvitas aga, kui kõrgel lennuk lendab. Vajalike mõõtetulemuste saamiseks seisis ta nii, et tema ja läheneva lennukiga ühele joonele jäi täpselt üks 9 meetri pikkune elektrikpost ning Mati ise asus teise posti juures; postide vahekaugus oli 50 m. Mati käivitas oma mobiiltelefoni stopperi just siis, kui lennuk ilmus posti otsa tagant nähtavale ning peatas hetkel, kui käis kõva pauk ja hakkas kostuma lennuki müra. Ta sai stopperi näiduks 32,04 s. Kodus mõõtis ta üle ka enda silma kõrguse maapinnast: $l = 1,68 \text{ m}$. Kui kõrgel lendas lennuk? Heli kiirus õhus on umbes $u = 330 \text{ m/s}$.
Vihje. Kui lennuk lendab ülehelikiirusel, siis levib tema taga koonusekujuline löök-laine front, kusjuures koonuse tipus on lennuk ja selle koonuse telglõike tipunurk on $\alpha = 2 \arcsin\left(\frac{u}{v}\right)$.

Ü257 Rehvid ★★★

Autor: Siim Ainsaar, lõppvoor, 2012, G 5

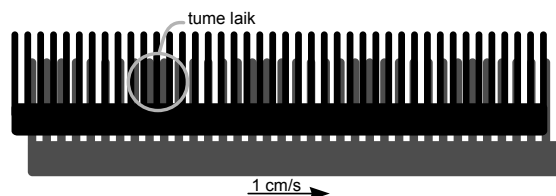
Et autorehvid kuluksid vähimal määral, tasub auto ehitada nii, et kurvis pöörduksid esirattad eri nurga võrra. Leidke selles mõttes parim parema esiratta pöördenurk β paremkurvis, kus vasaku esiratta oma on α . Rataste vahekaugus on pikkupidi a ja laiupidi b (vt joonist).



Ü258 Kammid ★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2014, G 5

Kaks kammi on asetatud üksteise taha nii, nagu näidatud joonisel. Halli kammi liigutatakse kiirusega $v = 1 \text{ cm/s}$ ning musta kammi hoitakse



paigal. Millise kiirusega ja millises suunas liiguvad tumedad laigud?

Ü259 Fotograaf ★★★★★ Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2011, G 6

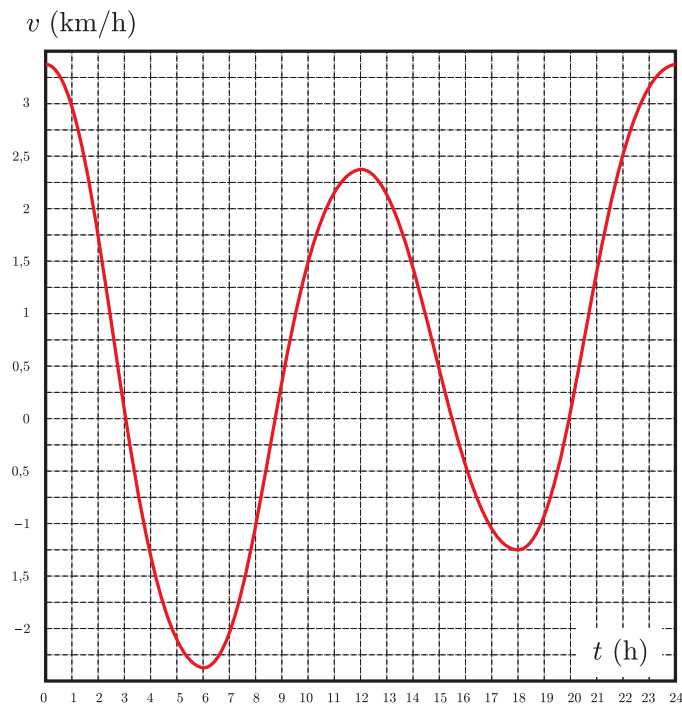
Fotograaf pildistas kõrgest joast langevat veevoolu; päikesevalguses sätendavad veepiisad venisid piltidel vertikaalseteks triipudeks. Kui fotoaparaat oli pildistamisel normaalasendis, siis olid kõik triibud pikkusega $l_1 = 120$ pikslit; kui fotoaparaat oli pildistamisel “jalad ülespidi” (st seda pöörati ümber optilise telje 180 kraadi), siis oli triipude pikkuseks $l_2 = 200$ pikslit. Kui pikad olid triibud siis, kui fotoaparaati hoiti pildistamisel “portree asendis” (st seda pöörati ümber optilise telje 90 kraadi)? Eeldada, et säriaeg ja optilise telje suund oli kõigil juhtudel üks ja sama. Kui toodud andmete põhjal pole vastus üheselt leitav, siis andke kõik võimalikud vastused.

Vihje. Fotoaparaadi põhikomponendid on objektiiv (lääts) ja katik, millest esimene tekitab digitaalsensori (või filmi) tasandile pildistatavate esemete kujutise. “Puhkeasendis” ei lange see kujutis siiski sensorile, sest katik varjab läbi objektiivi tulnud valguse ära. Päästikule vajutamisel avaneb katik lühikeseks ajavahemikuks (säriajaks): objektide kujutis langeb nüüd tõesti sensorile ning sensori iga piksel mõõdab ära kogu selle aja vältel langeva valgusenergia. Harilikult kujutab katik endast kahte “kardinat”, mis paiknevad vahetult sensori ees ja katavad selle. Alguses varjab sensorit esimene kardin, mille ülemine serv liigub päästikule vajutamisel konstantse kiirusega v ülevalt alla, avades sensori. Säriaja lõpetab teine kardin, mille alumine serv liigub samuti ülevalt alla, samasuguse kiirusega v nagu esimenegi. Kui säriaeg on hästi lühike, siis ei jõua sensor täielikult avaneda: mõlemad kardinad liiguvad koos ülevalt alla ning sensor on avatud objektiivist tulevale valgusele vaid kardinade vahelise kitsa horisontaalse riba ulatuses (kusjuures see valgusele avatud riba liigub kiirusega v ülevalt alla).

Ü260 Laev ★★★★★

Autor: Tundmatu autor, lõppvoor, 2007, G 5

Maailmas leidub jõgesid, kus vesi tõusude tõttu liigub kord ühes, kord teises suunas. Vaatleme laevaliiklust ühel sellisel jõel. Joonisel on antud vee liikumiskiiruse sõltuvus kellaajast. Positiivseks loetakse vee kiirus siis, kui see on suunatud punktist A punkti B poole. Leida optimaalne (lühimate sõiduaegadega) tunniplaan kaubalaeva regulaarseks liikumiseks üks kord päevas punktist A punkti B ja tagasi. Kaugus nende punktide vahel piki jõge on $L = 20$ km, laeva kiirus seisvas vees $v_0 = 4$ km/h.



Ü261 Müra ★★★★★

Autor: Siim Ainsaar, lahtine, 2009, G 10

Matkaja on laagripplatsil õnnelik, et elektrijaama müra temani tuuletu ilmaga nii vaikselt kostab. Veidi hiljem, tuulega, on müra veel tāsasem. Puhub põhjatuul kiirusega βc , kus c on heli kiirus paigalseisvas õhus; jaam jääb matkajast edelasse (st tuule ja jaama suundade vaheline nurk on $\alpha = 135^\circ$).

a) Kas helisagedus on sama mis tuuleta?

b) Kui tuuleta on tajutav helivõimsus P ja tuulega xP , siis kui suur on x ?

Võite lugeda, et elektrijaam on punktikujuline.

Soovitus. Uurige helifrondi levimist

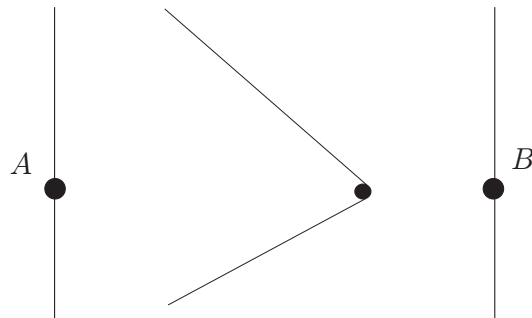
Ü262 Kaater ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2009, G 8

Mootorpaat sõidab jõe ühelt kaldalt punktist A teisele kaldale punkti B. Paadi kiirus on $u = 7 \text{ m/s}$.

a) Joonisel on näidatud paadi tekitatud veelained. Milline on jõe voolukiirus?

b) On teada, et kui vee sügavus on h , siis lained levivad kiirusega $w = \sqrt{gh}$, kus g on vabalangemise kiirendus. Kui sügav on jõgi?

**Ü263 Päikese pöörlemine ★★★★★**

Autor: Mihkel Kree, lahtine, 2014, G 10

Maa pöörleb ümber oma telje perioodiga $T_m \approx 24 \text{ h}$. Ka Päike pöörleb ümber oma telje. Selles võib veenduda näiteks päikeseplekkide liikumist jälgides, aga selles ülesandes kasutame hoopis infot Päikese ketta serval paiknevatest ekvaatori punktidest A ja B kiiratud spektrite kohta. Osutub, et kui mõõdetakse naatriumi kollase neeldumisjoone lainepikkusi, siis punktidest A ja B kiiratud spektritest saadakse selle lainepikkuse jaoks veidi erinevad väärtused. Mõõdetud lainepikkused erinevad teineteisest $\Delta\lambda = 7,8 \text{ pm} = 7,8 \cdot 10^{-12} \text{ m}$ võrra. Naatriumi kollase neeldumisjoone laboratoorne lainepikkus on $\lambda_0 = 590 \text{ nm}$, valguse kiirus $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$, Päikese raadius $r = 700\,000 \text{ km}$. Leidke Päikese ekvatoriaalpiirkonna pöörlemisperiood T_p .

Ü264 Traatrõngad ★★★★★

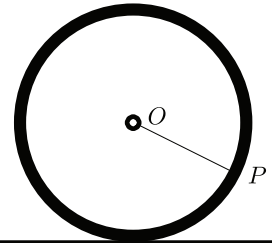
Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2014, G 9

Kaks ühesugust traatrõngast raadiusega R on üksteise vahetus läheduses, rõngaste tasandid on paralleelsed ning rõngad puudutavad üksteist punktides A ja B. Kaa-rele AB vastav kesknurk on vaadeldaval ajahetkel α . Alumine rõngas on paigal, ülemine pöörleb nurkkiirusega ω ümber punkti A läbiva ning rõngaste tasanditega risti oleva telje. Leidke rõngaste puutepunkti B kiirus antud ajahetkel.

Ü265 Kodarad ★★★★★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2011, G 10

Radiaalsete kodaratega rattast, mis veereb horisontaalsel pinnal, tehakse pilt. Fotokaamera säriaeg on mõõduka pikkusega: paigalseisvad objektid on pildil teravad, liikuvad esemed aga hägused. Muuhulgas on ratta kodarad valdavalt hägused, kuid osa kodarate teatud punktid on ometigi teravad. Võite eeldada, et kogu pilt on salvestatud samaaegselt.



a) Kopeerige juuresolev skeem lahenduslehele ning näidake konstruktsiooni teel, milline kodara OP punkt (või punktid) kujutub fotol teravalt; põhjendage vastust.

b) Konstrueerige kõver, millel asuvad ülejäänud kodarate teravalt kujutuvad punktid.

Ü266 Anemomeeter ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2016, G 9

Ultraheli anemomeeter mõõdab tuule kiirust sel teel, et määrab aja, mis kulub helisignaali allikast sensoriteni jõudmiseks. Olgu heliallikas koordinaatide alguspunktis $O = (0; 0)$ ning kolm sensorit punktides koordinaatidega $A = (0; a)$, $B = (a; 0)$ ja $C = (-a; 0)$, kus $a = 211,1$ mm (loeme lihtsustavalt, et nii heliallika kui ka sensorite mõõtmed on tühised). Anemomeetrit hoitakse nii, et kõik sensorid paiknevad ühes ja samas horisontaaltasandis ning helisignaali sensoriteni jõudmise aegadeks mõõdetakse vastavalt $t_A = 627,0$ μs , $t_B = 625,2$ μs ja $t_C = 603,4$ μs . Milline on tuule kiirus? Arvutustes võite kasutada mõistlikke lihtsustavaid lähendusi.

Ü267 Kaater ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2016, G 9

Kaater sõitis $l = 4$ km kaugusel otse lõuna suunas asuvale saarele. Alguses võeti suund esimesele meremärgile, seejärel pöörati teise suunas ning lõpuks võeti kurss otse saare peale; seega koosnes trajektoor kolmest sirglõigust. Kaatrilt mõõdeti tuule kiirust ja suunda: esimest löiku sõideti $t_1 = 3$ min ja tuule kiiruseks mõõdeti $v_1 = 15$ m/s ning tajutav suund oli otse idast, teist löiku sõideti $t_2 = 1,5$ min ja tuule kiiruseks mõõdeti $v_2 = 10$ m/s ning tajutav suund oli otse kagust (lõuna-ida vahelt), kolmandat löiku sõideti $t_3 = 1,5$ min ja tuule kiiruseks mõõdeti $v_3 = 5$ m/s ning tajutav suund oli otse edelast (lõuna-lääne vahelt). Mis oli tegelik tuule kiirus? Märkus. Eri löikudel võis paadi kiirus olla erinev, kuid iga löigu kestel hoiti konstantne; pööramiseks ja kiirendamiseks kulunud aeg oli tühine; tuule tegelik suund ja kiirus ei muutunud.

Ü268 Propeller ★★★★★

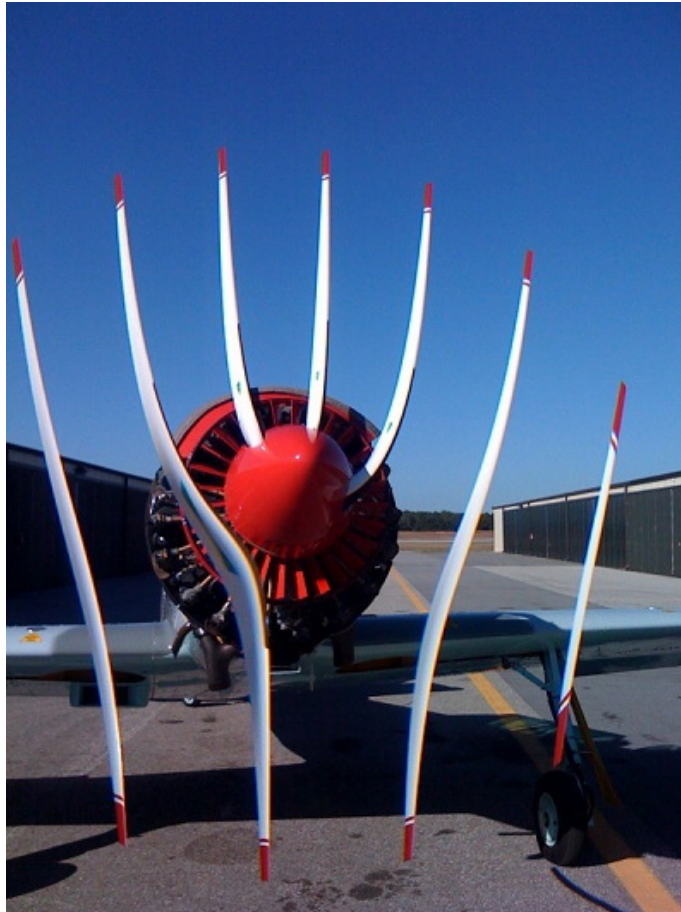
Autor: Andreas Valdmann, lõppvoor, 2010, G 10

See pilt pöörlevast lennukipropellerist on tehtud telefoni kaameraga, mis salvestab korraga ühe vertikaalse veeru pikselid. Pilt tekib vasakult paremale veergude kaupa skaneerides.

a) Mis suunas pöörleb propeller fotograafi poolt vaadatuna (päripäeva või vastupäeva)?

b) Mitu laba on propelleril?

c) Mitu pöret teeb propeller ühes minutis, kui kogu pildi tegemiseks kulunud aeg on 1/8 sekundit?



Laineoptika

Ü269 Kile ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2008, G 8

Selleks, et vähendada peegeldusi optilistelt klaasidelt, kaetakse nende pinnad õhukese läbipaistva kilega. Leida, millise paksusega peaks olema selline kile, kui klaasi murdumisnäitaja on $n_0 = 1,5$ ja kile oma $n_1 = 1,3$. Eeldada, et kile on optimeeritud risti langeva roheline valguse jaoks lainepikkusega $\lambda = 530 \text{ nm}$.

Ü270 Kunstinäitus ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2009, G 10

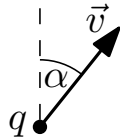
Kunstinäituse saal kujutab endast valgete seintega suurt tuba, mida valgustatakse monokromaatilise rohelise valgusega (lainepikkus $\lambda = 550 \text{ nm}$). Sellel toal on siledast klaasist põrand; klaasi alumine pind on värvitud mustaks, ülemine pind on aga kaetud õhukese läbipaistva värvitu kilega. Keset tuba seisev näituseküllastaja näeb enda ümber põrandal heledaid ja tumedaid ringikujulisi vööte, kusjuures ta ise asub nende ringide keskpunktis — sõltumata sellest, kus kohas ta parajasti seisab. Näituseküllastaja uurib asja lähemalt: kükitab ja vaatab kaugele, seejärel püüab vaadata otse alla. Maksimaalselt õnnestub tal loendada $N = 20$ heledat vööti. Kui paks on klaasi kattev kile? Klaasi murdumisnäitaja $n_0 = 1,6$, seda katva kile oma $n_1 = 1,4$.

Magnetism

Ü271 Magnetpeegel ★★

Autor: Kristian Kuppart, lahtine, 2013, G 2

Positiivse laenguga q ja kiirusega v osake liigub ristkülikukujulise riba poole nii, et tema kiirusvektor moodustab riba normaaliga nurga α . Riba paksus on d ja seal paikneb homogeenne z -telje suunaline magnetväli induksiooniga B (paberi tasandist meie poole suunatud). Millise maksimaalse langemisnurga α_{\max} korral osake veel läbib magnetvälja? On teada, et ribaga risti sellesse sisenev osake läbib riba.



Ü272 Solenoid ★★

Autor: Andres Laan, lõppvoor, 2011, G 5

Õhksüdamikuga solenoidis (pikas silindrilises poolis) on vool I . Solenoidi sisemuses liigub elektron, mille trajektoor kujutab endast sellist krüvijoont, mille keerdede arv on võrdne solenoidi keerdede arvuga. Leidke selle elektroni kiiruse teljesihiline komponent. Võib eeldada, et elektroni kiiruse teljega risti olev komponent on piisavalt väike, et kokkupõrkeid solenoidi seinaga ei toimu. Elektroni mass on m ja laeng e .

Vihje. Solenoidi sees on homogeenne magnetväli induksiooniga $B = \mu_0 n I$, kus n on solenoidi traadi keerdede arv pikkusühiku kohta, I selles olev vool ja μ_0 vaakumi magnetiline läbitavus.

Ü273 Generaator ★★

Autor: Andreas Valdmann, lahtine, 2013, G 5

Teatud tüüpi elektrigeneraatoris pöörleb väljundiga ühendatud juhtmekontuur püsimagnetitega tekitatud magnetväljas, muutes mehaanilise töö elektrienergiaks. Sellise generaatori külge oli tarbijana ühendatud elektrilamp. Esialgu aeti generaatorit ringi nurkkiirusega ω_0 , mille tulemusel eraldus lambis võimsus P_0 . Mingil hetkel suurendati generaatori pöörlemissagedust 2 korda.

a) Kui suur oli lambis eralduv võimsus pärast pöörlemissageduse suurendamist?

b) Kui suur oli generaatori ringiajamiseks tarvilik jõumoment enne ja pärast pöörlemissageduse suurendamist?

Võib eeldada, et generaator töötas kadudeta ehk kogu tema ringiajamisel tehtav töö kandus üle tarbijale. Ühtlase sagedusega pöörlemisel on generaatorit ringiajav jõumoment konstantne. Samuti võib eeldada, et lambi takistus ei sõltu teda läbiva voolu tugevusest.

Ü274 Tiirlev kuulike ★★★

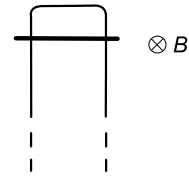
Autor: Eero Vaher, lahtine, 2013, G 6

Olgu meil positiivselt laetud kuulike massiga m . On teada, et kui kuulike liiguks kiirusega v sellega ristuvast magnetväljast induktsiooniga B , siis oleks selle trajektooriga ringjoon raadiusega r . Kui suure laenguga q peab olema teine sama massiga kuulike, et esimene kuulike liiguks teise kuulikese elektriväljast sama kiirusega samal trajektooriga? Eeldage, et kahe kuulikese süsteemile ei mõju väliseid jõude. Kõiki liikumisi vaadeldakse laboratoorses taustsüsteemis.

Ü275 Langev takisti ★★★

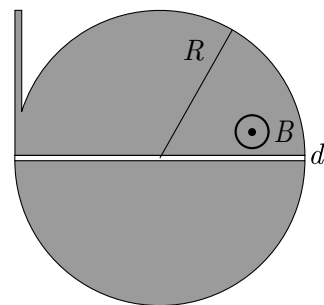
Autor: Andres Laan, piirkonnavor, 2011, G 8

Joonisel kujutatud Maa gravitatsiooniväljas vertikaalselt paiknevale juhtivale traadile kinnitati takisti nõndaviisi, et see võib piki traati vabalt libiseda. Teades, et magnetinduktsioon oli B ja traadi harude vaheline kaugus d , leidke, millise lõppkiirusega hakkab takisti langema. Takisti mass on m ja takistus R .



Ü276 Tsüklotron ★★★ Autor: Kristian Kuppert, piirkonnavor, 2018, G 10

Vaatleme tsüklotroni – teatud tüüpi osakestekii- rendi toimimist. Tsüklotron koosneb silindrikujulisest piirkonnast raadiusega R , kus on homogeenne magnetväli tugevusega B , ning õhukesest ribakujulisest piirkonnast laiusel d , kus on homogeenne ribaga risti olev elektrivälja tugevusega E . Elektrivälja suunda muudetakse perioodiliselt vastassuunaliseks nii, et osakeste igal riba läbimisel on elektrivälja suund osakeste kiirusvektoriga sama-suunaline. Samuti on tsüklotroni ühes ääres osakeste tsüklotronist väljumiseks kitsas kanal. Alus- tagu osakesed liiguvad tsüklotroni keskelt tühiselt väikse algkiirusega. Mitu täisringi n teevad osakesed tsüklotronis enne väljumist? Osakeste laeng on q ja mass m . Eeldada, et $n \gg 1$.



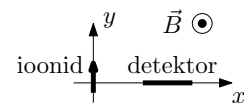
Ü277 Laengud ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2011, G 6

Kaks osakest laenguga q stardivad koordinaatide alguspunktist kiirusega v : üks x -telje sihis, teine y -telje sihis. Liikumine toimub homogeen- ses z -telje sihilises magnetväljas induktsiooniga B ; osakeste omavahelise elektrostaatilise vastasmõjuga ärge arvestage. Milline on osakeste vahelise kauguse maksimaalväärtus l_{\max} edasise liikumise käigus?

Ü278 Mass-spektromeeter ★★★★★ Autor: Kristian Kuppert, piirkonnavor, 2013, G 10

Laboris oli uurimiseks hulk mingit atomaarset ainet, mille molaarmassiks mõõdeti μ_1 . Ühekordselt ioniseeritud ainet (iga aatom oli kaotanud ühe elektroni) kiirendati elektriväljas potentsiaalide vahel U ja suunati magnetvälja induktsiooniga B (vaadake joonist). Magnetinduktsioon oli joonise tasandiga risti, ioonide algkiirus oli y -telje suunaline, magnetväli asus piirkonnas $y > 0$ ning aine sisenes magnetvälja punktis $(0, 0, 0)$.



Täheldati, et väike kogus ainet langes x -teljel asuvale detektorile kauguse d võrra kaugemal kohast, kuhu langes põhiosa ainek. Sellest järeldati, et aine hulgas oli väike osa isotoopi erineva molaarmassiga. Leidke selle isotoobi molaarmass μ_2 . Avogadro arv on N_A ja elektroni laeng on $-e$.

Ü279 Magnetväli ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, piirkonnavor, 2015, G 9

Piirkonnas $0 < y < a$ on z -teljega paralleelne homogeenne magnetväli induktiooniga B ; piirkondades $y < 0$ ja $y > a$ magnetväli puudub. Osake massiga m ja laenguga q siseneb kiirusega v magnetväljaga piirkonda paralleelselt y -teljega üle joone $y = 0$. Visandage osakese kiirusvektori ja y -telje vaheline nurk pärast seda, kui osake on piirkonnast $0 < y < a$ väljunud funktsioonina kiirusest v .

Ü280 Traat ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2007, G 10

Horizontaalsel libedal pinnal on fikseeritud kaks klemmi, mille vahekaugus a on väiksem neid ühendava hästi painduva sõlmevaba traadi pikkusest L . Süsteem asub vertikaalses homogeeneses magnetväljas tugevusega B , traati läbib vool tugevusega I . Joonistage, millise kuju võtab traat. Kirjutage välja võrrandid, kust saab leida mehaanilise pinge T traadis. Leidke selle väärtus eeldusel, et $L \gg a$.

Ü281 Pool ★★★★★

Autor: Siim Ainsaar, lõppvoor, 2008, G 10

Libedale klaaspulgale on pehmest traadist tihedasti keritud solenoid pikkusega ℓ , keerdude arvuga N ja ristlõikepindalaga S . Selles hoitakse konstantset voolu tugevusega I . Millist jõudu F oleks vaja rakendada pooli otstele südamikule sihis, et venitada seda pisutki pikemaks, kui kehtiks eeldus, et venitamisel suurenevad kõigi naaberkeerdude vahekaugused võrdset. Võite lugeda, et klaasi magnetiline läbitavus $\mu = 1$.

Vihje. Tiheda solenoidi südamikus on homogeenne magnetinduktsioon $B = \mu_0 IN/\ell$.

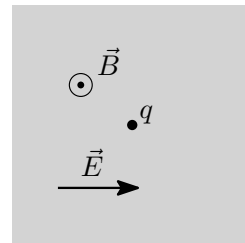
Ü282 Laeng ★★★★★

Autor: Oleg Košik, lahtine, 2010, G 8

Ruudukujulise ristlõikega ruumipiirkond on täidetud homogeenne magnetväljaga B ning selle keskel asub osake massiga m ja laenguga q , mis on alghetkel paigal. Alates alghetkest iga ajavahemiku $T = \frac{\pi m}{qB}$ tagant lülitub selles piirkonnas lühiajaliselt sisse elektriväli E (kestusega $\tau \ll T$), mis on suunatud risti magnetväljaga. Elektriväli võib muutuda kahes režiimis: (i) olles iga kord suunatud joonisel näidatud suunas; (ii) olles suunatud vaheldumisi kord joonisel näidatud suunas, kord vastupidises suunas.

a) Skitseerige osakese trajektoor mõlema režiimi korral.

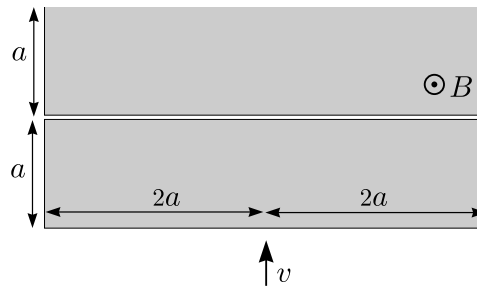
b) Kumba režiimi korral väljub osake magnetväljaga piirkonnast kiiremini? Mitu korda kiiremini? Eeldage, et väljumisaeg on mõlemal juhul palju suurem kui T . Põhjendage vastust.



Ü283 Magnetväli ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, piirkonnavor, 2010, G 9

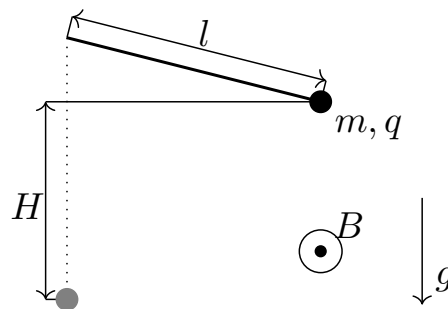
Magnetväli induksiooniga B täidab joonisel kujutatud mõõtmetega risttahukakujulist ruumpiirkonda, välja arvatud väga kitsas magnetväljata pilus. Joonisel näidatud suunas lendab kiirusega v elektron (massiga m ja laenguga e). Arvutage ja visandage graafikul, kuidas sõltub elektroni kõrvalekaldenurk (st nurk tema kiirusvektorite vahel enne magnetvälja sisenemist ja peale sealt lõplikku väljumist) elektroni algiirusest v ; piirduge väärtustega $v < 2aBe/m$.



Ü284 Laetud pendel ★★★★★

Autor: Eero Vaher, lahtine, 2015, G 10

Väike laetud kuulike massiga m ja laenguga q ripub venimatu pikkusega l niidi otsas magnetväljas induksiooniga B . Kuulike viiakse niiti sirgena hoides kõrgusele $H = \frac{7}{8}l$ ning lastakse siis lahti. Raskuskiirendus on g ning magnetvälja suund on risti pendli võnketasandiga. Samuti on teada, et kehtib $q^2 B^2 l = \frac{3}{4} m^2 g$. Milline on kuulikese trajektoor?



Ü285 Silinder ★★★★★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2007, G 10

Pika ühtlase mittejuhtiva silindri pinnal on ühtlaselt jaotatud laeng pindtihedusega σ . Alguses asub silinder välises homogeenses magnetväljas induksiooniga B , mis on suunatud piki silindri telge; silinder on paigal. Seejärel lülitatakse magnetväli välja. Kui suure pöörlemise nurkkiiruse omandab selle tulemusel silinder? Silindri aine tihedus on ρ , silindri raadius on r .

Märkus. Pöörleva silindri poolt tekitatav magnetväli lugeda tühiselt väikseks võrreldes välise väljaga

Ü286 Elektronid ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2017, G 10

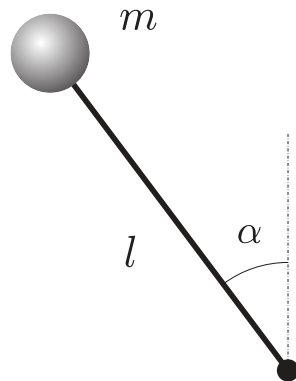
Ruumipiirkonnas $x > -a$ ($a > 0$) on homogeenne z -telje sihiline magnetväli induksiooniga B . Koordinaatide alguspunktis on elektronide allikas, mis kiirgab elektrone võrdsel arvul kõikidesse suundadesse (üle ruuminurga 4π). Kõikide elektronide kiirus on v . Tasandis $x = -a$ on ekraan. Kui elektronid laenguga e ja massiga m põrkuvad vastu ekraani, siis on kokkupõrkepunktis näha helendust. Leidke helenduva laigu y -telje sihiline läbimõõt tasandil $z = 0$ eeldusel, et vähemalt osa elektronidest jõuavad ekraanini. Samal tasandil leida, kus kohas on laigu helenduse intensiivsus kõige suurem. Milline on selle laigu z -telje sihiline pikkus tasandil $y = 0$?

Staatika

Ü287 Pendel ★

Autor: Mihkel Heidelberg, piirkonnavoor, 2008, G 1

Otsast kinnitatud varras saab pöörelda ümber horisontaaltelje ühes tasandis. Varda otsa on kinnitatud koormis massiga m . Varda pikkus on l . Varda kinnitusele mõjub hõõrdest tingitud pidurdav jõumoment M . Millistes nurkade vahemikes võib olla varras paigal (vt joonist)? Arvestada, et $mgl > M$.



Ü288 Toru ★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2007, G 2

Kaks inimest kannavad toru massiga $m = 80 \text{ kg}$ ja pikkusega $l = 5 \text{ m}$. Esimene inimene hoiab toru kaugusel $a = 1 \text{ m}$ toru otsast, teine aga hoiab toru teist otsa. Leida jõud, mida toru avaldab igale inimesele.

Ü289 Nürinenud käärid ★

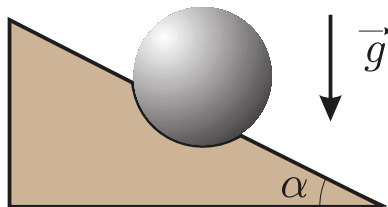
Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2009, G 1

Juku asus hekikäaridega õunapuult jämedat kuivanud oksa lõikama. Et aga käärid olid juba ammu nürinenud, polnud neist mingit abi. Enamgi veel, oks hakkas kääride kokkuvajutamise ajal terade vahel lausa libisema. Libisemine peatus hetkel, mil terade vaheline nurk oli kahanenud α -ni. Kui suur oli hõõrdetegur oksa ja nürinenud lõiketera vahel?

Ü290 Kuul ★★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2005, G 3

Metallist kuul asetseb lauaaugus, mille sügavus on 2 korda väiksem kuuli raadiusest (vt joonist). Kui suure laua kaldenurga α puhul kuul kukub august välja?



Ü291 Katus ★★

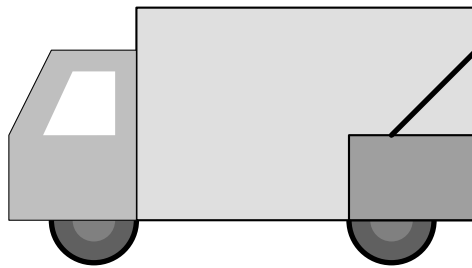
Autor: Ott Krikmann, piirkonnavor, 2005, G 2

Ühtlase lumekihiga kaetud katus on horisondi suhtes kaldu $\alpha = 40^\circ$ nurga all. Katuse on ristküliku kujuline ja laius harjast räästani mööda katuse pinda on L . Katuse ja lume vaheline hõõrdetegur on $\mu = 1$. Katuse harjast hakkab lumekihi ja katuse vahele voolama vesi, mis muudab märja katuse ja lumekihi vahelise hõõrdeteguri nulliks. Kui vesi jõuab katuseharjast kaugusele l , hakkab lumekiht alla libisema. Leidke suhe l/L .

Ü292 Kast kaubikus ★★

Autor: Oleg Košik, lõppvoor, 2009, G 2

Kast massiga $m = 15 \text{ kg}$ on kinnitatud kaubiku tagaseina külge nööriaga. Leida nööri pinge minimaalne võimalik väärtus äkkpidurduse ajal, kui kiirusega $v_0 = 45 \text{ km/h}$ sõitev kaubik jääb seisma ajaga $t = 5 \text{ s}$. Hõõrdetegur kasti aluse ja kaubiku põranda vahel $\mu = 0,2$, nurk nööri ja kaubiku tagaseina vahel $\alpha = 45^\circ$. Lugeda, et pidurdamine oli ühtlane ja kast püsis kogu aeg paigal.

**Ü293 Liivahunnik ★★**

Autor: Roland Matt, piirkonnavor, 2011, G 5

Millisele pindalale on võimalik mahutada koonusekujuline liivahunnik, kui liiva ruumala on $V = 50 \text{ m}^3$ ja libisevate liivakihtide vaheline efektiivne hõõrdetegur $\mu = 0,4$? Liivahunniku ja aluspinna hõõrdeteguri võib lugeda väga suureks.

Ü294 Tormituul ★★

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2011, G 3

Vaatleme tugeva külgtuule kätte jäänud veoautot lihtsustatult homogeense risttahukana. Auto laius on $a = 2 \text{ m}$, kõrgus $b = 3 \text{ m}$, pikkus $c = 5 \text{ m}$. Missugune peaks olema hõõrdetegur rataste ja maapinna vahel, et piisavalt tugev külgtuul saaks auto tuulepoolsed rattad maast lahti kergitada?

Ü295 Rõngas ★★

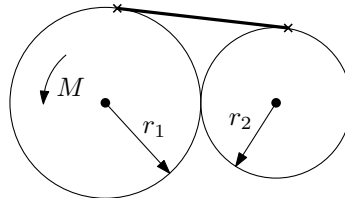
Autor: Taavi Pungas, piirkonnavor, 2014, G 6

Lae külge on nööriaga, mille pikkus on L , kinnitatud kerge plastmassrõngas raadiussega R , mille küljes on omakorda raske metallist mutter. Mutrit saab mööda rõngast libistada. Rõnga ja mutri vaheline hõõrdetegur on μ . Juku tahab mutrit mööda rõngast nihutades saavutada olukorda, kus mutri ja lae vahekaugus h oleks võimalikult väike, aga süsteem püsiks veel ilma välise sekkumiseta tasakaalus. Leidke vähim vahekaugus h_{\min} , mille Juku võib saavutada. Eeldage, et rõnga mass on mutri omaga võrreldes tühiselt väike.

Ü296 **Hammasrattad** ★★★

Autor: Siim Ainsaar, lõppvoor, 2010, G 4

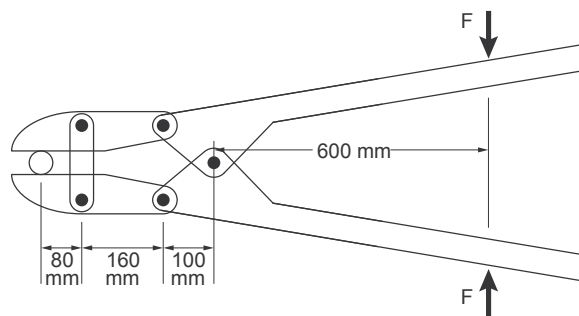
Fikseeritud telgedega hammasrattad raadiustega r_1 ja r_2 hambuvad ja on ühendatud venimatu nööri, mis on mõlemale puutujaks. Esimest ratast pööratakse jõumomendiga M . Kui suur on nööri pinge T ?



Ü297 **Poldilõikur** ★★★

Autor: Mihkel Rähn, piirkonnavor, 2015, G 7

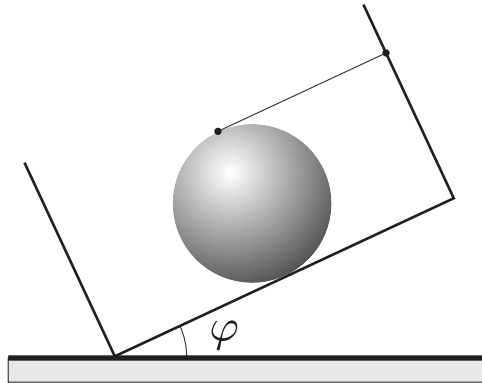
Leida, kui suurt jõudu avaldab poldilõikuri tera poldile (vt joonis), kui käepidemetele avaldatud jõud on $F = 90\text{ N}$.



Ü298 Kuul ★★★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2006, G 7

Kasti tasasel põhjal asub kuul. Kasti põhi asub nurga all horisontaalsuuna suhtes. Kuuli hoiab tasakaalus kasti seina külge kinnitatud niit, mis on paralleelne kasti põhjaga (vt joonist). Kui suure maksimaalse nurga φ võrra saab kasti kallutada, et kuul oleks veel tasakaalus? Hõõrdetegur kuuli ja kasti vahel on μ .

**Ü299 Toru ★★★**

Autor: Aigar Vaigu, lõppvoor, 2010, G 5

Kareda horisontaalselt kinnitatud toru (raadius R) peal tasakaalustatakse risttahukakujulist prussi. Leidke prussi paksus L , mille korral prussi asend torul on stabiilne.

Märkus. Võivad olla kasulikud väikeste nurkade korral kehtivad lähendused $\sin \alpha \approx \alpha$ ja $\cos \alpha \approx 1 - \alpha^2/2$, kus nurgad on radiaanides.

Ü300 Klotsid ★★★

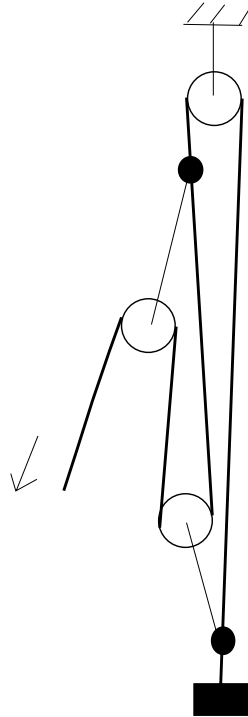
Autor: Mihkel Rähn, piirkonnavor, 2014, G 7

Horisontaalsel laual asuva klotsi massiga m_1 peale on asetatud teine klots massiga m_2 . Kahe klotsi vaheline seisuhõõrdetegur on μ_2 . Alumise klotsi ja laua vaheline liugehõõrdetegur on μ_1 . Leidke maksimaalne horisontaalne jõud F , millega võib alumist klotsi tõmmata, ilma et ülemine klots libiseks.

Ü301 Polüspast ★★★

Autor: Mihkel Rähn, lõppvoor, 2014, G 6

Jäälõhesse kukkunud alpinisti väljatõmbamiseks on käepärastest vahenditest (kolm plokki ja nõorijupid) koostatud polüspast. Lihtsustatud joonisel on jämeda joonega märgitud põhikõis, mille ühes otsas on kukkunu ning teisest otsast vinnatakse. Plokid on peene joonega kujutatud nõori abil kinnitatud mittelibiseva sõlmega (joonisel täidetud ring) põhikõie külge. Leidke polüspasti ülekandetegur nii hõõrdumist arvestamata kui ka eeldusel, et hõõrdumine vähendab jõuülekannet igal plokil 35%. Eeldage, et kõik jõud on vertikaalsed.



Ü302 Kelk ★★★

Autor: Andreas Valdmann, piirkonnavor, 2018, G 9

Juku läks sõpradega kelgutama. Teel tagasi istusid Juku kaks sõpra kelgule ja Juku üritas kelku horisontaalsel lumisel teel enda järel vedada. Kui suur on minimaalne kelgunööri nurk maapinnaga, mille korral on Jukul võimalik kelk liikuma tõmmata? Juku mass $m_1 = 60 \text{ kg}$ ja hõõrdetegur Juku saabaste ning lume vahel $\mu_1 = 0,30$. Kelgu mass koos Juku sõpradega $m_2 = 110 \text{ kg}$ ja hõõrdetegur kelgu ning lume vahel $\mu_2 = 0,20$.

Ü303 Kuubik ★★★★★

Autor: Riho Taba, piirkonnavor, 2007, G 9

Kuubik massiga $m = 10 \text{ kg}$ ning küljepikkusega $a = 0,1 \text{ m}$ lebab laual. Laua ja kuubiku vaheline hõõrdetegur on $\mu = 0,5$. Kas kuubikut on võimalik käega teisele küljele ajada, avaldades vaid jõudu kuni $F = 40 \text{ N}$? Eeldada, et hõõrdetegur käe ja kuubiku vahel on väga suur ehk käsi ei libise. Raskusjõu kiirendus on $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

Ü304 Kuulid ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2009, G 9

Kolm ühesuguse raadiusega kuuli A , B ja C on ühendatud kergete varraste abil võrdkülgseks kolmnurgaks ABC , mis lebab siledal (kuid nullist erineva hõõrdeteguriga) horisontaalpinnal. Kuuli C lükatakse hästi aeglaselt nii, et selle kiirusvektor on kogu aeg risti sirgega AC . Kui kuul A on piisavalt raske (st masside suhe M_A/M_B on piisavalt suur), siis jääb kuul A paigale. Millise suhte M_A/M_B puhul hakkab kuul A libisema?

Ü305 Rõngas ★★★★★

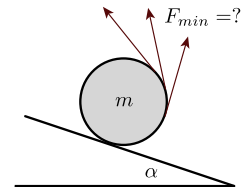
Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2011, G 7

Ebaühtlase massijaotusega traadist on tehtud rõngas, mis kujutab endast ringi raadiusega R . Selle rõnga massikeske asub ringi keskpunktist kaugusel $R/2$. Rõngas asetatakse horisontaalsele võllile rippuma. Milline peab olema rõnga ja võlli vaheline hõõrdetegur μ , et võlli aeglasel pöörlemisel rõngas võllil ei libiseks?

Ü306 Niidirull ★★★★★

Autor: Mihkel Kree, lahtine, 2013, G 8

Silinder massiga m , millele on keritud õhuke niit, asetatakse kaldpinnale nurgaga α . Millise minimaalse jõuga F_{\min} tuleb nõõrist hoida, et silinder paigale jääks (vt joonist)? Hõõrdetegur pinna ja silindri vahel on nii suur, et libisemist ei toimu.

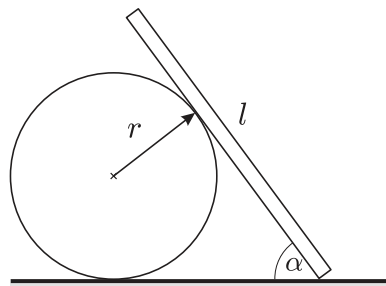
**Ü307 Jalgrattur ★★★★★** Autor: Andres Põldaru, lahtine, 2014, G 8

Jalgrattur sõidab alla ühtlase kallakuga nõlvast. Kui ta vajutab pidureid täpselt nii kõvasti, et tagumine ratas on peaaegu õhku tõusmas, siis tema kiirus mäest alla sõites ei muutu. Jalgratturist ja rattast koosneva süsteemi massikeske asub täpselt kahe ratta vahel kaugusel h maapinnast, rataste telgede vahekaugus on d . Kui suur on nõlva ja horisontaalsihi vaheline nurk α ? Kui suur peab olema ratta ja kaldpinna vaheline hõõrdetegur μ , et jalgrattur saaks kirjeldatud moel pidurdada?

Ü308 Varras ★★★★★

Autor: Siim Ainsaar, lõppvoor, 2008, G 9

Peenike homogeenne varras toetub ühe otsaga vastu pörandat (hõõrdetegur varda otsa ja pörandavahele on μ) ning küljega vastu libedat horisontaalset silindrit (hõõrdetegur on tühiselt väike), vt joonist. Silinder on liikumatult kinnitatud pörandava külge, varras on risti silindri teljega ning moodustab pörandava nurga α . Millise varda pikkuse l korral jääb varras sellisesse asendisse püsima?

**Ü309 Konn ★★★★★**

Autor: Taavi Pungas, lahtine, 2010, G 9

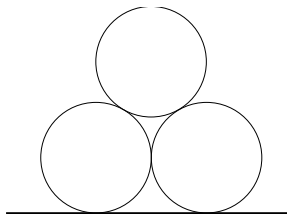
Väike puukonn suudab ronida mööda seinu ja lageseid, luues enda ja seina vahele seinaga risti oleva tõmbejõu (nt iminappade tekitatud vaakumi-ga) ning vältides libisemist selle tagajärjel tekkiva hõõrdejõu abil. Millise nurga all maapinna suhtes peab olema sein, et tal oleks end kõige raskem paigal hoida (mil libisemise vältimiseks vajalik seinaga risti olev jõud on maksimaalne)? Hõõrdetegur seina ja konna vahel on μ .



Ü310 Torud ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, piirkonnavoort, 2010, G 10

Põrandale asetatakse kõrvuti kaks ühesugust silindrilist toru — paralleelselt ja küljelt üksteist puutuvana. Kolmas samasugune toru asetatakse nende peale — samuti paralleelselt, nõnda et see toetub kahele alumisele. Milliseid tingimusi peavad rahuldama hõõrdetegur μ toru ja põranda vahel ning hõõrdetegur k kahe toru vahel selleks, et peamine toru kahte alumist üksteisest eemale ei vajutaks?

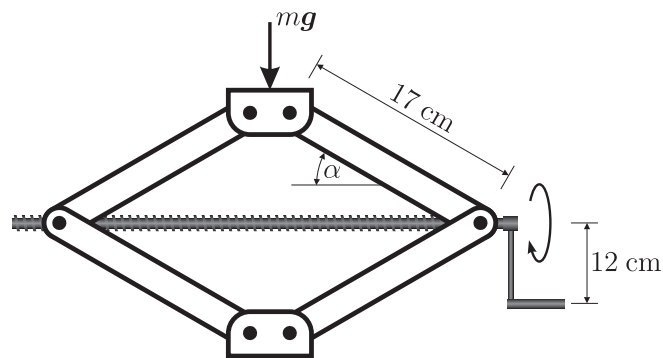


Ü311 Tungraud ★★★★★

Autor: Valter Kiisk, lõppvoort, 2011, G 10

Joonisel on kujutatud lihtsa konstruktsiooniga tungraud, mille kerme samm on 3 mm. Tungrauale surub auto jõuga $F = 5 \text{ kN}$. Vaatleme hetke, millal $\alpha = 40^\circ$. Tungraua mõõtmeid vaadake jooniselt.

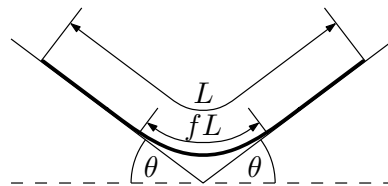
- a) Kui suure jõuga tuleb auto tõstmiseks vända käepidemele mõjuda, kui jätta arvestamata hõõrdumine kõigi libisevate pindade vahel?
- b) Kui hõõre oleks ka tegelikult tühiselt väike, siis ei püsiks tungraud üleskeeratud asendis: niipea, kui käepidemest lahti lasta, hakkaks see auto raskuse mõjul pöörlema ja auto vajuks taas alla. Vastake eelmisele küsimusele eeldusel, et hõõrdetegur on parajasti nii suur (st mitte suurem, kui hädapärast vaja), et tungraud jääks üleskeeratud asendisse püsima.



Ü312 Nöör rennis ★★★★★

Autor: Stanislav Zavjalov, lahtine, 2012, G 9

Kaks plaati moodustavad V-kujulise horisontaalse renni. Mõlemad plaadid on horisontaaltasapinna suhtes nurga θ all. Rennis on jupp ühtlase massijaotusega nööri pikkusega L , mis asub tervikuna renniga ristuv tasandis nii, et mõlema plaadiga puutub kokku sama palju nööri. Renni põhja kohal ei toetu nöör enam pikkuse fL ulatuses plaatidele. Leidke f , kui nöör on libisemise piiril. Hõõrdetegur nööri ja plaatide vahel on $\mu = 1$.



Ü313 Katus ★★★★★

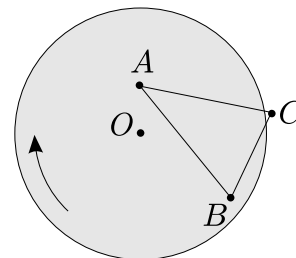
Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2017, G 9

Kaks jäika traadijuppi pikkusega L on ühendatud otsapidi (nt niidiga seotud) nii, et nende otspunktid on kontaktis ja nende vaheline nurk saab takistuseta muutuda, moodustades V-kujulise figuuri. See traadist moodustis asetatakse horisontaalse libedapinnalise silindri peale nõnda, et tasakaaluasendis moodustub traadist "katus" (tagurpidi "V") tipunurgaga α . Massijaotus traadis on ühtlane, hõõre traadi ja silindri vahel puudub. a) Milline on silindri raadius R ? b) Milline võrratus peab olema rahuldatud, et see asend oleks stabiilne (uurida stabiilsust vaid "katuse" kui terviku pöördumise suhtes, eeldades et traatidevaheline nurk ei muutu)?

Ü314 Platvorm ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2005, G 10

Siledas põrandas on pöörlev ringikujuline platvorm (joonisel pealtvaates, hall), mis on samast materjalist nagu põrandki (joonisel valge). Põranda ja platvormi ülemine pind on samal horisontaaltasandil. Kolm ühesugust keha ühendatakse kergete varraste abil kolmnurgaks ning asetatakse sedasi, et kaks keha asuvad platvormil punktides A ja B (vt joonist). Vardad ei puuduta ei põrandat, ega platvormi.

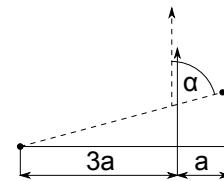


- a) Kui kolmas keha lebaks pörandal punktis C , kas siis kolmnurk hakkaks pörand suhtes liikuma või jääks paigale? Põhjendage vastust.
- b) Märkige joonisel selline punktihulk X , kus võiks asuda kolmas keha nii, et kolmnurk jääks pörand suhtes paigale.
- Märkus.* Kolmnurga külgede AC ja BC pikkusi võib muuta. Seega, kui kolmas keha asub punktis $D \in X$, siis üldjuhul $|AD| \neq |AC|$ ja $|BD| \neq |BC|$.

Ü315 Niidiga hantel ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2015, G 9

Horisontaalpinnal lebab hantel, mis koosneb kaalutust vardast pikkusega $l = 4a$ ning selle otstele kinnitatud kahest ühesuguse massi ja hõõrdeteguriga väikesest klotsist. Varda külge kaugusele a ühest klotsist on seotud pikk niit. Algul on niidi suund horisontaalne ja risti vardaga. Niiti aeglaselt tõmmates hakkab hantel pöörduma, sest alguses nihkub vaid üks klots. Milline on nurk α varda ja niidi vahel siis, kui ka teine klots nihkuma hakkab?



Taevamehaanika

Ü316 Satelliit ★

Autor: Mihkel Pajusalu, piirkonnavor, 2011, G 2

Satelliit tiirleb ringikujulisel orbiidil (raadiusega $r = 7000$ km) ümber maakera, kusjuures satelliidi orbiit on samas tasapinnas Maa orbiidiga ümber Päikese. Kui suure osa ajast veedab satelliit keskmiselt Maa varjus? Maa läbimõõt on $R = 6378$ km. Päikeselt tulevad kiired võib lugeda paralleelseteks ja Maa liikumise ühe satelliidi orbiiditaalperioodi jooksul tühiseks.

Ü317 Väike prints ★

Autor: Urmo Visk, piirkonnavor, 2009, G 1

Väike Prints elab sfäärilisel asteroidil B-612. Jalutades märkas väike prints, et mida kiiremini ta kõnnib, seda kergemaks ta muutub. Kui väike prints jooksis piki asteroidi ekvaatorit kiirusega $v = 6$ m/s, siis muutus ta kaalutuks ja hakkas asteroidi pinna kohal hõljuma. Kui suur on asteroidi raadius R ? Eeldame, et asteroid ei pöörle. Asteroidi tihedus on $\rho = 5200$ kg/m³, gravitatsioonikonstant $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ m³ kg⁻¹ s⁻².

Ü318 Maa pöörlemisperiood ★

Autor: Eero Vaher, piirkonnavor, 2014, G 3

Keskmiseks päikeseööpäevaks ehk tavatähenduses ööpäevaks nimetatakse keskmist perioodi, mille jooksul Päike näib Maaga seotud vaatleja jaoks tegevat taevas täisringi. Keskmise päikeseööpäeva pikkuseks on 24 h ehk 86 400 s. Maal kulub ühe tiiru tegemiseks ümber Päikese 365,256 keskmist päikeseööpäeva. Maa pöörlemis-suund ümber oma telje ühtib selle tiirlemissuunaga Päikese ümber. Leidke nende andmete põhjal Maa pöörlemisperiood sekundi täpsusega.

Ü319 Eksinud satelliit ★★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2009, G 5

Sidesatelliidid paiknevad geostatsionaarsel orbiidil – st niisugusel ringorbiidil, mille raadius ja suund on sellised, et satelliit püsib maapinna suhtes kogu aeg paigal. Ühe sidesatelliidi saatmisel aga esines viga, nii et ta saavutas küll õige kõrguse, kuid ringorbiidi suund sattus juhuslik. Milline on suurim võimalik suhteline kiirus, millega võib selliselt “eksinud” satelliit kokku põrkuda mõne teise sidesatelliidiga? Maa raadius on $R = 6400$ km, raskuskiirendus maapinnal $g = 9,8$ m/s².

Ü320 Orbiit ★★

Autor: Mihkel Pajusalu, lahtine, 2014, G 3

Taevakehad tiirlevad teatavasti elliptilistel orbiitidel. Ka Kuu orbiit ümber Maa on elliptiline. Kui Kuu kõige väiksem kaugus Maa-Kuu süsteemi massikeskmest (mille selles ülesandes võib lugeda ühtivaks Maa keskpunktiga) on $r_1 = 360\,000$ km ja orbitaalkiirus sellel kaugusel on $v_1 = 1,1$ km/s, siis kui suur on ligikaudu suurim kaugus Maa ja Kuu vahel? Maa massiks võtta $M = 6,0 \cdot 10^{24}$ kg ja gravitatsioonikonstandiks $G = 6,7 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$.

Ü321 Päikese tihedus ★★

Autor: Eero Vaher, piirkonnavor, 2013, G 6

Leidke Päikese keskmine tihedus ρ . Maa tiirlemisperiood on $T = 1$ aasta, gravitatsioonikonstant $G = 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$, Maa kaugus Päikesest $R = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$, Päikese nurkläbimõõt Maalt vaadatuna on $\alpha = 0,54^\circ$ (see on nurk, mis moodustub kahe kiire vahel, mis on tõmmatud vaatleja silma juurest Päikese diameetri otspunktide juurde).

Ü322 Ühendatud satelliidid ★★

Autor: Eero Vaher, piirkonnavor, 2018, G 6

Kaks satelliiti, mõlemad massiga m , tiirlevad ümber planeedi massiga $M \gg m$ ringorbiitidel raadiustega R_1 ning $R_2 = 2R_1$. Satelliidid on omavahel ühendatud tühise massiga pinges trossiga pikkusega R_1 , mille tõttu on mõlema satelliidi tiirlemisperiood T . Mitu korda on satelliitide joonkiirused v_1 ja v_2 suuremad või väiksemad joonkiirustest v'_1 ja v'_2 , millega satelliidid tiirleksid oma orbiitidel trossi puudumisel?

Ü323 Satelliit ★★★

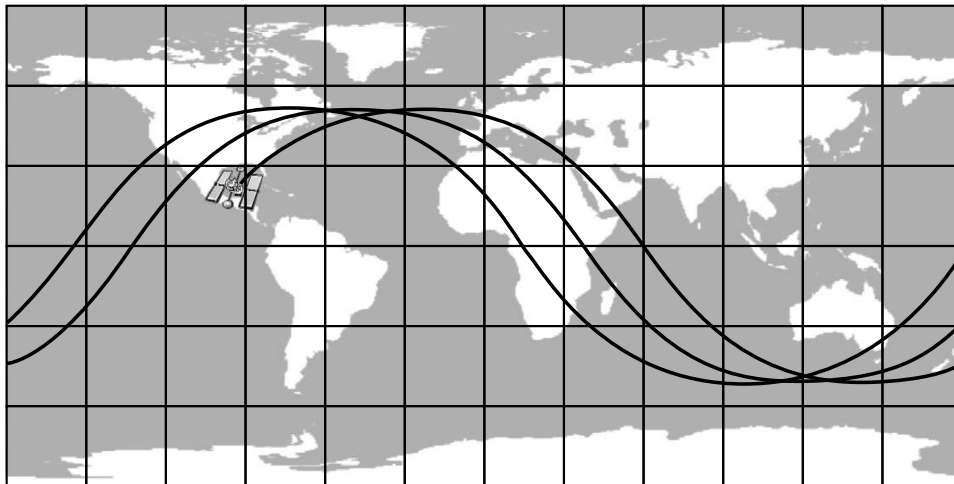
Autor: Eero Vaher, lõppvoor, 2013, G 5

Geostatsionaarseks orbiidiks nimetatakse sellist orbiiti, millel asuv satelliit Maa suhtes ei liigu. Kui suur on maa-ala, mida sellisel orbiidil olevalt satelliidilt jälgida saab? Vastuseks esitage selle maa-ala läbimõõt mõõdetuna mööda Maa pinda. Gravitatsioonikonstant $G = 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$, Maa mass $M = 6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, Maa raadius $r = 6400 \text{ km}$, Maa pöörlemisperiood $t = 24 \text{ h}$.

Ü324 Kosmosejaam ★★★

Autor: Oleg Košik, lõppvoor, 2005, G 9

Joonisel on toodud ringorbiidil liikuva rahvusvahelise kosmosejaama trajektoor maapinna kohal (Maa keskpunktist kosmosejaamani tõmmatud sirge ja maapinna lõikepunkti jälg). Hinnake selle abil kosmosejaama kõrgust maapinnast. Maa raadius $R = 6380 \text{ km}$, raskuskiirendus maapinnal $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.



Ü325 Kuukaabel ★★★★★

Autor: Siim Ainsaar, piirkonnavor, 2009, G 10

Oletame, et Maa ja Kuu on ühendatud sirge homogeense mõlema suhtes radiaalse kaabliga.

a) Mitu korda on Maa poolt kaablile avaldatav raskusjõud suurem Kuu-poolsest?

b) Maa pinnal asuv kaabli kinnitus sellele vertikaalsihis jõudu ei avalda. Kui kõrgel Kuu kohal asub punkt, kus pisut liiga nõrk kaabel katkeks?

Lugegem taevakehad paigalseisvaiks. Maa raadius $r_M = 6370$ km, Kuu raadius $r_K = 1740$ km, Maa mass $m_M = 5,97 \cdot 10^{24}$ kg, Kuu mass $m_K = 7,35 \cdot 10^{22}$ kg, taevakehade keskmete vahedkaugus $D = 3,80 \cdot 10^5$ km.

Abivalem. Kui kaablit tõmbaks Maa üksi ning otpunktide kaugused Maa tsentrist oleksid a ja b , mõjuks sellele raskusjõud $Gm_M\lambda\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$, kus G on gravitatsiooni-konstant ning λ kaabli joontihedus (ühikuga kg/m).

Ü326 Satelliidid ★★★★★

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2010, G 7

2009. aasta veebruaris põrkasid Siberi kohal 780 kilomeetri kõrgusel kokku USA ja Venemaa satelliidid. Pidades silmas, et ümber Maa tiirleb juba tuhandeid satelliite ning nende kõigi orbiite pole seetõttu võimalik omavahel koordineerida, hinnake mitme aasta tagant keskel läbi niisugused juhuslikud kokkupõrked aset leiavad. Oma lahenduses kasutage järgmisi hinnanguid ja lähendusi: maalähedaste satelliitide arv $N = 2500$; orbiidid jäävad maapinnast kõrguste vahemikku $h_1 = 200$ km kuni $h_2 = 2000$ km ning satelliidid on jaotunud selles kihis ühtlase ruumtihedusega; tüüpilise satelliidi ristlõikepindala $S = 10$ m². Maa raadius $R = 6400$ km, raskuskiirendus maapinnal $g = 10$ m/s².

Termodünaamika

Ü327 Balloon ★

Autor: Jaan Susi, lõppvoor, 2005, G 3

Suletud balloon ruumalaga $V = 101$ oli täidetud veega temperatuuril $t_0 = 0^\circ\text{C}$. Samal temperatuuril külmutati vesi jääks, mille tulemusena ballooni kest venis välja ja vesi avaldas kogu jäätumise protsessi käigus balloonile rõhku $p = 5 \cdot 10^7 \text{ Pa}$.

Leida balloonis olnud vee (H_2O) siseenergia muut koos märgiga. Jää tihedus $\rho_j = 900 \text{ kg/m}^3$ ja sulamissoojuseks antud rõhul $\lambda = 317 \text{ kJ/kg}$. Jää ja vee kokkusurutavust mitte arvestada.

Ü328 Kütteklaas ★

Autor: Jaak Kikas, lõppvoor, 2007, G 1

Ruumide soojendamiseks kasutatava elektriliselt köetava klaasi pind on kaetud õhukese valgust läbilaskva elektrit juhtiva kihiga, mille vastasservadele rakendatakse elektriline pinge (vool kulgeb mööda klaasi pinda). Kuidas suhtuvad sellisest klaasist valmistatud ristkülikukujuliselt aknalt eralduvad soojusvõimsused P_H ja P_V sama pinge rakendamisel vastavalt klaasi horisontaalsete (P_H) ja vertikaalsete (P_V) servade vahel? Akna horisontaalmõõde $a = 0,5 \text{ m}$ ja vertikaalmõõde $b = 1 \text{ m}$.

Ü329 Jääkuul ★

Autor: Urmo Visk, piirkonnavor, 2008, G 4

Õhukeste seintega jääst kera sees on õhk. Algselt on jääkera külmkapis temperatuuril $t_0 = -9^\circ\text{C}$ ning õhurõhk tema sees võrdub välisrõhuga $p_0 = 105 \text{ kPa}$. Kera tõstetakse külmikust välja tuppa, kus see hakkab soojenema. Kera sein on nii õhuke, et maksimaalne ülerõhk (st. sise- ja välisrõhkude vahe), mida ta purunemata talub on $\Delta p = 0,2p_0$. Mis juhtub enne, kas kera hakkab sulama või ta puruneb ülerõhu tõttu? Kuuli soojenemine lugeda nii aeglaseks, et igal ajahetkel võib lugeda õhu temperatuuri tema sees ning seinte sise- ja välispinna temperatuurid võrdseks.

Ü330 Küttesüsteem ★

Autor: Tundmatu autor, piirkonnavor, 2011, G 3

Küttesüsteem täidetakse $t_1 = 10^\circ\text{C}$ temperatuuriga veega. Kui palju peab paisupaagis olema vaba ruumi, et kütisel avatud paisupaagist vesi välja ei voolaks? Küttesüsteemis on $V_1 = 250$ liitrit vett ja tööolukorras on selle keskmine temperatuur $t_2 = 63^\circ\text{C}$. Vee ruumpaisumistegur on $\beta = 3 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}$. Vedeliku ruumala mingil temperatuuril avaldub kujul $V = V_0(1 + \beta t)$, kus t on vedeliku temperatuur Celsiuse kraadides, ning V_0 on vedeliku ruumala temperatuuril 0°C .

Ü331 Vee jäätumine ★

Autor: Jaak Kikas, lahtine, 2012, G 1

0,5 kg jääkuubikuid asetati 1 l vette algtemperatuuriga 0°C . Milline peab olema jää algtemperatuur, et kogu vesi jäätuks? Jää sulamissoojus on $330 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$, erisoojus $2,1 \text{ kJ}/(\text{kg}^\circ\text{C})$. Soojusvahetust keskkonnaga ei toimu. Vee tihedus $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$.

Ü332 Veepudel ★

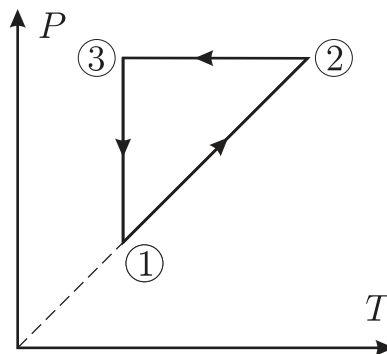
Autor: Koit Timpmann, piirkonnavor, 2013, G 2

Külma ilmaga oli autosse ununenud 2,0-liitrine täis veepudel. Auto juurde tulnud autojuht Koit ei uskunud oma silmi: temperatuur autos oli $-3\text{ }^{\circ}\text{C}$, aga vesi pudelis ei olnud külmunud. Koidule tuli meelde, et ta oli kunagi kuulnud, et väga puhas vedelik võib olla vedelas olekus ka allpool tahkumistemperatuuri. Selle kontrollimiseks võttis ta pudeli ja raputas seda ning suhteliselt kiiresti muutus selles osa veest jääks. Mitu grammi jääd tekkis pudelisse? Vee erisoojus $c = 4200\text{ J}/(\text{kg} \cdot ^{\circ}\text{C})$ ja tihedus $\rho = 1000\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, jää sulamissoojus $\lambda = 340\text{ kJ}/\text{kg}$.

Ü333 Ringprotsess ★

Autor: Riho Taba, piirkonnavor, 2006, G 2

Kas joonisel kujutatud ringprotsessil on ideaalse gaasi töö positiivne või negatiivne? Põhjendada vastust.

**Ü334 Vedelike segamine ★**

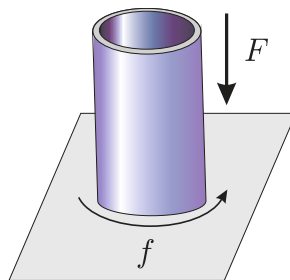
Autor: Aleksei Vlassov, piirkonnavor, 2007, G 3

Kahe erineva vedeliku segamisel ruumalade suhtega 1 : 1 tekib segu temperatuuriga $t_3 = 42\text{ }^{\circ}\text{C}$. Milline oleks segu temperatuur, kui ruumalade suhe oleks 2 : 1? Vedelike temperatuurid on vastavalt $t_1 = 27\text{ }^{\circ}\text{C}$ ning $t_2 = 47\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Ü335 Tulehõõrumine ★

Autor: Jaak Kikas, piirkonnavor, 2008, G 3

Jõuga F otsapidi vastu tasast pinda surutud toru pöörleb sagedusega f . Toru läbimõõt on D ja seinapaksus $d \ll D$. Toru otsapind on risti toru teljega, hõõrdetegur toru ja tasapinna vahel on μ . Kui palju soojusenergiat vabaneb ajavahemiku Δt jooksul?



Ü336 Termos ★

Autor: Urmo Visk, piirkonnavor, 2009, G 3

Termoses, mis on ümbritsevatest kehadest soojuslikult isoleeritud, on $m_1 = 300$ g vett temperatuuriga $t_1 = 20^\circ\text{C}$. Sellele lisatakse $m_2 = 600$ g vett temperatuuriga $t_2 = 80^\circ\text{C}$. Pärast soojusliku tasakaalu saabumist mõõdeti vee temperatuuriks T_1 . Järgmisel korral oli samas anumalguses $m_2 = 600$ g vett temperatuuriga $t_2 = 80^\circ\text{C}$ ja sellele lisati $m_1 = 300$ g vett temperatuuriga $t_1 = 20^\circ\text{C}$. Nüüd mõõdeti vee temperatuuriks soojusliku tasakaalu saabumise järel $T_2 = T_1 + 2^\circ\text{C}$. Kui suur on termose materjali erisoojus? Tühja termose mass on $m = 140$ g ja vee erisoojus $c = 4200$ J/kg C.

Ü337 Rauatükk ★

Autor: Oleg Košik, lahtine, 2010, G 2

Anumasse, milles oli $V = 1$ l vett temperatuuril $t_1 = 20^\circ\text{C}$, visati rauatükk massiga $m = 100$ g temperatuuril $t_0 = 500^\circ\text{C}$. Osa veest aurustus. Mõne aja pärast mõõdeti vee temperatuuriks $t_2 = 24^\circ\text{C}$. Kui palju vett aurustus välja? Vee erisoojus $c_1 = 4200$ J/(kg · °C), aurustumissoojus $L = 2,26 \cdot 10^6$ J/kg ja tihedus $\rho = 1000$ kg/m³; raua erisoojus $c_2 = 460$ J/(kg · °C). Anum on tühise soojusmahtuvusega ning väliskeskkonnast hästi isoleeritud.

Ü338 Jõhvikad ★

Autor: Urmo Visk, piirkonnavor, 2010, G 2

Keevasse vette kallatakse külmutatud jõhvikaid. Vee temperatuur langes väärtuseni $t = 89^\circ\text{C}$. Mitu korda oli vee mass suurem jõhvikate massist? Kuna jõhvikad oli väikesed ja sulasid väga kiiresti, siis võib vee soojusvahetuse ümbritseva keskkonnaga arvestamata jätta. Jõhvikate algtemperatuur oli $t_2 = -18^\circ\text{C}$. Jää erisoojus $c_j = 2100$ J/(kg C), vee erisoojus $c_v = 4200$ J/(kg °C), jää sulamissoojus $L = 330$ kJ/kg. Jõhvikate suure veesisalduse tõttu võib need jääna käsitleda.

Ü339 Vesi ★

Autor: Taavi Pungas, lõppvoor, 2011, G 1

Avatud termoses on vesi temperatuuril $t_0 = 100^\circ\text{C}$. Sellest 1 % aurustub. Hinnata, kui palju muutub termosesse jäänud vee temperatuur t . Vee erisoojus $c_v = 4,2$ kJ kg⁻¹ K⁻¹, veeauru erisoojus $c_a = 1,9$ kJ kg⁻¹ K⁻¹ ning vee aurustumissoojus temperatuuril 100°C on $L = 2,26$ MJ/kg. Eeldada, et termose seinte kaudu soojuskadusid ei ole.

Ü340 Hõõrdkeevitus ★

Autor: Ants Remm, lõppvoor, 2012, G 1

Suhteliselt uus keevitustehnoloogia on hõõrdkeevitus. See seisneb selles, et üks liidetavatest detailidest pannakse pöörlema ning surutakse vastu teist. Kui tekkinud soojus on detailid peaaegu sulamistemperatuurini kuumutanud, jäetakse pöörlev detail seisma ning suure rõhu all moodustub side. Vaatame olukorda, kus kaks vasest torujuppi tahetakse kokku keevitada. Leidke, kui suure jõuga peab pöörlemise ajal torusid kokku suruma, et tekiks piisavalt suur soojushulk $\Delta t = 6$ s jooksul. Toru pöörlemiskiirus on $f = 1200$ pööret minutis. Lihtsustatult võib eeldada, et mõlema toru otsast kuumeneb ühtlaselt $l = 0,5$ cm pikkune jupp. Torude diameeter on $D = 8$ cm, seina paksus $d = 5$ mm. Torud on alguses toatemperatuuril

$T_0 = 20\text{ }^\circ\text{C}$. Liitumine toimub temperatuuril $T_1 = 810\text{ }^\circ\text{C}$. Vase hõõrdetegur iseendaga on $\mu = 0,96$, tihedus $\rho = 8,9\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ ning erisoojus $c = 390\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot^\circ\text{C}}$. Soojuskadudega ümbritsevasse keskkonda mitte arvestada.

Ü341 Münt jääs ★

Autor: Erkki Tempel, piirkonnavor, 2015, G 3

Jäätüki sisse on jäätunud münt massiga $m_m = 10\text{ g}$ ja tihedusega $\rho_m = 8900\text{ kg/m}^3$. Jäätüki ja mündi temperatuur on $0\text{ }^\circ\text{C}$. Jäätükk ilma mündita kaalub $m_j = 130\text{ g}$. See jäätükk visatakse anumasse, milles on $V_v = 400\text{ ml}$ vett algtemperatuuriga T . Kui suur peab olema vee minimaalne algtemperatuur T , et jäätükk koos mündiga vajuks pärast soojusliku tasakaalu saabumist põhja? Soojusvahetust väliskeskkonnaga mitte arvestada. Vee erisoojus $c = 4200\text{ J/(kg}\cdot^\circ\text{C)}$ ning jää sulamissoojus $\lambda = 330\text{ kJ/kg}$. Jää tihedus $\rho_j = 900\text{ kg/m}^3$ ja vee tihedus $\rho_v = 1000\text{ kg/m}^3$.

Ü342 Soojusvaheti ★

Autor: Kaur Aare Saar, lõppvoor, 2016, G 1

Tagasivoolu soojusvahetis jahutatakse sissetulevat naftat temperatuuriga $T_n = 90\text{ }^\circ\text{C}$ temperatuurini $T_0 = 20\text{ }^\circ\text{C}$. Jahutusvesi liigub soojusvahetis vastupidises suunas naftaga ja siseneb soojusvahetisse temperatuuriga $T_v = 10\text{ }^\circ\text{C}$. Vesi liigub kiirusega $v_v = 6\text{ m}^3/\text{min}$ ja nafta liigub kiirusega $v_n = 15\text{ m}^3/\text{min}$. Leidke, millise temperatuuriga väljub soojusvahetist vesi? Vee erisoojus $c_v = 4200\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot^\circ\text{C}}$ ja nafta erisoojus $c_n = 1800\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot^\circ\text{C}}$. Vee tihedus $\rho_v = 1000\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ ja nafta tihedus $\rho_n = 850\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

Ü343 Kastmisvesi ★★

Autor: Urmo Visk, piirkonnavor, 2008, G 5

Päikeselisel suvepäeval langeb päikesekiirtega risti olevale ühe ruutmeetrisele pinnale ühes sekundis keskmiselt $\varepsilon = 0,5\text{ kJ/(s}\cdot\text{m}^2)$ energiat. Kastmisvett soojendatakse pilgeni täis valatud õhukeses seinas kerakujulises anumades raadiusega $R = 0,5\text{ m}$. Eeldada, et veeanum on päeva jooksul täielikult valgustatud. Kastmisvee temperatuur päikesetõusu ajal kell 4.30 oli $t_0 = 16\text{ }^\circ\text{C}$. Kui suur on kastmisvee temperatuur päikeseloojangu ajal kell 22.30? Vee erisoojus on $c = 4200\text{ J/(kg}\cdot^\circ\text{C)}$, tihedus $\rho = 1\text{ kg/dm}^3$. Eeldada, et anum neelab kogu pealelangeva päikesevalguse energia ning, et kogu päikesevalguse energia läheb kastmisvee soojendamiseks. Soojusvahetus kastmisvee ja keskkonna vahel lugeda tühiseks.

Ü344 Küttesüsteem ★★

Autor: Oleg Košik, piirkonnavor, 2012, G 2

Talvel siseneb koolimaja küttesüsteemi vesi algtemperatuuriga $t_0 = 60\text{ }^\circ\text{C}$ ning väljub sealt temperatuuriga $t_1 = 40\text{ }^\circ\text{C}$. Koolimaja soojuskadude võimsus on $N = 100\text{ kW}$. Kooli siseneva ja sealt väljuva veetoru sisediaameeter on $D = 100\text{ mm}$. Leidke veevoolu kiirus neis torudes. Vee erisoojus $c = 4200\text{ J/(kg}\cdot^\circ\text{C)}$, tihedus $\rho = 1000\text{ kg/m}^3$.

Ü345 Lihvimisketas ★★

Autor: Ott Krikmann, piirkonnavoor, 2005, G 3

Detaili lihvitakse horisontaalselt pöörleva lihvimiskettaga, mille raadius on $r = 20$ cm. Ülekuumenemise vältimiseks jahutatakse seda veega. Aja $t = 1$ s jooksul eraldub ketta ühelt ruutmeetritl ($s = 1$ m²) keskmiselt $q = 10$ kJ suurune soojushulk, mille neelab jahutusvesi. Jahutusvett, algtemperatuuriga $t_1 = 10$ °C, juhatakse ketta tsentrisse vooga $w = 10$ cm³/s. Vee erisoojus $c = 4200$ J/(kg K). Leidke üle kettaääre voolava vee keskmine temperatuur t_2 .

Ü346 Vee keemine ★★

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2008, G 6

Mari keetis Mikule teed, aga vesi läks seekord keema alles $t_0 = 105$ °C juures, kui toas oli normaalrõhk. Milles asi? Teatavasti hakkab vesi keema siis, kui küllastunud veeauru rõhk saab võrdseks õhurõhuga ning kogu anuma ulatuses saavad hakata paisuma küllastunud auruga täidetud mullid; tavaliselt on vees küllaldaselt tahkeid osakesi, millele tekivad piisavalt suured mullid, nii et pindpinevusega pole tarvis arvestada. Oletades aga, et seekord oli vesi haruldaselt puhas, hinnake, missugune oli mullide suurim võimalik raadius enne keemist. Vee pindpinevuseks keemistemperatuuril võib võtta $\sigma = 58 \cdot 10^{-3}$ N/m ning lineaarses lähenduses arvestada, et temperatuuri tõstmisel ühe kraadi võrra suureneb küllastunud veeauru rõhk $\Delta p = 3,5$ kPa võrra (keemistemperatuuri läheduses)

Ü347 Vesi ja jää ★★

Autor: Andres Laan, piirkonnavoor, 2010, G 5

Kahte suurt paralleelset metallplaati hoitakse horisontaalselt vastastikku. Üks plaatidest on temperatuuril $T_1 = -20$ °C ja teine temperatuuril $T_2 = 20$ °C. Metallplaatide vahel on vesi. Ilmselgelt on külma plaadi läheduses vesi tahkes olekus. On teada, et vee tahke ja vedela kihi paksuste suhe on 4. Millisele temperatuurile tuleb soojendada teine metallplaat, et vedela kihi paksus saaks võrdseks tahke kihi paksusega?

Ü348 Destillaator ★★

Autor: Koit Timpmann, lõppvoor, 2010, G 2

Destillaator toodab tunnis $V = 21$ puhast vett. Sisenev aur ja kondenseerunud vesi on samal temperatuuril. Auru kondenseerumisel vabanenud soojusest kulub $\eta = 95$ % jahutusvee soojendamiseks. Jahutussüsteem kujutab endast pikka toru, milles voolab jahutusvesi. Toru ristlõikepindala on $S = 0,8$ cm². Destillaatorisse siseneva ja sealt väljuva jahutusvee temperatuurid erinevad $\Delta T = 30$ °C võrra. Kui kiiresti peab vesi voolama jahutussüsteemis? Vee aurustumissoojus $L = 2300$ kJ/kg, vee erisoojus $c = 4,2$ kJ/(kg K) ja vee tihedus $\rho = 1000$ kg/m³.

Ü349 Veekeedukann ★★

Autor: Erkki Tempel, lahtine, 2015, G 4

Veekeedukann küttekeha võimsusega N on täidetud veega. Kannu tila ava pindala on S . Milline on suurim joonkiirus, millega veeaur kannu avast väljub? Vee aurustumissoojus on L , ideaalse gaasi konstant on R , õhurõhk on p ning vee molaarmass on μ . Veekeedukannu kasutegur soojuskadusid arvestades on γ .

Ü350 Radiaator ★★

Autor: Ardi Loot, piirkonnavor, 2018, G 3

Toas on vesiradiaator nimivõimsusega $P_n = 2,0 \text{ kW}$. Mis on selle radiaatori tegelik võimus ja tagasivoolava vee temperatuur, kui radiaatorit läbib küttevesi kiirusega $q = 1,01/\text{min}$, pealevoolava küttevee temperatuur $T_p = 70^\circ\text{C}$ ja toatemperatuur $T_0 = 22^\circ\text{C}$? Kui suur on radiaatori maksimaalne võimsus antud pealevoolu- ja toatemperatuuri korral? Vee erisoojus $c_v = 4200 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ ja tihedus $\rho_v = 1000 \text{ kg}/\text{m}^3$.

Märkus. Radiaatori nimivõimuseks nimetatakse selle küttevõimust fikseeritud pealevoolu- ($T_{pn} = 75^\circ\text{C}$), tagasivoolu- ($T_{tn} = 65^\circ\text{C}$) ja toatemperatuuri ($T_{0n} = 20^\circ\text{C}$) korral.

Vihje. Võib eeldada, et radiaatori tegelik võimus on võrdeline pealevoolu- ja tagasivoolutemperatuuride keskmise ja toatemperatuuri vahega.

Ü351 Külmutusseade ★★★

Autor: Tundmatu autor, piirkonnavor, 2005, G 8

Külmutusseadme mootor teeb tööd $A = 2 \text{ kJ}$. Kui suur on maksimaalne külmutusseadmes kehalt äravõetav soojushulk, kui külmutusseadme sisetemperatuur on $t_k = -15^\circ\text{C}$ ja seadme jahutusvedeliku temperatuur on $t_j = 10^\circ\text{C}$?

Vihje. Külmutusseadet võib vaadelda kui pööratud töötsükliga ideaalset soojusmasinat. See tähendab, et kõik tööd ja soojushulgad on vastupidise märgiga. Niisiis mootor ei tee tööd, vaid tema töös hoidmiseks on vaja teha tööd; madala temperatuuriga keskkond ei saa soojust, vaid annab soojust ära.

Ü352 Elektripliit ★★★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2007, G 8

Elektripliidi spiraali poolt ajaühikus keskkonnale üle antav soojushulk sõltub lineaarselt spiraali ja toa õhu temperatuuride vahest: $N = \kappa(T - T_0)$. Spiraali takistus sõltub sellest vahest samuti lineaarselt: $R = R_0[1 + \alpha(T - T_0)]$, kus R_0 on spiraali takistus toatemperatuuril. Kui suure temperatuurini kuumeneb spiraal, kui seda läbib vool tugevusega I ?

Ü353 Õhuaken ★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2009, G 6

Tuba köetakse elektriradiaatoriga, mille võimsus on $P = 1 \text{ kW}$. Välistemperatuur on $t_0 = 0^\circ\text{C}$, toas püsib ühtlane temperatuur $t_1 = 20^\circ\text{C}$. Nüüd avatakse õhuaken ning õueõhku tuleb tuppa kiirusega $v = 201$ sekundis. Milliseks kujuneb toatemperatuur? Õhu võib lugeda ideaalseks gaasiks, mille soojusmahtuvus konstantsel rõhul ühe mooli kohta on $c_p = \frac{7}{2}R$. Eeldada, et soojuskaod läbi seinte on võrdsed sise- ja välistemperatuuride vahega.

Ü354 Kasvuhooneefekt ★★★

Autor: Kristian Kuppart, lahtine, 2017, G 6

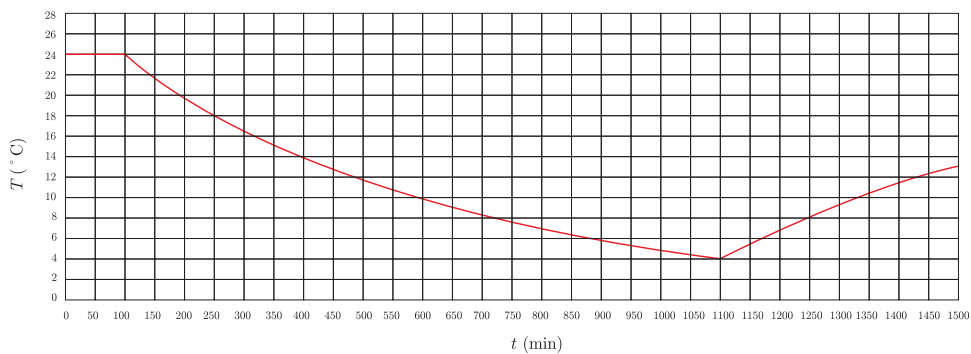
Vaatleme järgnevat Maa atmosfääri lihtsustatud mudelit, kus Maad ümbritsev atmosfäärikiht a) peegeldab kosmosesse tagasi $\mu = 30\%$ pealelangebvast päikesekiirgusest ning ülejäänud laseb läbi ilma kiirgust neelamata; b) neelab täielikult kogu maapinnalt tuleva infrapunakiirguse. Päikeselt tulev kiiritustihedus on $w_0 = 1400 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$. Leidke maapinna keskmine temperatuur.

Vihje. kehtib Stefan-Boltzmanni seadus – musta keha poolt kiiratud võimsus pindalaühiku kohta avaldub kui $w = \sigma T^4$, kus $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}^4}$. Eeldada, et maapind kiirgab ainult infrapunakiirgust, ning et teda saab selle jaoks lugeda absoluutselt mustaks kehaks. Samuti neelab maapind kogu temani jõudva päikesevalguse.

Ü355 Tuba ★★★

Autor: Oleg Košik, lõppvoor, 2006, G 7

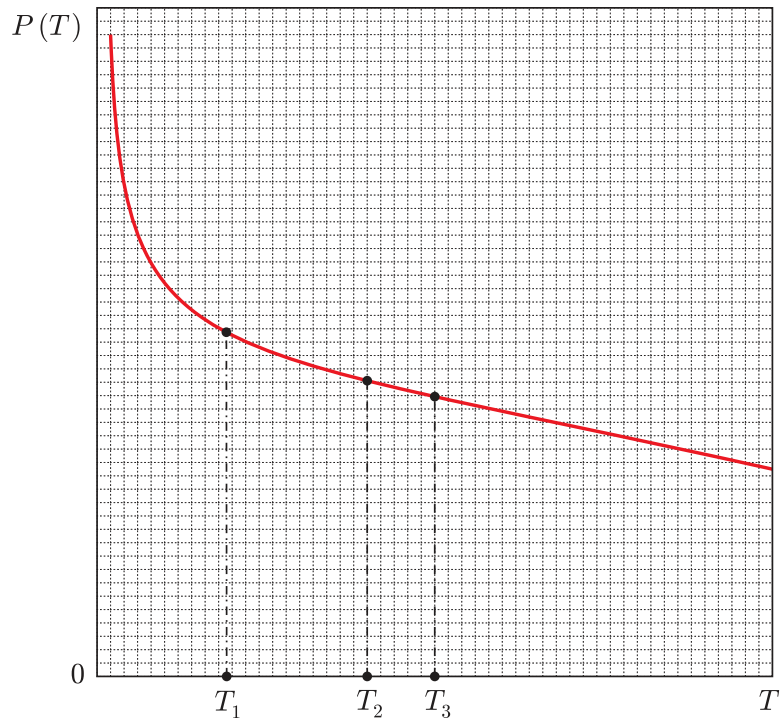
Külmade tõttu läks küttesüsteem rikki ja temperatuur toas hakkas langema. Ühel hetkel pandi tööle ajas muutumatu võimsusega töötav soojapuhur ning temperatuur toas hakkas taas tõusma. Graafikul on toodud toatemperatuuri sõltuvus ajast. Leidke toatemperatuur pika aja möödumisel. Protsessi vältel välistingimused ei muutunud. Seinte ja toas olevate esemete soojusmahtuvusega mitte arvestada. Soojusvahetuse kiirus väliskeskkonnaga ei ole võrdeline temperatuuride vahega.



Ü356 Küttekeha ★★★

Autor: Mihkel Heidelberg, lõppvoor, 2007, G 7

Teatud ruumi köetakse sellise küttekehaga, mille võimsus P sõltub ruumi temperatuurist nagu on näidatud joonisel. Kui välistemperatuur on T_1 , siis ruumi temperatuur stabiliseerub T_2 juures (need temperatuurid on märgitud graafikul). Millise temperatuurini tõuseb toatemperatuur, kui välistemperatuur tõuseb T_3 -ni (leida see temperatuur graafilise konstrueerimise abil). Soojusvahetus keskkonnaga on võrdeline temperatuuride vahega.



Ü357 Kauplus ★★★★★

Autor: Oleg Košik, lõppvoor, 2013, G 8

Suurematel hoonetel on sageli eeskojad. Miks? Vaadeldgem kauplust, millele ehitati nii kitsas eeskoda, et läbi kaupluse seinte toimuvaid soojuskadusid see juurdeehitis ei mõjuta. Kaupluse ukse avamisel vahetub läbi avatud ukse teatud kogus õhku. Lugegem õhk kõikjal hästi segunenuks, st läbi lahtise ukse läheb õuest eeskotta õuetemperatuuril õhk; kõigi uste jaoks teeme analoogilised eeldused. Samuti eeldame, et ühe ukseavamisega vahetuva õhu hulk ei sõltu temperatuuride vahest ning et uste ja eeskoja seinte soojusjuhtivusest tingitud soojuskaod on tühised võrreldes õhu vahetumisest tingitutega.

Vaatleme olukorda enne eeskoja ehitamist. Jahedal aprillipäeval oli kaupluse lahtioleku aegne välistemperatuur stabiilselt $T_1 = 4^\circ\text{C}$. Öösel, kui kauplus on kinni, oli välistemperatuur stabiilselt $T_2 = 0^\circ\text{C}$. Kaupluse elektriradiaatorite tööd juhhib

termostaat, mis hoiab sisetemperatuuri püsivalt $T_0 = 20^\circ\text{C}$ juures. Öösel oli radiaatorite keskmine võimsus $P_2 = 5,0\text{ kW}$ ning päeval $P_1 = 4,6\text{ kW}$. Päeval toimib kaks efekti: (a) inimesed avavad aeg-ajalt ust; (b) inimeste kehasoojus ning kaupluse valgustid panustavad kütmissse teatava lisavõimsusega.

Pärast eesruumi ehitamist selgus, et sama välistemperatuuri ning küllastajate arvu juures vähenes radiaatorite päevane keskmine võimsus $P_3 = 3,8\text{ kW}$ -ni. Millist võimsust toodavad kaupluses olevad inimesed ja valgustid, kui eeldada, et soojusvahetuse võimsus on võrdeline temperatuuride vahega?

Ü358 Küttesüsteem ★★★★★

Autor: Taavi Pungas, piirkonnavor, 2014, G 9

Vaatleme kortermaja küttesüsteemi lihtsustatud mudelit. Kahekordse maja kummalgi korrusel on üks korter. Loeme korterid täiesti ühesugusteks. See tähendab, et katus ja põrandad on hästi soojustatud ning soojuskadusid arvestame ainult läbi maja seinte.

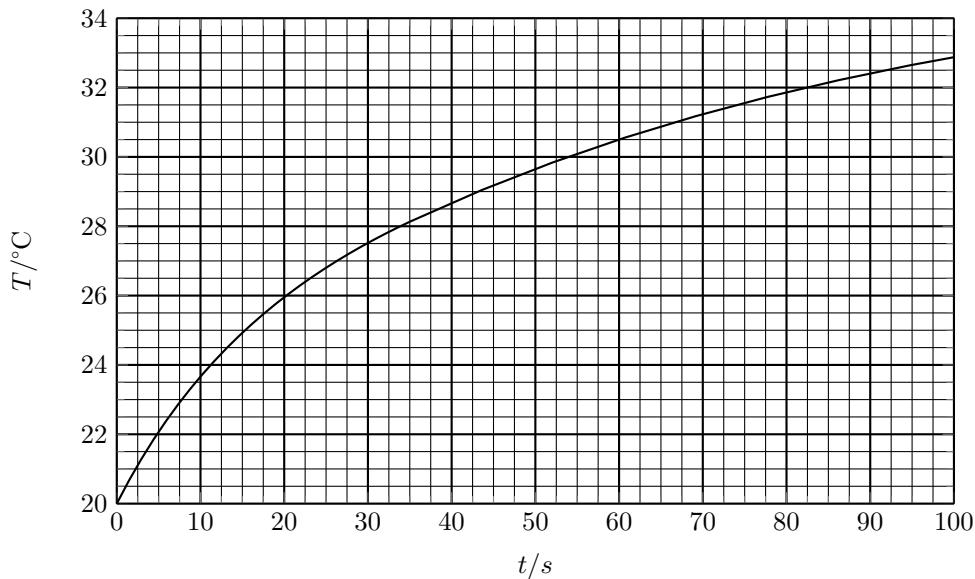
Keldris asub katel, mis kütab vee temperatuurini $t_1 = 68^\circ\text{C}$. Vesi liigub kõigepealt ülemisse korterisse ning läbib seal 10 ribiga radiaatori. Seejärel juhitakse vesi alumisse korterisse, kus see läbib 11 ribiga radiaatori. Pärast seda liigub vesi tagasi katlasse ning sinna jõudses on vee temperatuur $t_2 = 60^\circ\text{C}$. Eeldame, et vesi jahutub ainult radiaatorites. Küttesüsteem on ehitatud nii, et mõlemas korteris oleks täpselt sama sisetemperatuur t . Leidke temperatuur t .

Teadmiseks: soojuskadu läbi mingi seina on võrdeline selle pindalaga ja temperatuuride vahega seespool ja väljaspool seina. Eeldage, et mööda radiaatorit liikudes langeb vee temperatuur lineaarselt läbitud vahemaaga.

Ü359 Veesoojendi ★★★★★

Autor: Andres Põldaru, piirkonnavor, 2016, G 10

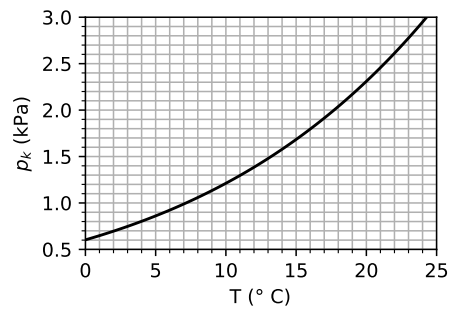
Veesoojendis võimsusega $P = 2,0\text{ kW}$ on algselt vesi massiga m_0 temperatuuril $T_0 = 20^\circ\text{C}$. Soojendisse voolab ühtlasel kiirusel juurde vett temperatuuril T_0 nii, et ajaühikus lisanduva vee mass $\mu = \text{Const}$. Soojendi saab täis ja vett hakkab ülevast avast välja voolama. Temperatuur jätkab tõusmist, stabiliseerudes 36°C juures. Soojendis oleva vee temperatuurigraafik on toodud allpool. Leidke m_0 ja μ . Eeldage, et peale väljavoolava vee muid soojuskadusid pole ja soojendis olev vesi on alati ühtlase temperatuuriga. Vee erisoojus $c = 4,2 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$.



Ü360 Soojustus ★★★★★

Seina soojustus koosneb sisemisest (soojusjuhtivus $k_1 = 0,07 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$) ja välimisest kihist (soojusjuhtivus $k_2 = 0,05 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$). Nende kihtide vahel on kile, et takistada õhu liikumist läbi seinna. Millist tingimust peab rahuldama sisemise soojustuskihi pakus L_1 , et vältida veeauru kondenseerumist seinas? Seina paksus $L = L_1 + L_2 = 30 \text{ cm}$, L_2 on välimise soojustuskihi paksus, toa temperatuur $T_1 = 20^\circ\text{C}$, suhteline õhuniiskus toas $\eta_1 = 60\%$ ja välis-temperatuur $T_2 = -20^\circ\text{C}$. Küllastunud veeauru osarõhu sõltuvus temperatuurist on toodud joonisel.

Autor: Ardi Loot, lõppvoor, 2018, G 5



Märkus. Eeldada, et temperatuur muutub soojustuskihis lineaarselt kaugusega ja muutuse kiirus on pöördvõrdeline soojusjuhtivusega.

Ü361 Soojuskiirgus ★★★★★

Autor: Valter Kiisk, lõppvoor, 2006, G 8

Veeldatud gaaside säilitamisel on tarvis palju tähelepanu pöörata anuma soojusisoleerimisele. Olulise osa soojusvahetusest moodustab soojuskiirgus. Oletagem, et anumal on kahekordsed seinad, mille kiirgusvõimsus pinnauhiku kohta on $\varepsilon\sigma T^4$, kus Stefan-Boltzmanni konstant $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$ ja seinte kiirgamisvõime ε loeme temperatuurist sõltumatuks ja võrdseks 0,1-ga. Vedela lämmastikuga kokkupuutes oleva siseseina temperatuur on $T_s = 77 \text{ K}$, toaõhuga kokkupuutes

oleva välisseina temperatuur aga $T_o = 293 \text{ K}$.

a) Leidke soojuskiirgusest tingitud soojusvoog läbi $S = 1 \text{ cm}^2$ suuruse seinapinna.

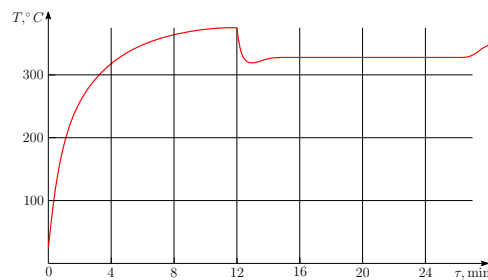
b) Soojusvoo vähendamiseks asetatakse sise- ja välisseina vahele N õhukest ekraani, mille pind on kaetud samasuguse materjaliga nagu anuma seinad. Mitu korda väheneb selle tulemusena soojusvoog? Põhjendage vastust.

Märkus. kehtib Kirchhoffi seadus – keha neelamisvõime, mis näitab, kui suur osa aine pinnale langevast kiirgusest neeldub, on alati võrdne tema kiirgamisvõimega ϵ .

Ü362 Ahi ★★★★★

Autor: Stanislav Zavjalov, lõppvoor, 2012, G 7

Väikese metallisulatusahju kütteelemendi võimsus on $P_0 = 50 \text{ W}$. Toatemperatuuril olev ahi lülitakse sisse ja umbes 12 minuti pärast, kui selle temperatuur praktiliselt enam ei kasva, pannakse ahju mitu eelsoojendatud pliitükikest summaarse massiga $m = 265 \text{ g}$. Juuresoleval graafikul (suuremalt lisalehel) on toodud ahju temperatuuri sõltuvus ajast. Leidke selle põhjal plii sulamissoojus λ .



Ü363 Gaasiküte ★★★★★

Autor: Ardi Loot, piirkonnavor, 2017, G 10

Poolsfäärilikujulist telki raadiusega $R = 4 \text{ m}$ köetakse gaasipuhuriga. Seinte soojusjuhtivus on $U = 3 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$. Ühe massiühiku gaasi põletamisel eraldub $D = 2,25$ massiühikut vett. Gaasi kütteväärtus on $k = 40 \text{ MJ/kg}$. Välisõhu temperatuur on $T_0 = -10^\circ \text{C}$ ja õhuniiskus $\eta_0 = 50\%$. Kui suur peab olema gaasikütte võimsus P ja telgi ventileerimise õhuruumala Q ajaühikus, et hoida telgis temperatuuri $T_1 = 15^\circ \text{C}$ ja õhuniiskust $\eta_1 = 80\%$? Kui suur osa küttevõimusest kulub ventileeritava õhu soojendamiseks ja mitu korda tunnis vahetub telgi õhk?

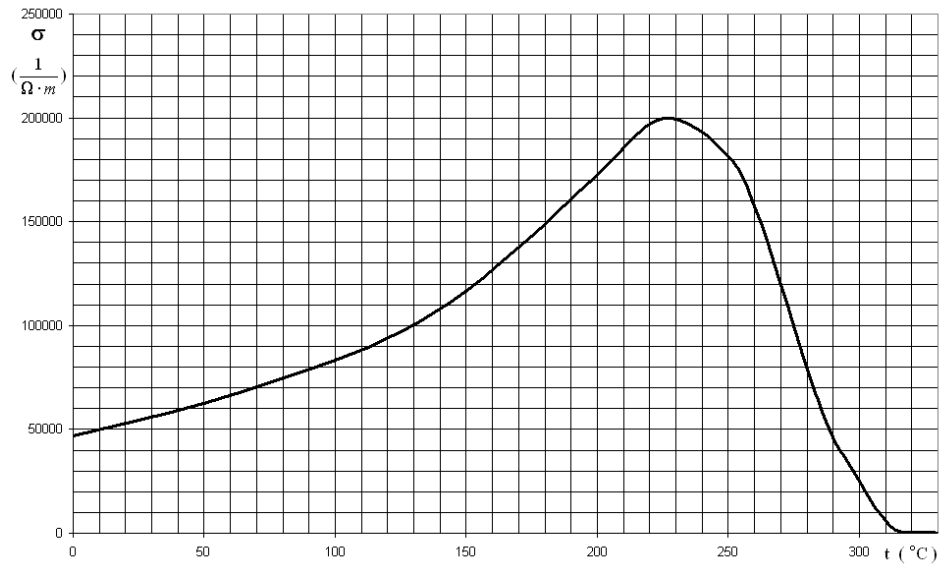
Õhu tihedus $\rho_o = 1,2 \text{ kg/m}^3$ ja soojusmahtuvus $c_o = 1,0 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K})$. Temperatuuril $T_0 = -10^\circ \text{C}$ mahub õhu ruumalaühikusse maksimaalselt $G_0 = 2,3 \text{ g/m}^3$ veeauru ning temperatuuril $T_1 = 15^\circ \text{C}$ vastavalt $G_1 = 12,8 \text{ g/m}^3$. Eeldada, et soojakaod läbi telgi põranda puuduvad.

Ü364 Pooljuht ★★★★★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2008, G 10

Graafikul on antud pulgakujulise keraamilisest pooljuhist (nn. PTC takisti) soojendi materjali erijuhtivuse σ ($1/(\Omega \cdot \text{m})$) sõltuvus temperatuurist $t(^\circ \text{C})$. Erijuhtivuseks nimetatakse eritakistuse pöördväärtust. Leida, millise temperatuurini kuumeneb avatud ruumis paiknev sellest materjalist soojendi, kui tema otstele rakendatakse pinge $U_1 = 60 \text{ V}$. Milliseks kujuneb soojendi temperatuur, kui otstele rakendatud pinge on $U_2 = 36 \text{ V}$? On teada, et kui soojendi otstele rakendatakse pinge

$U_0 = 30 \text{ V}$, siis soojendi temperatuuriks kujuneb $t_0 = 70 \text{ }^\circ\text{C}$. Välisõhu temperatuur on $t_v = 20 \text{ }^\circ\text{C}$.



Ü365 Must kuup ★★★★★

Autor: Mihkel Pajusalu, lahtine, 2014, G 9

Olgu väga hea soojusjuhtivusega materjalist absoluutselt must kuup paralleelses valgusvihus, mille intensiivsus (võimsus ristlõikepindala kohta) on I . Milline on maksimaalne ja minimaalne stabiilne temperatuur T_{\max} ja T_{\min} , mille kuup saavutab sõltuvalt selle asendist kiirguse leviku suuna suhtes?

Varia

Ü366 Kontraktsioon ★

Autor: EFO žürii, piirkonnavor, 2018, G 1

Omavahel segatakse V_v liitrit vett ja V_p liitrit piiritust nii, et tekkinud lahuse ruumala $V = 1 \text{ dm}^3$ ning lahuses on massi järgi $p = 44,1\%$ piiritust. Leidke omavahel segatud vee ja piirituse ruumalad V_v ja V_p . Lahuste kokkuvalamisel esineb $\gamma = 6\%$ -line kontraktsioon – saadud lahuse ruumala on 6% väiksem kui vee ja piirituse ruumalade summa. Vee tihedus $\rho_v = 1000 \text{ kg/m}^3$ ning piirituse tihedus $\rho_p = 790 \text{ kg/m}^3$.

Ü367 Tunnel ★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2008, G 3

Rong, mis sõidab kiirusega $v = 50 \text{ km/h}$, sisenes hästi pikka tunnelisse. Nii rongi kui tunneli ristlõiget lugeda ruuduks küljepikkusega vastavalt $a = 4 \text{ m}$ ja $b = 6 \text{ m}$. Hinnake, milline on tuule kiirus rongi aknast mõõdetuna.

Ü368 Mobiililaadija ★★

Autor: Mihkel Kree, piirkonnavor, 2014, G 4

Leiutajad on pakkunud välja toredea seadme matkainimestele oma telefoni laadimiseks. Ühe saapa talla sisse pannakse mehhanism, mis toimib amortisaatorina. Iga kord kui kannale toetutakse, muundatakse mehaaniline töö väikese elektrigeneraatori abil elektrienergiaks. Oletame, et matkaja mass $m = 60 \text{ kg}$ ja ühe sammu ajal vajub tald kokku $h = 5 \text{ mm}$ võrra. Antud seadme kasutegur $\eta = 0,2$. Matkaja keskmiseks sammupaari pikkuseks ehk kahe järjestikuse samale kannale astumise vahemaaks võtame $d = 1,5 \text{ m}$. Nüüd tuleb vaid ühendada telefon juhtmega saapa külge ja aku laadimine võib alata.

Arvestage, et tüüpilises nutitefonis on liitium-polümeeraku, mis töötab pingel $U = 3,7 \text{ V}$. Samuti arvestage, et kui telefon töötaks keskmisel voolutugevusel $I_k = 130 \text{ mA}$, suudaks aku vastu pidada $T = 10$ tundi. Arvutage, kui pika maa peab matkaja maha kõndima, et tühi telefoni aku uuesti täis laadida.

Ü369 Laser ★★

Autor: Valter Kiisk, lõppvoor, 2017, G 3

Laserkiir ühtlase diameetriga $d = 1 \text{ mm}$ langeb risti kiilukujulise klaasplaadi esimesele pinnale (pindade vaheline nurk $\varphi = 2^\circ$). Laserkiire koosseisus on monokromaatsed komponendid lainepikkustega $\lambda_1 = 355 \text{ nm}$ ja $\lambda_2 = 532 \text{ nm}$. Klaasi murdumisnäitajad nendel lainepikkustel on vastavalt $n_1 = 1,48$ ja $n_2 = 1,46$. Leidke kaugus l klaasplaadist, kus erineva lainepikkusega valguskiired on teineteisest täielikult eraldunud.

Ü370 Kuu ★★

Autor: Urmo Visk, lõppvoor, 2006, G 5

Peegeldusteguriks nimetatakse pinnalt peegeldunud ja pinnale langenud valgusvõimsuste suhet. Säriaeg on ajavahemik, mille vältel langeb fotoaparaadis objektiivile läbinud valgus filmilindile. Päikeselisel sügispäeval on mingi objekti pildistamisel optimaalne säriaeg $t_1 = 1/8000 \text{ s}$. Sama objekti pildistamisel öösel, kui paisab täiskuu, on optimaalne säriaeg $t_2 = 160 \text{ s}$. Mõlema pildi tegemisel on erinev

vaid säriaeg. Hinnake Kuu pinna keskmist peegeldustegurit. Kuu kaugus Maast $R = 384\,000$ km ja Kuu raadius $r = 1740$ km. Kvaliteetse pildi saamiseks peab filmile langev valgusenergia päeval ja öösel olema sama väärtusega ehk fotografeerimisel võib valgustatuse ja optimaalse säriaaja lugeda pöördvõrdeliseks.

Ü371 Pindpinevus ★★

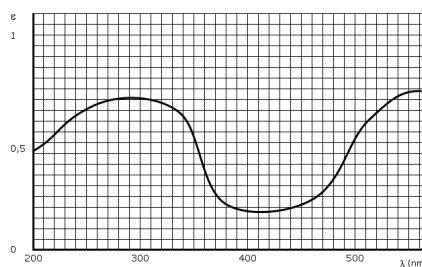
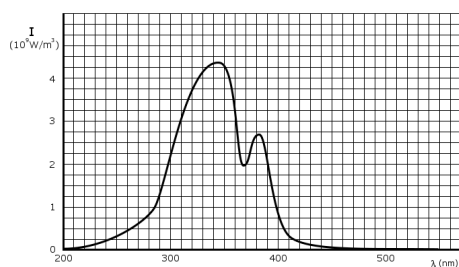
Autor: Koit Timpmann, lahtine, 2011, G 2

Klaastoru (raadius r_1) asetatakse jämedama klaastoru sisse nii, et nende teljed ühtivad. Seejärel pannakse mõlemad püsti vette. Leidke, kui suur peaks olema jämedama toru siseraadius r_2 , et veetase oleks mõlemas klaastorus sama. Eeldage, et torude seinad on tühiselt õhukesed.

Ü372 Smurf solaariumis ★★

Autor: Ants Remm, lahtine, 2011, G 4

Smurf veetis solaariumi lampide all ajavahemiku $t = 10$ min. Kui suure soojushulga Q sai Smurf? Joonistel on toodud Smurfile langenud valguse spekter I (intensiivsus lainepikkuse kohta sõltuvalt valguse lainepikkusest, ühik 10^9 W/m³) ning Smurfi neeldumisspekter ε (neelatud ja peale langenud valguse intensiivsuste suhte sõltuvus valguse lainepikkusest). Smurfi efektiivne pindala, kuhu langeb valgus, on $S = 0,1$ m².



Ü373 Valgustid ★★

Autor: Valter Kiisk, piirkonnavaor, 2016, G 7

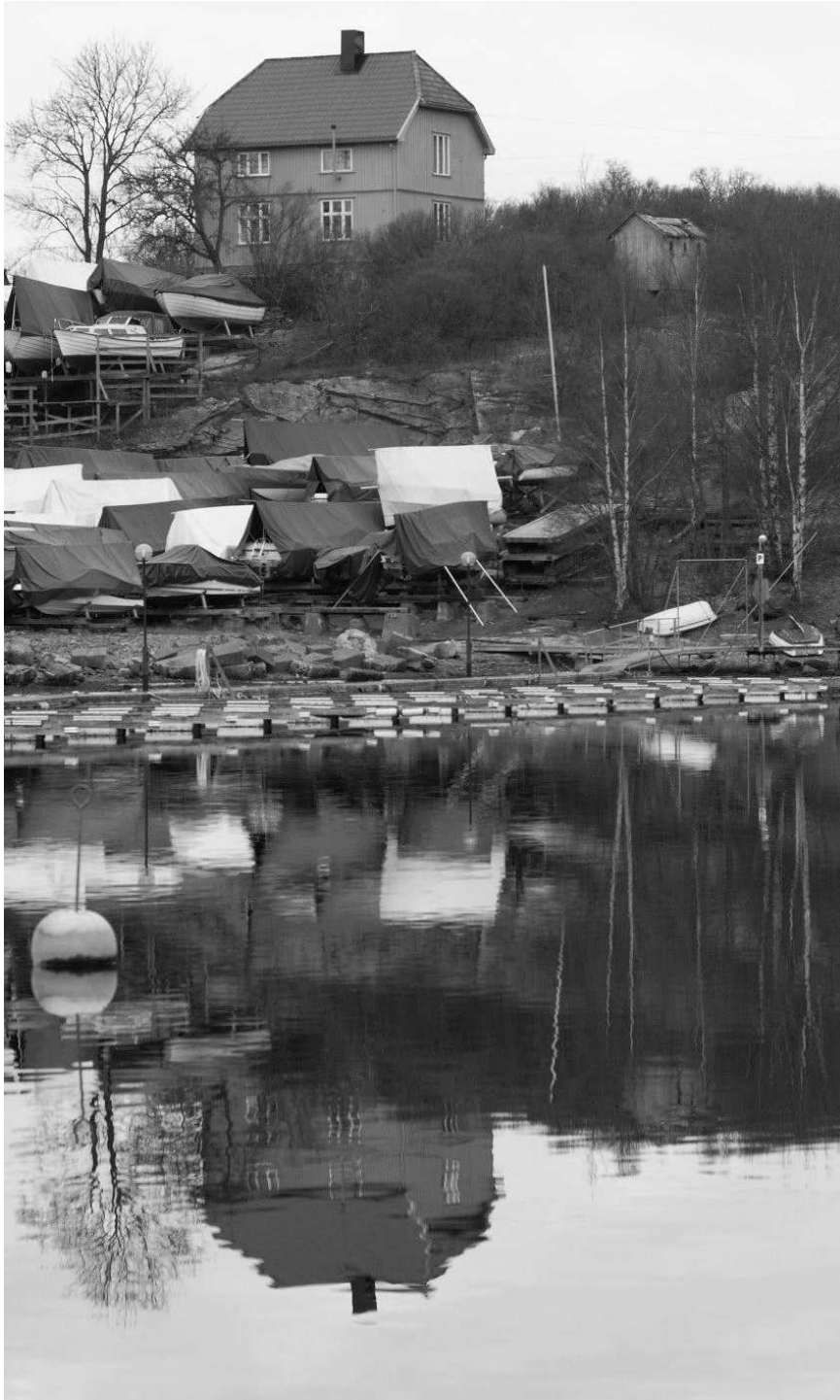
Luminescentstorust kaugusel $l_1 = 15$ cm mõõdeti valgustatuseks $L_1 = 8400$ lx. Luminescentstoru võib lugeda hulga pikemaks kaugusest l_1 . Seevastu üksikust LED-pirnist kaugusel $l_2 = 30$ cm mõõdeti valgustatuseks $L_2 = 2600$ lx. Kontoriruumis kulgevad luminescentstorud ühe sirge katkematu rivina üle kogu ruumi, paiknedes töötasapinnast kõrgusel $h_1 = 1,8$ m. Laualambi LED-pirn paikneb kõrgusel $h_2 = 40$ cm laua pinnast. Kui suur valgustatus saavutatakse otse valgusti all eraldi üldvalgustuse ja kohtvalgustuse kasutamisel?

Märkus. valgustatus iseloomustab ajaühikus pinnaühikule langevat valgusenergiat.

Ü374 Maja ★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2008, G 4

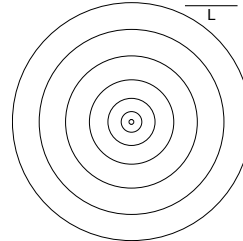
Fotol kujutatud maja alumise korruse kõrgus (mõõdetuna esimese korruse akna alumisest servast teise korruse akna alumise servani) on 3 meetrit. Kui kõrgel vee-pinnast on maja (täpsemalt, tema vundamendi ülemine serv)?



Ü375 Tiik ★★★

Autor: Taavi Pungas, lõppvoor, 2013, G 6

Vaatleme tiiki visatud kivi ümber tekkinud lainetust. Kui kivi kukub vette, tekib suur hulk erinevate lainepikkustega häiritusi, millest igaüks levib omaette kiirusega. Nende liitumisel moodustub lainehari, mille liikumist saame vaadelda. Joonisele (suuremalt lisalehele) on iga kindla ajavahemiku järel kantud selle laineharja asukoht, mõõtkavaks sirglõik pikkusega L . Laineharja kiirus v sõltub seda parasjagu moodustavate komponentide lainepikkustest λ ja vee sügavusest h . Kui kivi vettekukkumisest möödunud aeg t on väike, siis koosneb lainehari lainepikkustest $\lambda \ll h$ ning laineharja kiirus sõltub ajast seose $v \approx \frac{gt}{\pi}$ järgi. Kaugemal, kus laineharja moodustavad häiritused lainepikkusega $\lambda \gg h$, liigub see kiirusega $v \approx \sqrt{hg}$. Hinnake sügavust h eeldusel, et see oli terve tiigi ulatuses sama. Vastus andke suhtena h/L .

**Ü376 Radoon ★★★**

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2016, G 5

Graptoliitargilliit (tuntud ka diktüoneemakilda nime all) on Põhja-Eestis paljanduv setteline savikivim, mis sisaldab hulgaliselt haruldasi elemente, muu hulgas uraani. Üks tonn kivimit sisaldab 300 g uraan-238 isotoopi. Uraani levinuima isotoobi, aatommassiga 238, poolestusaeg $\tau_U = 4,5$ miljardit aastat ning selle lagunemisahela vaheetapiks on radioaktiivne element radoon, aatommassiga 222 ning poolestusajaga $\tau_{Rn} = 3,8$ päeva. Radoon on gaas, mida peetakse kopsuvähi tekitajaks, sest sissehingamisel satuvad organismi selle radioaktiivsed laguneproduktid. Seetõttu sätestavad vastavad normatiivid, et hoonete ruumiõhus peab radooni aktiivsus olema väiksem kui 200 Bq/m^3 , kus Henri Becquereli järgi nimetatud ühik Bq tähistab üht tuuma lagunemist sekundis.

Matkaja tõi matkalt pahaaimamatult koju kaasa ühe graptoliitargilliidi tükikese massiga m ning paigutas selle magamistuppa kapi peale. Arvestage lihtsustatult, et magamistoas ruumalaga $V = 25 \text{ m}^3$ õhuvahetust ei toimu ning et kogu tekkiv gaasiline radoon väljub kivimist. Leidke kivimitükikese suurim ohutu mass m , nii et sellest tingitud radooni aktiivsus jääks veel lubatud normidesse, kui kivimit hoida pikka aega toas.

Märkus. aatommassiühik $u = 1,7 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$.

Ü377 Vihmasadu ★★★

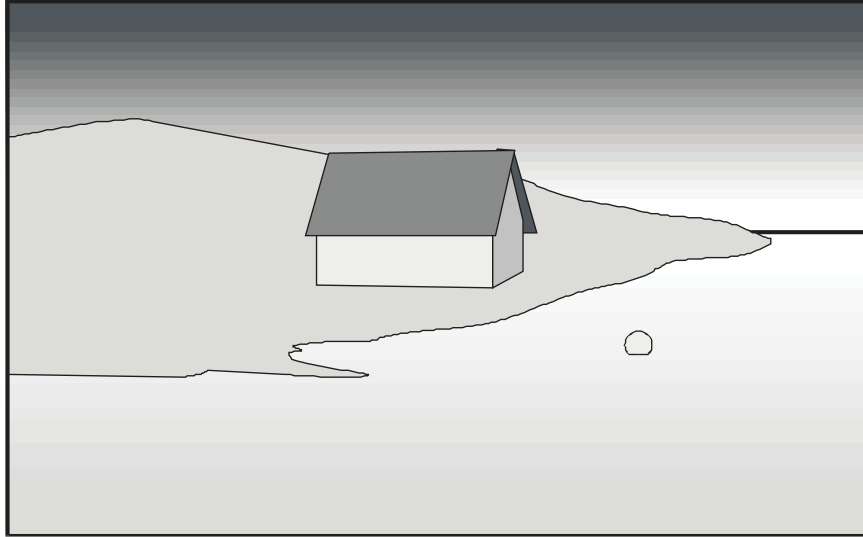
Autor: Jaan Kalda, piirkonnavor, 2012, G 7

Viilkatusega maja katus on peegelsümmeetriline: vertikaalne sümmeetriatasand on ida-läänesuunaline ning katuse põhja- ja lõunaküljed on omavahel risti. Mõlemal katusepoolel on vihmaveerenn, mis kogub katusele langeva vee ning suunab selle tünni. Sajab vihma ning puhub lõunatuul $u = 6,0 \text{ m/s}$; lõunaküljel paiknev tünn täitub 2,0 korda kiiremini kui põhjaküljel paiknev tünn; võib lugeda, et katuse läheduses piiskade langemissuund oluliselt ei muutu. Milline on piiskade langemise keskmine kiirus (st kiiruse vertikaalkomponent)?

Ü378 Maja ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2008, G 9

Juuresolev joonis on tehtud foto põhjal. Pildistamise hetkel asus fotoaparaat 2 m kõrgusel veepinnast. Kasutades antud joonist ja joonlauda määrake nii täpselt kui võimalik vees ujuva poi läbimõõt!

**Ü379 Lööklaine ★★★★★**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2015, G 6

Elektrostaatiline lööklaine, mis levib kiirusega w piki x -telge, võib kirjeldada elektrilise potentsiaali abil: $U = 0$ kui $x < wt$ ning $U = U_0$ kui $x > wt$. Millise kiiruse v omandab lööklaine mõjul algselt paigal seisnud osake massiga m ning laenguga q ? Vastus andke sõltuvana potentsiaalibarjääri kõrgusest U_0 . Pöörake tähelepanu asjaolule, et see, kummale poole barjääri osake jääb, sõltub U_0 väärtusest.

Ü380 Õhupalli vari ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2013, G 10

Päikesepaistelisel päeval hõljub õhus kerakujuline läbipaistmatu õhupall, mis jätab horisontaalsele maapinnale varju, kusjuures poolvarju pikkus on 5,0 m ja laiuse 2,5 m ning täisvarju pikkus 1,0 m. Kui suur on palli läbimõõt ja kui kõrgel see on maapinnast? Päikese näiv nurkläbimõõt (see on nurk, mis moodustub kahe kiire vahel, mis on tõmmatud vaatleja silma juurest Päikese diameetri otspunktide juurde) oli sel päeval $\alpha = 0,53^\circ$.

Vedelike mehaanika

Ü381 Vedelik ★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2005, G 1

Ühendatud silindrilistesse anumatesse diameetritega d_1 ja d_2 on valatud vedelik tihedusega ρ . Kui palju tõuseb vedeliku tase anumates, kui ühte anumasse pannakse ujuma vedeliku tihedusest väiksema tihedusega keha massiga m ?

Ü382 Tünn ★

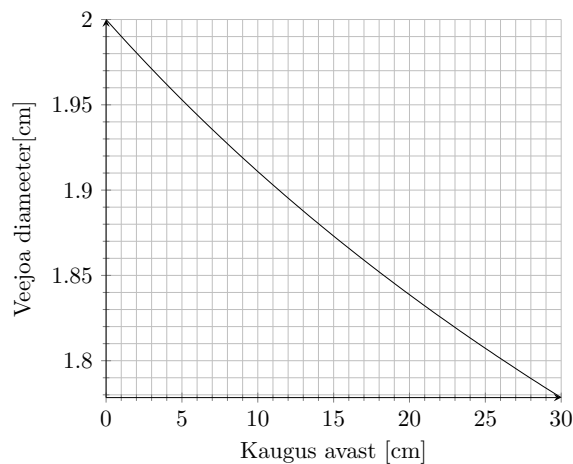
Autor: Koit Timpmann, piirkonnavoore, 2012, G 3

Vees ujuva tühja tünni ruumalast on $1/10$ vee sees. Pärast tünni täitmist tundmatu vedelikuga jääb tünn vee peale ujuma, kuid nüüd on vee sees $9/10$ tünni ruumalast. Kui suur on tünni valatud vedeliku tihedus? Vee tihedus on 1000 kg/m^3 .

Ü383 Auk tünnis ★★

Autor: Hans Daniel Kaimre, lõppvoore, 2018, G 2

Suure vett täis tünni põhjas on auk, kust voolab vett välja. Graafikul on esitatud väljuva veejoo läbimõõdu sõltuvus kaugusest tünni põhjast l . Leidke veetaseme kõrgus tünnis.



Ü384 Veetoru ★★

Autor: Taavi Pungas, lõppvoore, 2011, G 4

Kaks erineva diameetriga horisontaalset toru on otsapidi kokku ühendatud nii, et nende teljed ühtivad. Mõõda esimest toru voolab vesi kiirusega v_1 . Kummagi veetoru külge on ühendatud väike vertikaalne toruke, vedelikusamba kõrgused neis on vastavalt h_1 ja h_2 (toru teljest mõõtes). Leidke horisontaalsete torude diameetrite suhe. Hõõrdumist mitte arvestada.

Vihje. Vedeliku horisontaalsel voolamisel kehtib Bernoulli seadus kujul $\frac{\rho v^2}{2} + p = \text{Const}$, kus p on hüdrostaatiline rõhk, ρ vedeliku tihedus ning v vedeliku kiirus.

Ü385 Ujuv kuup ★★

Autor: Koit Timpmann, lõppvoor, 2015, G 3

Õhukeseseinaline hermeetiline kuup ujub vee pinnal. Vee tihedus on ρ , kuubi mass koos selles oleva gaasiga m ja selle serva pikkus a . Milline on vähim gaasi algrõhk kuubis p , mille korral kuup ei upuks, kui selle põhja tekiks auk? Õhurõhk on p_0 , raskuskiirendus on g .

Ü386 Pump ★★

Autor: Ardi Loot, piirkonnavor, 2018, G 4

Kaevust sügavusega $h = 5,0$ m tahetakse pumbata vett. Pump asub maapinnal ning selle veevõtutoru (täidetud veega) on siseläbimõõduga $d = 16$ mm ja pikkusega, mis on võrdne kaevu sügavusega.

a) Kui suur peab olema pumba võimsus P , et pumbata vett vooluhulgaga $q = 30$ l/min? Pumba kasutegur on $\eta = 25$ %.

b) Missugune on maksimaalne kaevu sügavus h_m , mille korral on võimalik sellist tüüpi pumbaga kaevust vett pumbata?

Arvestada, et torus olevale veesambale mõjub lisaks teistele jõududele ka hõõrdejõud, mis põhjustab rõhu vähenemist toru pikkuse l kohta $\Delta p = c_h q^2 l / d^5$, kus $c_h = 40$ Pa \cdot s²/m². Vee tihedus $\rho = 1000$ kg/m³, raskuskiirendus $g = 9,8$ m/s² ja õhurõhk $p_0 = 100$ kPa.

Ü387 Veekahur ★★★

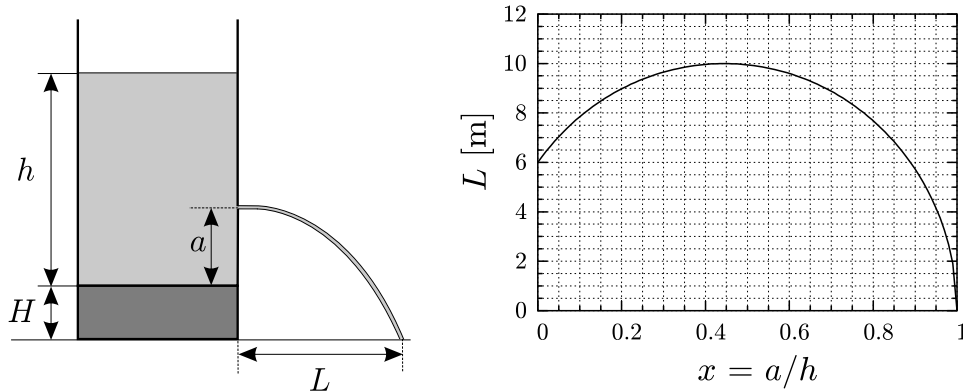
Autor: Oleg Košik, piirkonnavor, 2005, G 7

Veekahur laseb veejoaga, mille ristlõikepindala on $S = 8$ cm² ning võimsus $N = 6000$ W. Millise jõuga tabab veejuga märki, kui kahur ja märk asuvad samal kõrgusel? Vee tihedus on $\rho = 1000$ kg/m³, õhutakistust mitte arvestada. Märklaua ja veekahuri vahemaa on väike, st veejoa kõverdumisega raskusjõu toimel võib mitte arvestada.

Ü388 Veetünn ★★★

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2005, G 5

Silindriline veetünn, milles hoitakse muutumatut veetaset kõrgusega h , on tõstetud horisontaalsele platvormile, mille kõrgus maapinnast on H (vt joonist). Tünni seina kõrgusele a selle põhjast puuritakse auk. Väljuv veejuga puudutab maapinda kaugusel L platvormi jalamist. Graafikul on kujutatud kauguse L sõltuvus augu kõrgusest $x = a/h$. Määrake tünni kõrgus h ning aluse kõrgus H eeldusel, et $h > H$.



Ü389 Veejuga ★★★

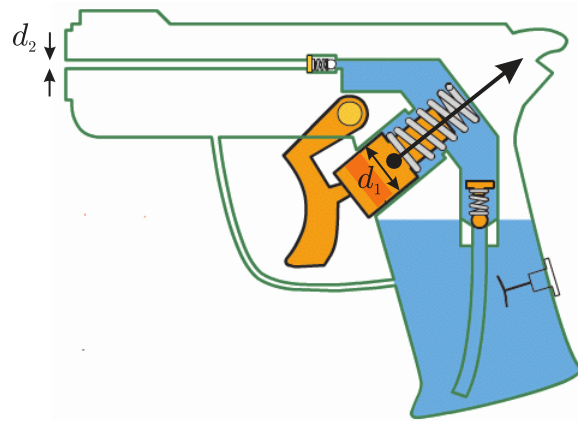
Autor: Siim Ainsaar, piirkonnavor, 2006, G 9

Vesi voolab kraanist vertikaalselt alla purki. Nagu teada, ei ole kraanist voolav veejuga silindriline. Joa raadius kraani otsa juures on $r_0 = 5$ mm, sellest kaugusel $h = 130$ mm allpool aga $r_1 = 3$ mm. Leidke aeg t , mis kulub purgi täitmiseks, kui raskuskiirendus on $g = 9,8$ m/s. Purgi ruumala $V = 1$ liiter. Pindpinevusest tingitud efekte pole vaja arvestada. Eeldada, et voolamiskiirus on iga ristlõike piires ühesugune ning keeriseid ei ole.

Ü390 Veepüstol ★★★

Autor: Valter Kiisk, lõppvoor, 2006, G 4

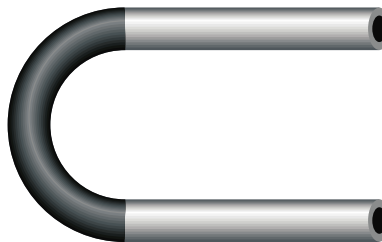
Veepüstoliga (vt joonist) tekitatakse veejuga, surudes vett läbi kitsa silindrilise suudme, mille sisediaameeter on $d_2 = 1$ mm. Päästik on ühendatud kolviga, mis saab tihedalt liikuda silindrilises torus diameetriga $d_1 = 1$ cm. Oletagem, et sõrmed suruvad päästikule jõuga $F = 20$ N (jõu rakenduspunkt ja suund on näidatud joonisel). Kui suure kiirusega väljub veejuga püstolist? Vee liikumise võib lugeda laminaarseks, vee viskoossust ja püstoli liikuvatele osadele mõjuvaid hõõrdejõude võib ignoreerida. Vee tihedus on $\rho = 1000$ kg/m³



Ü391 U-toru ★★★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2009, G 6

Teatud torustikes võib vedeliku surve olla nii tugev, et torud võivad märgatavalt deformeeruda. Vaatleme sellist deformatsiooni U-kujulises torus (vt joonist): kaks sirget pikkusega l terastoru, mille välisraadius on $\sqrt{2}$ korda suurem siseradiusest, on ühendatud sama sisemise raadiusega mittedeformeeruvast materjalist kaarukujulise toruga. Selles U-torus voolab vedelik tihedusega ρ ja konstantse voolukiirusega v .



Vedeliku hüdrostaatiline rõhk lugeda võrdseks välisrõhuga. U-toru otsad on pinnal jäigalt kinnitatud. Eeldades, et õõnsa terastoru deformatsiooni jaoks toimib Hooke'i seadus, kusjuures jäikustegur avaldub kujul $k = ES/l$ (E on terase nn Young'i konstant, S on toru ristlõike pindala ja l on deformeerimata toru pikkus), leidke toru pikenemine.

Ü392 Veeklaas ★★★

Autor: Siim Ainsaar, piirkonnavor, 2013, G 7

Silindrilisse klaasi, mille kõrgus on H ja põhja raadius r , valati vett kõrguseni h . Klaas kaeti paberilehega ja keerati tagurpidi; paberi ja klaasi vahelt voolas välja veekogus ruumalaga V . Kui paberit enam kinni ei hoitud, jäi see sellegipoolest klaasi külge, ülejäänud vesi püsis klaasis. Kui suur oli maksimaalselt paberi mass m ? Õhurõhk oli p_0 , raskuskiirendus g ning vee tihedus ρ . Kasutati kriitpaberit, mis vett ei imanud. Paberist lahtilaskmise hetkel olid õhu ja vee temperatuurid võrdsed.

Ü393 Klots vedelikes ★★★

Autor: Erkki Tempel, lahtine, 2014, G 6

Silindrilises anumus põhja pindalaga S on kaks mittesegunevat vedelikku tihedusega ρ_1 ja ρ_2 . Anumasse asetatakse kuubikujuline klots ruumalaga V ning tihedusega ρ_k ($\rho_1 > \rho_k > \rho_2$). Klots on täielikult vedelike sees ega puuduta anuma põhja.

a) Kui suur osa klotsist asub alumises vedelikus?

b) Kui palju muutub kahe vedeliku eralduspinna kõrgus pärast klotsi asetamist anumasse?

Ü394 Kuup veega ★★★

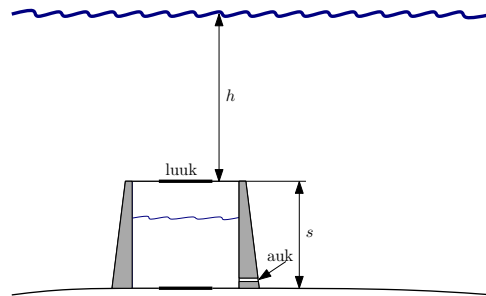
Autor: Jonatan Kalmus, piirkonnavor, 2018, G 7

Leidke veekoguse mass, mis tuleb valada kuupi, et see oleks võimalikult stabiilne, ehk süsteemi massikeske oleks võimalikult madalal. Kuubi külje pikkus on a , mass M , vee tihedus ρ . Kuubi seina paksusega mitte arvestada. Kuup on täielikult sümmeetriline ehk sellel on olemas kõik 6 identset tahku.

Ü395 Allveelaev ★★★

Autor: Mihkel Heidelberg, lahtine, 2012, G 5

Salaagent Bond põgeneb allveelaevalt selle torni kaudu. Tornis on algselt rõhk sama mis õhurõhk vee peal: $p_0 = 100 \text{ kPa}$. Pärast torni ja ülejäänud allveelaeva eraldava luugi sulgemist teeb ta seina sisse augu (vaata joonist), misjärel täitub torn osaliselt veega. Seejärel avab Bond torni laeluugi ja ujub koos vabaneva õhuga pinnale.



a) Kui paks on õhukiht, mis jääb torni enne torni laeluugi avamist ja pärast vee sissevoolamise lõppemist?

b) Kui suur ja mis suunas (üles või alla) on õhu ja vee poolt laeluugile avaldatav summaarne jõud enne avamist, kui veetase torni sees on jäänud paigale?

Luugi pindala $S = 0,50 \text{ m}^2$, veetase luugi kohal $h = 25 \text{ m}$, torni kõrgus $s = 2,0 \text{ m}$. Vee tihedus $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, raskuskiirendus $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

Ü396 Ookean ★★★★★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2005, G 8

Vee kokkusurutavuse tegur $\beta = 5 \cdot 10^{-5} \text{ atm}^{-1}$.

a) Hinnake ookeani keskmise sügavuse muutumist juhul, kui vesi oleks täielikult kokkusurumatu. Ookeani keskmine sügavus $h \approx 3800 \text{ m}$.

b) Hinnake vee tiheduste vahet $\Delta\rho$ veepinnalähedasel veel ja veel ookeani süveni põhjas sügavusel $H = 10 \text{ km}$.

Märkus. kokkusurutavuse tegur β näitab keha ühikulise ruumala vähenemist rõhu suurenemisel ühe ühiku võrra. Atmosfäär on rõhu mõõtmise ühik, mis võrdub atmosfääri normaalrõhuga merepinna kõrgusel: $1 \text{ atm} = 101\,325 \text{ Pa}$.

Ü397 Kauss ★★★★★

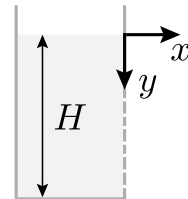
Autor: Taavi Pungas, lahtine, 2013, G 7

Silindrikujuline metallkauss massiga $M = 1 \text{ kg}$ ja ruumalaga $V_1 = 3 \text{ dm}^3$ ujub vannis. Mari teeb eksperimenti ja valab ühtlaselt $t = 1 \text{ s}$ jooksul kõrguselt $h = 1,5 \text{ m}$ kaussi kannutäie vett ruumalaga $V_2 = 1,5 \text{ dm}^3$. Ennustage eksperimendi tulemust: kas kauss läheb põhja või ei? Põhjendage oma ennustust arvutustega. Vee tihedus $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$.

Ü398 Veejoad ★★★★★

Autor: Mihkel Kree, lahtine, 2015, G 7

Vertikaalse silindrilise anumaseina sisse on paljudele erinevatele kõrgustele tehtud pisikesed augud, millest voolab välja vett. Anumasse valatakse aeglaselt vett juurde nii, et veetase anumasse püsib muutumatuna kõrgusel H . Leidke, millisesse ruumipiirkonda saab anumast väljuv vesi jõuda ehk avaldage veejogade mähispinna võrrand xy -teljestikus. Eeldage, et erinevad veejoad üksteist ei mõjuta.

**Ü399 U-toru ★★★★★** Autor: Erkki Tempel, piirkonnavor, 2016, G 9

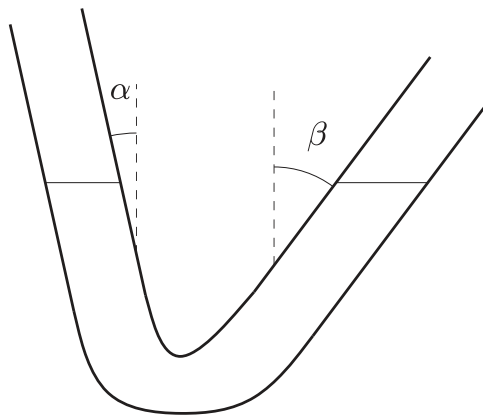
U-torusse ühtlase ristlõikepindalaga S on valatud vesi tihedusega ρ_v , nii et üle poole U-torust on veega täidetud ja kummagi täitmata osa pikkus on h . U-toru üks ots suletakse hermeetiliselt ning teise torusse valatakse aeglaselt õli kuni U-toru ülemise servani. Kui suur oli õli tihedus ρ_ω , kui on teada, et lisatud õlisamba kõrgus oli l ? Atmosfäärirõhk on p_0 .

Ü400 V-toru ★★★★★

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2008, G 8

Toomas mängib läbipaistvast aiavoolikust tehtud U-toruga. Et seekordne U-toru polegi klaasist, painutab ta üht poolt nurga α ning teist β võrra (vt joonist). Kas vedelikutaseme võnkesagedus on nüüd suurem või väiksem, mitu korda?

Märkus. Vertikaalses U-torus on vedelikutaseme võnkumise sagedus $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2S\rho g}{m}}$, kus S on toru ristlõikepindala, ρ vedeliku tihedus ning m torus oleva vedeliku mass.



Vihjed

- V1** Maksimaalse viivituse korral on palli kiirus vaevu kivi omast suurem. Selles on võimalik veenduda liikudes vabalt langevasse taustsüsteemi. Seal liiguvad vabalt langevad kehad konstantse kiirusega ning selleks, et pall ja kivi kokku pörkaksid, peaks nende suhteline kiirus olema negatiivne.
- V2** Kuna pallid on samasuguse massiga ja tegu on elastse kokkupõrkega, vahetavad pallid oma kiirusvektorid. Seega võime sama hästi öelda, et pallid lähevad üksteisest vabalt läbi.
- V3** Langemise aeg on avaldatav valemi $s = \frac{at^2}{2}$ kaudu.
- V4** Kukkumise käigus kiirenevad mõlemad kuulid sama kiirusega. Seega on nende suhteline kiirus muutumatu.
- V5** a) Energia jäävuse seaduse kohaselt kulub purustuse tekitamiseks esialgse ja pärastise kineetiliste energiatega vahe.
b) Taustsüsteemide vahetamine lihtsustab olukorda oluliselt.
- V6** Nii pudelile kui veele mõjuvad täpselt samad jõud ning neid visatakse sama algkiirusega.
- V7** Antud olukorda on mugavam vaadelda rongiga kaasa liikuvast taustsüsteemis.
- V8** Autos istujad ei tunne külgsuunalist jõudu siis, kui summaarne jõud on tee pinnaga risti.
- V9** Mäe tippu jõudmiseks peab esialgne kineetiline energia olema suurem kui hõõrdejõu ja raskusjõu ületamiseks vajalik töö.
- V10** Ülesse visatud keha vertikaalne koordinaat avaldub vastavalt liikumisvõrrandile kui $h = v_0t - \frac{gt^2}{2}$. Kuna tegu on ruutvõrrandiga, leidub fikseeritud h jaoks kaks ajahetket, mil keha sellel kõrgusel on.
- V11** Tegu on suhteliselt sirgjoonelise ballistilise probleemiga. Mootorratturi kiirus peab olema selline, et mootorratturi paraboolne trajektoor läbiks kraavi vastasnurka.

- V12** Kehtib energia jäävuse seadus. Koguenergiate vahe alg- ja lõppseisu vahel kulus hõõrdejõu ületamiseks vajalikuks tööks mõlemal mäenõlval.
- V13** Massikeskme kulgliikumise energia muundub maksimaalsele kõrgusele jõudes täielikult potentsiaalseks energiaks.
- V14** Palli koguenergia vastab geomeetrilisele jadale, sest iga järgmise pörke energia on eelnevast k korda väiksem. Saame sarnase jada, kui avaldame kahe järjestikuse pörke vahelise aja summaarse energia kaudu.
- V15** Vedrumehanismi vallandumisel muutub osa vedrudesse salvestatud potentsiaalsest energiast kineetiliseks energiaks — seega kineetilise energia jäävus ei kehti. See-eest kehtib impulsi jäävuse seadus, sest lagunemise käigus ei mõju mürsule väliseid jõude (eeldusel, et mürsk laguneb hetkeliselt).
- V16** Öönes ja homogeenne kera erinevad nende intertsimomentide poolest. Vedelikku sisaldaval keral toimub sees paratamatult hõõrdumine ning seega energia kadu vedeliku erinevate kihtide vahel.
- V17** Silla kõverusraadius on leitav Pythagorase teoreemist. Autole mõjub silla peal kaks jõudu: raskusjõud ja rõhumisjõud. Antud jõudude resultant annab kesktõmbekiirenduse.
- V18** Ülesanne näeb keerulisem välja kui see tegelikult on. Olukorda lihtsustab oluliselt asjaolu, et varras on tühiselt kerge ja libisemised hõõrdevabad.
- V19** Hoovõturaja alumises otsas on rahakott omandanud teatud horisontaalse kiiruse. Edasi hakkab rahakott liikuma mööda parabolset trajektoori, kuni see taas vastu mäe nõlva kukub.
- V20** Tikk hakkab poolkera pealt maha libisema siis, kui raskusjõu pinnaga paralleelne komponent ületab hõõrdejõu.
- V21** Fikseeritud h ja t puhul on nõlva kalle vähim siis, kui hõõrdejõud puudub.
- V22** Palli lennu kõrgus sõltub vastavale kõrgusele jõudmise aja ruudust.
- V23** a) Horisontaalsel teel peab kaubarong ületama takistava hõõrdejõu.
b) Lisaks hõõrdejõule peab rong nüüd ületama ka raskusjõu.

- V24** Pall jaotab kahuritoru kaheks kambriks. Pärast vasakpoolse membraani purustamist hakkab vasakpoolses kambriks olev gaas palli paremale poole suruma.
- V25** Kuna pall maandub kaldpinnale risti, siis liigub pall sellel hetkel nurgaga α vertikaali suhtes. Seega tulistatakse pall kahurist välja samuti nurga α all vertikaali suhtes ning pall pörkab kaldpinnalt tagasi sama nurga all.
- V26** Vastavalt Newtoni III seadusele on nööri tõmme mõlema mehe jaoks sama suur, kuid vastupidises suunas. Lisaks nööri tõmbele mõjub kummalegi mehele vastassuunas hõõrdejõud.
- V27** Hõõrdejõu tõttu kulutatud energia sõltub läbitud teepikkusest ja selle kaldest, potentsiaalse energia vahe sõltub kõrguse muudust.
- V28** Löögi hetkel kehtib impulsi jäävus, aga energia ei säili. See-eest säilib mehaaniline energia pärast pörget toimuval liikumisel.
- V29** **a)** Maksimaalse eemaldumise korral moodustub Maast, Veenusest ja Päikesest täisnurkne kolmnurk, mille täisnurga tipp on Veenus.
b) Maa ja Veenuse suhtelise nurga (Päikeselt vaadatuna) muutus on avaldatav planeetide nurkkiiruste vahe kaudu.
- V30** Nii auto liikumisse kui ka mootori tööse minevad võimsused on avaldatavad rataste ja maa vahelise hõõrdejõu kaudu.
- V31** Tellise eemaldumise hetkel on vedru alumine ots paigal, aga ülemine ots liigub tellisega sama kiirusega ülesse.
- V32** Pendli perioodi leidmiseks on võimalik teha esialgne jäme hinnang, mis põhineb järjestikustel mõõtmistel. Täpsema hinnangu jaoks võib kasutada esialgset jämedat hinnangut ja pikemat ajavahemikku, et määrata täpselt mitu võnget antud ajavahemiku sisse mahub.
- V33** Jõudes kukkumise madalaimasse punkti, on alpinisti potentsiaalne energia läinud üle vedru potentsiaalseks energiaks. Pannes vastava seose kirja, on võimalik leida nööri pikenemise x .
- V34** Nii Jukule kui ka Juhanile mõjub sama koefitsiendiga õhu hõõrdejõud, mis on raskusjõu poolt täielikult tasakaalustatud.

- V35** Piirjuhul läheb kogu Juku potentsiaalne energia hõõrdejõu poolt eraldatud soojusenergiaks.
- V36** Auto kineetiline energia kulub pidurdusjõu ületamiseks ning potentsiaalse energia muuduks.
- V37** Selleks, et leida tegelikku kuuli kõrgust Maa pinnast, võib rakendada energia jäävuse seadust kuuli laskmise hetkel ja trajektoori kõrgeimas punktis.
- V38** Koormisele mõjuvad kolm jõudu: niidi pinge, raskuskiirendus ja kesktõmbekiirendus. Lisaks peab resultantjõud olema risti nööriiga, sest vastasel juhul peaks koormise kiirenemisel nõör venima või lühenema.
- V39** Poole pedaalipöörde jooksul peab ratturi poolt tehtav töö kompenseerima ratta massikeskme tõusmisest kaasneva potentsiaalse energia muudu.
- V40** Aerulabadele mõjuv keskmine jõud on leitav jõumomentide tasakaalust tuldude suhtes. Keskmise kiirusega liikuva paadi puhul kehtib jõudude tasakaal aerulabadele mõjuva jõu ja takistusjõu vahel.
- V41** Kivile mõjuva paela tõmbepinge T ja raskusjõu mg resultant on kesktõmbejõuks, mis on suunatud horisontaaltasapinnas sissepoole.
- V42** Ülesannet on mugavam vaadelda x - y teljestikus, mis kulgeb vastavalt pikki ja risti kaldpinda. Sellisel juhul muutub peale igat pörget kiiruse y -komponent vastupidiseks.
- V43** Kuulikese kiirus on leitav energia jäävuse seadusest. Edasi taandub ülesanne ekstreemumpunkti leidmisele.
- V44** Eraldumiskõrgust on kõige mugavam leida jõudude tasakaalust silindri keskpunkti radiaalsihis. Lisaks kehtib energia jäävuse seadus.
- V45** Veepind võtab asendi, mis on risti sellele mõjuva resultantjõuga. Liikudes veoautoga seotud süsteemi, näeme, et resultantkiirendus on $\vec{g} - \vec{a}$.
- V46** Autole mõjuvad raskusjõud ja tee toereaktsioon. Silmuses püsimiseks ei tohi toereaktsioon kaduda. Kriitiline olukord tekib silmuse ülemises punktis, sest siis on auto kiirus vähim ning raskusjõud tõmbab autot maksimaalselt teest eemale.

- V47** Torust väljuv vesi liigub nagu vabalt langev keha horisontaalsuunalise algkiirusega v . Seega on veejuga parabooli kujuga, mille parameetrid saab jooniselt mõõta.
- V48** Kuul liigub mööda paraboliselt trajektoori, kusjuures kiiruse horisontaalne komponent püsib konstantne, st $v_x = \text{Const} = v \cos \alpha$, ning vertikaalne komponent on ühtlaselt kiirenev $v_y = v \sin \alpha - gt$.
- V49** Silindri impulsimoment ei muutu telje suhtes, mis läbib silindri ja pinna kontaktpunkte, sest hõõrdejõul puudub jõuõlg selle telje suhtes.
- V50** Liiga suure kiiruse korral hakkab veok tsentrifugaaljõu tõttu väliskurvis oleva serva suhtes ümber pöörama. Seega peab piirjuhul antud telje jaoks keh-tima jõumomentide tasakaal.
- V51** Kriitilise kiiruse korral on palli trajektoori kõverusraadius sfääri tipp punktis võrdne sfääri raadiusega. See tähendab, et pallile mõjuva raskuskiirenduse tasakaalustab kesktõmbe kiirendus v^2/R .
- V52** Kui põrnikas (massiga ρV) roomab mööda anuma põhja, siis selle peale liigub ka põrnikat ümbritsev vedelik. Põrnika liikumist võib mugavuse mõttes ette kujutada virtuaalse põrnika liikumisega, mille tihedus on $\rho - \rho_0$. Sellisel juhul liigub virtuaalne põrnikas vedelikku tõrjumata ning ülesanne taandub mugavamale dünaamika ülesandele.
- V53** Arvestades mullide arvu jäävust on ruumiline vahemaa nende vahel võrdeline mullikeste kiirusega. Viimane on leitav võrdsustades takistus- ja üleslükkejõu ning arvestades mullikese ruumala muutust rõhu tõttu.
- V54** Ülesandes niidi pinge T teada, aga see on leitav pannes plokkide jaoks kirja Newtoni teise seaduse ning niidi venimatuse tingimuse. Massikeskme kiirenduse avaldamine plokkide kiirenduste kaudu on analoogne massikeskme koordinaadi avaldamisega plokkide koordinaatide kaudu.
- V55** Ragulkas salvestunud potentsiaalne energia muundub täielikult kivi kinetiliselt energiaks. Kummipaelale rakendatav jõud on leitav kummipaela pinge projektsioonist kivi lennu sihilisele teljele.
- V56** Mehaaniline pingeline rõngas on määratud tsentrifugaaljõu poolt, millega rõngast radiaalselt väljapoole tiritakse. Pinge täpseks määramiseks on mugav vaadelda väikest rõnga juppi ning sellele mõjuvate jõudude tasakaalu.

- V57** Maaleri asendi ohtlikkust võib hinnata tema kiirusega vahetult enne maapinnaga kokkupuutumist. Vastavad kiirused on leitavad energia jäävuse seadusest.
- V58** Hüppe käigus säilib energia, ehk hüppaja kineetilise energia ning hüppaja ja kõie potentsiaalsete energiatega summa on konstantne. Hüppaja kiirus on maksimaalne, kui talle mõjuv summaarne jõud on null, sest see vastab kiirenemise ja pidurdamise ülemineku punktile.
- V59** Jagunemise käigus peab säilima summaarne impulss ning energia. Osakeste kiirusi on mugavam vaadelda komponentide kaupa. Selleks võib võtta, et x -telg on molekuli esialgse suunaga paralleelne ning y -telg sellega risti.
- V60** Kokkupõrke käigus kehtib mõlema massi jaoks kangireegel. Lisaks kehtib kokkupõrge seni, kuni massid pöörlevad ümber kiige sama nurkkiirusega.
- V61** Vesiniku aatomi ioniseerimiseks peab elektroni kineetiline energia olema suurem kui E_0 . Elektroni ja prootoni kokkupõrke käigus säilib nii summaarne kineetiline energia kui ka impulss.
- V62** Toru lõpus järsult pöörav vesi surub toru teatud jõuga külgsuunas. Antud jõud on leitav, kui vaadelda ajaühikus väljuva veehulga impulsimuutu siseneva veega võrreldes.
- V63** Kuna pöörde on elastne, säilib pöörde käigus kineetiline energia. Impulsi kohta sama aga ei saa öelda, sest pöörde ajal mõjuvad kinnituspunktile jõud. Küll aga säilib süsteemis summaarne impulsimoment kinnituspunkti suhtes, sest pöörde ajal on kinnituspunktile mõjuvate jõudude õlad nullid ning pöörde toimub nii kiiresti, et raskusjõuga pole vaja arvestada.
- V64** Ratturile mõjuvad laskumisel kolm jõudu: mäest allaviiv raskusjõud, takistav hõõrdejõud ning tuuletakistus. Rattur on saavutanud lõppkiiruse, kui need jõud on tasakaalustunud.
- V65** Vaatamata sellele, et tundmatu kuuli mass ja vedru jäikus pole teada, võib neid ikkagi tundmatutena kasutada ning loota, et need lõppvastuses välja taanduvad.

- V66** Reisijale mõjub kolm omavahel ristiolevat kiirendust: raskuskiirendus, kesktõmbekiirendus ja joonkiirendus.
- V67** Niidis kaob tõmbejõud, kui raskusjõu niidisuunaline komponent saab võrdseks tsentrifugaaljõuga. Kuuli kiirus asendis 3 on leitav energia jäävuse seadusest.
- V68** Märkame, et kuna hõõrdejõud puudub, ei mõju süsteemile summaarset jõudu. Seega jääb klotsi ja palli summaarne massikese paigale.
- V69** Ühe pörke käigus kehtib impulsi jäävus, aga mitte energia jäävus. Selle põhjal on võimalik määrata hõõrdejõu ületamiseks kulunud töö ühe pörke jooksul ning saadud avaldis summeerida kogu vaia ulatuses.
- V70** Kuna suur keha liigub kahe pörke vahel teatud vahemaa võrra allapoole, ei toimu kokkupõrked iga t tagant vaid natukene tihedamalt. Selleks, et leida, missuguse impulsi kuulike suurele kehale üle kannab, tasub kokkupõrget vaadelda suure keha süsteemis. Eelduse $m \ll M$ kohaselt on kokkupõrge võrreldav seinaga kokku pörkamisega.
- V71** Noole algkiirus on leitav lähteandmetest. Edasi peab nool tabama punkti koordinaatidega $(200 \text{ m}; -0,7 \text{ m})$ alguspunkti suhtes. Selle jaoks saab kirja panna liikumisvõrrandi nii x - kui ka y -koordinaadi jaoks.
- V72** Olukorda on mugav vaadelda autoga kaasa kiirenevas taustsüsteemis. Sellisel juhul rakendub autole kuus jõudu ning peab kehtima jõudude ning jõumomentide tasakaal.
- V73** Latile mõjub igas punktis hõõrdejõud, mis on vastupidine selle punkti liikumissuunale. Kogu mingile osale mõjuv hõõrdejõud on seega võrdeline selle osa pikkusega. Lisaks on teada, et hõõrdejõud üritavad takistada nii lati kulgliikumist kui ka selle pöörlemist.
- V74** Tükikeste trajektooride järgi saab võrrelda kiiruste suundasid ja suuruseid, sest $s = vt_s$, kus t_s on säriaeg. Lisaks kehtib impulsi jäävus. Kuna klaaskuul kukkus otse alla, peab summaarne pörandaga paralleelne impulss olema 0.

- V75** Ülesandes on kolm tundmatut: keskmiste plokkide kiirendused, äärmiste plokkide kiirendused ning niidi pinge. Vastavate tundmatute leidmiseks on vaja kolme võrrandit, kaks tulenevad Newtoni II seadusest ning üks tuleb niidi venimatuse tingimusest.
- V76** Õõnsusega kera saab vaadelda positiivse tihedusega täidetud kera ja õõnsuse suuruse negatiivse tihedusega kera superpositsioonina. Sellisel juhul saab mugavalt kirja panna jõumomentide tasakaalu mõlema stsenaariumi jaoks.
- V77** Lihtsuse huvides tasub pallide kiirusi komponentide järgi vaadelda. Vertikaalne komponent v_z , horisontaalkomponent pikki jalgpallureid ühendavat sirget v_y ning risti selle sirgega v_x . Kokkupõrke hetkel peab risti jalgpallureid ühendava sirgega läbitud vahemaa mõlemal pallil sama olema.
- V78** Esimesena on vaja leida, missugune on keermete pinnanormaali ja pöörlemistelje vaheline nurk α . Selleks on mugav vaadelda mutrivõtme pinna jaotust. Selleks, et mutreid saaks kõvasti kinni keerata, peab hõõrdejõud tasakaalustama keermete suunas mõjuva jõu komponendi.
- V79** Paneme tähele, et niidi pinge alumises nööris on kaks korda väiksem kui ülemises nööris. Selles saab veenduda, kui vaadelda alumisele plokile mõjuvaid jõudusid. Lisaks saab mõlema nööri jaoks kirja panna nende venimatuse tingimuse.
- V80** Auto taustsüsteemis mõjub auto massikeskmele jõud Ma , kus a on auto kiirendus. Lisaks mõjub tagaratastele hõõrdejõud ning mõlemale rattale toereaktsioon. Ülesande eelduste kohaselt peab mõlema poolperioodi jooksul kehtima jõudude ja jõumomentide tasakaal.
- V81** Otsitavate suuruste jaoks on kasulik vaadelda lühikest ajavahemikku Δt , mille jooksul on rongi kiirus, ja seega hõõrdetegur, ligikaudu konstantsed. Seejärel saab saadud ajavahemikke summeerida terve graafiku ulatuses. Selle jaoks peab vajadusel konstrueerima uued graafikud teistsuguste telgedega.
- V82** Väikse keha hetkelise liikumise käigus püsib mobiil+keha massikeske paigal. Seega liigub mobiil iga τ tagant sarnaselt kehaga hetkeliselt ülesse või alla. Iga kord kui mobiil ülesse liigub, nihkub ta gravitatsiooni tõttu ka veidike laua sihis edasi.

- V83** Kildude koguimpulss on null, seega moodustavad impulsvektorid kolmnurga, mille sarnasustegurid on võimalik kildude liikumissuundadest taastada. Sarnaselt saab toimida kildude kineetilise energia ja libisemiskaugustega.
- V84** Juhul, kui süsteemi massikeskme kõrgus on $x(t)$, siis Newtoni II seaduse kohaselt $M\ddot{x}(t) = F - Mg$, kus M on süsteemi kogumass ja F kaalu näit. Seega taandub ülesanne $x(t)$ leidmisele liivakella töörežiimis.
- V85** Üks võimalus sisemise silindri kiirenduse leidmiseks on rakendada virtuaalse nihke meetodit. Selle jaoks tuleb vaadelda, kuidas muutub süsteemi kineetiline ja potentsiaalne energia siis, kui sisemine silinder kerkib vahe-maa x võrra. Olles avaldanud süsteemi koguenergia x kaudu, võib sellest tuletise võtta ning võrdsustada selle 0-ga.
- V86** Vastu maapinda kukkudes jääb kast hetkeliselt paigale ning koormis hakkab võnkuma ümber uue tasakaaluasendi ehk ümber punkti, kus vedru pinge tasakaalustab koormisele mõjuva raskusjõu. Järgneva liikumise käigus on kõige kriitilisem punkt see, kus koormis on kõige kõrgemas punktis. Sellisel juhul on kastile mõjuva vedru jõud maksimaalne.
- V87** Punkti B kiirust on võimalik leida, kasutades varraste venimatust ning asjaolu, et A on fikseeritud. Punkti B kiirenduse AB -sihilist komponenti saab leida kesktõmbekiirenduse kaudu ning kiirenduse suuna määramiseks on kasulik minna kiirusega \vec{v} liikuvasse taustsüsteemi.
- V88** Teisest ja kolmandast kuulist koosnevale süsteemile mõjus esimese kuuli lükkamise ajal esimese varda sihiline jõud, sest teatavasti mõjuvad kerge-tele varrastele vaid varda sihilised pinged. Lisaks peab esimese kuuli lükkamise ajal kehtima varraste venimatuse tingimus. Kiirenduse leidmiseks on süsteemi mugav vaadelda šarniirse ühenduspunk-tiga kaasa liikuvast ja kiirenevas taustsüsteemis ning seejärel rakendada New-toni II seadust.
- V89** Ampermeetri ja voltmeetri pingete summa peab olema võrdne klemmidele rakendatava pingega nii enne kui ka pärast takisti ühendamist.
- V90** Kuna voltmeedit on ühesugused, võib need asendada takistustega R .

- V91** Jooniselt näeme, et äärmised takistid on lühistatud, mistõttu need mõõteriistade näitu ei mõjuta.
- V92** a) Takisti peab tagama selle, et lampide pinge ei ületaks nominaalpinget ükskõik missuguse lambi sisetakistuse väärtuse korral
b) Lampide oodatavast tuhmimalt põlemine on põhjustatud alaldi sisetakistusest.
- V93** Koormisel eralduv võimsus on pinge ja voolu korrutis. Seega on vaja graafikult leida x - ja y -koordinaadi korrutise maksimum.
- V94** Kuigi pingeallika pinge ja lampide takistused pole teada, võib neid kasutada muutujatena ja vaadata, kas need taanduvad lõppvastuses välja.
- V95** Mõlema kontuuri jaoks saab rakendada Ohmi või Kirchhoffi seadusi.
- V96** Otsitav suhe I_2/I_1 on mugavalt avaldatav Ohmi seadusest, ülejäänud on võrratustega manipuleerimine.
- V97** Mõlema kontuuri jaoks saab rakendada Ohmi seadust või Kirchhoffi seadusi.
- V98** Takistuse leidmiseks tasub tetraeedri pinna jaotus joonistada ning ära kasutada sümmeetriat.
- V99** Sümmeetria kaalutlustel saab skeemis sama potentsiaaliga punkte kokku ühendada.
- V100** Kogutakistuse määramist lihtsustab skeemi kavalam ümber joonistamine.
- V101** Kuna kondensaatorid on enne lüliti sulgemist laadimata, on ka pinge nende klemmidel 0.
Pärast pika aja möödumist on kondensaatorite laeng jõudnud stabiliseerida ehk vool läbi kondensaatorite on 0. Teisisõnu võib kondensaatorid efektiivselt skeemist lahti ühendada.
- V102** Ülesandes on neli tundmatut: vooluallika pinge, takisti takistus ning ampermeetri ja voltmeetri sisetakistused. Nelja tundmatu jaoks on vaja nelja võrrandit ning need tulenevad ülesandes antud ampermeetri ja voltmeetri näitudest.

- V103** Teades, et päripidise voolu korral võib diodi klemmid lugeda lühistatuks ning vastuvoolu korral isoleerituks, võib koostada esialgse skeemi asemel mõlema polaarsuse korral diodideta ekvivalentsed skeemid.
- V104** Kuna süsteemi stabiilses olekus on kondensaatorite pinge konstantne ei läbi neid ka vool.
- V105** Süsteem saab töötada kolmes erinevas režiimis. Esiteks, kui pinge on piisavalt madal või kõrge, on kõikide elementide takistus vastavalt $1\ \Omega$ või $2\ \Omega$. Vahepealse pinge väärtuse korral on vasakpoolse elemendi takistus $2\ \Omega$ ja parempoolsetel $1\ \Omega$. Teisi režiime ei ole, sest vasakpoolse takisti pinge on alati suurem kui parempoolsetel ning seega ei saa vasaku takisti takistus olla väiksem kui parempoolsetel.
- V106** Asjaolu, et voltmeeter näitab $\frac{U}{2}$, vihjab kondensaatorite jadaühendusele C ja D vahel.
- V107** Esimesel tekstis kirjeldatud juhul on kondensaatori pinge elektriskeemi sisselülitamise hetkel $0\ \text{V}$, sest lüliti "väljasendis" on takisti ja kondensaator jadamisi ühendatud. Teisel juhul on kondensaatori pinge koheselt pärast vooluallika polaarsuse muutmist $9\ \text{V}$. Nende teadmistega saab leida takisti pinge mõlemal juhul ja kirja panna vastavad tingimused takisti läbipõlemise ja mitte läbipõlemise jaoks.
- V108** Mõlemat tüüpi traadijuppide pikkused peavad olema sellised, et esiteks, summaarne takistus on $1\ \Omega$ ning teiseks, temperatuurist sõltuvus oleks võimalikult väike. Temperatuurist sõltuvuse leidmiseks tuleb kasutada ülendes antud temperatuurikoefitsente.
- V109** Lõpmatust ahelast ühe lüli eemaldamisega summaarne mahtuvus ei muutu.
- V110** Kõigepealt tasub leida lühikese traadijupi takistus ning seejärel üritada saadud avaldist summeerida terve traadi ulatuses.
- V111** Patarei tehtud töö ajaühikus Δt on $UI\Delta t$. Kondensaatorisse salvestava energia muutumise kiirus on leitav võttes kondensaatori siseenergiast $\frac{CU^2}{2}$ aja järgi tuletise.

- V112** Peegelsümmeetria tõttu ülemises ja alumises takistis (R_2 ja R_4) vool puudub.
- V113** Takistid saavad omavahel olla kas kolmnurk- või tähtühenduses. Ampermeeter ei saa olla otse väljundklemmide vahele lülitatud, sest siis põleks see vastavale klemmipaarile pinge rakendamisel läbi. Samuti ei saa see olla ühegi takistiga rööbiti lülitatud, sest siis ei läbiks vastavat takistit kunagi vool ning sisuliselt tähendaks see takisti asendamist null-takistusega.
- V114** Elektriskeemi käitumisest arusaamiseks tasub skeem selgemalt ümber joonistada, nii et ampermeeter on asendatud juhtmega ja voltmeeter lihtsalt kõrvaldatud.
- V115** Eesmärk on leida elektriskeem, kus igale lambile langeb viiendik klemmipingest. Mõistlik on kõigepealt proovida võimalikult lihtsaid korrapäraseid lampide konfiguratsioone. Näiteks saab lambid asetada rööpühendusse, kus igas harus on kas 1, 2, 3, 4, 6 või 12 lampi.
- V116** a) b) Peale pikka aega on kondensaatoreid läbiv vool null, sest nende pinged, ja seega laengud, on stabiliseerunud. Seega võib kondensaatorid efektiivselt süsteemist välja lõigata.
c) Elimineerides süsteemist vooluallika, peab kehtima laengu jäävuse seadus.
- V117** Süsteemis kehtib laengu jäävus, st alamsüsteemis, mis koosneb ülemisest sõlmpunktist ja sellega ühendatud kolmest kondensaatori plaadist peab alati olema summaarse laenguga $-q$. See kehtib sellepärast, et laengud saavad liikuda ainult mööda metalli ning ei saa eelmainitud alamsüsteemist õhu kaudu lahkuda.
- V118** Kuna tegemist on jadaühendusega, siis on voolutugevus läbi kõikide vooluelementide sama. Lisaks peab pingelang üle kõikide vooluelementide olema 0.
- V119** Kuna elektriskeemis on mitu patareid ja vooluallikat, tuleb Kirchhoffi seadused ettevaatlikult iga kontuuri jaoks kirja panna. Juhul, kui lüliti on suletud, on vooluallikas efektiivselt lühistatud ning ülejäänud süsteemi järelikult ei mõjuta.

- V120** Takistuste leidmiseks tasub kõik $1\ \Omega$ takistuste kombinatsioonid läbi vaadata ning süstemaatiliselt valed konfiguratsioonid elimineerida.
- V121** Mõlema ülesandes antud tingimuse jaoks on võimalik kirja panna vastav võrrand (kasutades näiteks Kirchhoffi seadusi) ning saadud võrrandisüsteemi lahendid peaksidki olema R_1 ja R_2 .
- V122** Ülesandes peab käsitlema kahte juhtu: a) kui mõõtepunkt ei asu vaguni rataste vahel ja b) kui mõõtepunkt asub vaguni rataste vahel. Mõlemal juhul käitub tekkiv elektriskeem isemoodi.
- V123** Paneme tähele, et sümmeetria tõttu on lampide 1 ja 4 otspunktide potentsiaalid võrdsed.
- V124** Nominaalses töörežiimis on iga valgusdiodi pinge U_d ja vool maksimaalselt 20 mA. Teades võrgupinge maksimaalset pinget on võimalik leida takisti takistus ja maksimumvõimsus. Ühe täisperioodi jooksul tuleb pingelanguse muut kondensaatoril takisti arvelt. Seejuures on kondensaatori plaatide laengumuut leitav täisperioodi pikkusest ja ahela voolutugevusest.
- V125** Oluline on tähele panna, et diodidel saab pärioolu korral pingeks olla ainult 1,0 V. Tasub vaadata, kas rohkem kui ühel diodil saab üldse vastava skeemi korral selline pinge olla.
- V126** Et ampermeetrite sisetakistus on 0, siis võime need lühistada: kõigis nendes tippudes, kuhu viivad ampermeetrid, on potentsiaalid võrdsed. Sümmeetria tõttu peab see potentsiaal jääma täpselt patareiklemmide potentsiaalide vahepeale, seega on igale takistile rakendatud pinge 3 V.
- V127** Pärast lüliti avamist eraldub kogu energia kondensaatorilt lambis soojuseks. Lisaks on kogu vabanev soojusenergia võrdne patarei kogutööga.
- V128** Ülesande peamisi raskusi on korrektselt määrata ülesande tekstiga ekvivalentne elektriskeem. Peale elektriskeemi määramist taandub ülesanne stabiilse režiimi leidmisele. See on tehtav näiteks Kirchhoffi seadustega.

- V129** Kirchhoffi esimese seaduse põhjal peab suvalise pinge ja voolutugevuse korral kehtima $V = U - IR$, kus V on pinge türistoril. Kandes vastava funktsiooni volt-amperkarakteristikule on näha, et mingi pinge U korral on I ja V jaoks kuni kolm lahendit, kusjuures negatiivse tõusuga punkt ei ole stabiilne, kuna vastaks negatiivsele takistusele. Antud informatsiooniga on võimalik määrata, kuidas türistorit läbiv vool muutub pingeallika pinge tõstmisel.
- V130** Kuulikesele mõjub nii raskusjõud kui ka elektrostaatiline jõud. Nende tulemusena hakkab kuul konstantse kiirendusega vertikaalselt üles liikuma.
- V131** Kehtib laengute jäävus — valides suvalise suletud pinna, peab pinda läbiv vool olema võrdne pinna sisse jääva summaarse lekkevooluga.
- V132** Sümmeetria tõttu mõjuvad kõikidele kuulidele radiaalsed sama väärtusega elektrostaatilised jõud, mis on niitide pingete poolt tasakaalustatud. Lisaks paneme tähele, et kuna niidid on identsed ning sama palju veninud, peavad kõikide niitide pinged võrdsed olema.
- V133** Tolmukübemel kehtib jõudude tasakaal raskusjõu ja elektrostaatilise jõu vahel.
- V134** Kehtib energia jäävuse seadus, kus peame arvestama nii gravitatsioonilise kui ka elektrilise potentsiaalse energiaga.
- V135** Põhimõtteliselt on võimalik leida elektroni kiirendus rõnga poolt tekitatud elektriväljas ning seda integreerida, aga märgatavalt lihtsam on rakendada energia jäävuse seadust ning kasutada rõnga poolt tekitatud potentsiaalset energiat. Punktlaengu q poolt tekitatud potentsiaal kaugusel r on $k\frac{q}{r}$.
- V136** Ioonide kiirus on leitav energia jäävusest. Soni ja ionide kiiruse sidumiseks on kõige mugavam rakendada impulsi jäävust.
- V137** Plaatide vahel mõjub elektronile elektrivälja poolt allapoole suunatud kiirendus. Seega on elektroni kiirus plaatide vahelisest ruumist väljumisel minimaalne siis, kui elektroni trajektoor möödub alumise plaadi parema otsa lähedalt.

- V138** Elektronkahurist aja Δt jooksul eralduva elektronide kogumi summaarne impulss on võrdne impulsi jäävusest elektronkahurile mõjuva jõu ja Δt korrutisega. Individuaalse elektroni impulss on leitav energia jäävuse seadusest.
- V139** Selleks, et siduda elektronide kiirust ekraani-sihilise nihkega tasub ülesanne jagada kaheks eraldi osaks: elektronide viibimine plaatide vahel ning plaatide ja ekraani vahelises ruumis. Esimeses osas mõjub elektronile ühtlane kiirendus, teises osas liigub elektron sirgjooneliselt.
- V140** Kasulikuks võib osutada superpositsiooniprintsiipi, mille kohaselt võib välja lõigatud ruutu tekitatud välja leida kui $+$ ja $-$ laenguga ruutude väljade summana.
- V141** Osakese asukohta on mugavam leida vaadeldes eraldi osakese x - ja y -koordinaate. Laengu keskmine kiirus on leitav perioodi jooksul sooritatud nihke ja perioodi suhtena.
- V142** Kuna sfäärid on traadiga ühendatud, peavad need sama potentsiaaliga olema.
- V143** Väikeste y -suunaliste võnkumiste jaoks on kasulik vaadata, missugune jõud kerale mõjub, kui seda väikse distantssi y võrra tasakaaluasendist eemale nihutada.
- V144** Kondensaatorid on pingesallikaga ühendamisel jadamiis ning kondensaatorite C_1 ja C_2 kogutakistus jadamiis on $(1/C_1 + 1/C_2)^{-1}$. Kuna osakesele mõjuvad elektrijõud on esialgse liikumissuunaga risti, kuulub mõlema kondensaatori läbimiseks sama aeg, kusjuures kondensaatorite vahel mõjub osakesele konstantne kiirendus.
- V145** Kärbsse potentsiaali on mugav avaldada $x - y$ koordinaadistikus. Ülesande sümmeetriast on suhteliselt lihtne näha, et kärbsse kaugus laengust on minimaalne siis, kui ta asub otse laengu kohal.
- V146** Elektrivälja lisamisel nihkub kuuli tasakaaluasend kas üles või alla, sõltuvalt elektrivälja suunast. Seega on igat poolperioodi mõistlik eraldi vaadata, sest selle raames liigub kuul ümber fikseeritud tasakaaluasendi.

- V147** Klotside läbitav vahemaa on leitav energia jäävuse seadusest. Nimelt on klotsid paigal nii alg- kui ka lõppasendis ning ainus viis soojuse eraldamiseks on hõõrdejõu kaudu, mis on omakorda avaldatav alg- ja lõppasendi potentsiaalsete energiatega vahel.
- V148** Hetkel, mil kuulide vahekaugus on minimaalne, peab massikeskme taustsüsteemis mõlemad kuulid ja kosmoseprügi paigal olema. Vastasel korral ei oleks kuulide vahekaugus minimaalne, sest kuulid liiguksid üksteise suhtes.
- V149** Vastuse leidmiseks ei pea leidma täpset avaldist koonuse tipu potentsiaali jaoks, vaid piisab võrdelisuse seaduse leidmisest koonuse laengu ja lineaarmõõtmega suhtes. Potentsiaalide jaoks kehtib ka superpositsiooniprintsiip ehk lõplik potentsiaal on esialgse koonuse potentsiaali ja ärälõigatud koonuse potentsiaali vahe.
- V150** Kuivõrd potentsiaal sõltub ainult x -koordinaadist, on elektrivälja kõikjal x -telje sihiline ning impulsi y -komponent säilib. Täielik "sisepeegeldus" toimub siis, kui positiivse x -suunaga seotud kineetiline energia on suurem kui qU .
- V151** Metallplaati sisse viies kondensaatori plaatide laeng säilib, aga pinge muutub. Kuna metallplaadi sees elektrivälja ei ole, on pingelang üle kondensaatori kaks korda väiksem, sest elektriväljaga täidetud piirkond väheneb $d/2$ võrra.
- V152** Mahtuvuse leidmiseks võib kondensaatorit vaadelda kui kahte jadamisi ühendatud dielektrikuga kondensaatorit. Selleks asetame mõttelise metallplaadi dielektrilise kihi eralduspinnale. Eralduspinna laengu leidmiseks võib rakendada Gaussi teoreemi mõttelise "karbi" jaoks, mis hõlmab piirpinda.
- V153** a) Seni kuni üks laeng on piirkonnas $x > 0$ ning teine piirkonnas $x < 0$, on pulgale mõjuv summaarne jõud 0; see tähendab, et pulk liigub konstantse kiirusega. Kui mõlemad laengud on piirkonnas $x > 0$, mõjub pulgale elektrivälja poolt summaarne konstante jõud.
b) Antud juhul sõltub pulgale mõjuv jõud lineaarselt pulga nihkest x .

- V154** Metallkeradele indutseeritakse elektrivälja poolt võrdsed ja vastasmärgilised laengud $\pm q$; kuivõrd traat on peenike, siis võime ignoreerida sellel olevaid laenguid. Kuna metallkuulid käituvad nagu elektriline dipool, on süsteem tasakaalus siis, kui metalltraat on paralleelne elektriväljaga. Et traat on juhtivast materjalist, siis on süsteem ekvipotentsiaalne.
- V155** Elektrivälja indutseerib kuulidele vastasmärgilised laengud, mis tagavad, et kuulide potentsiaalid on võrdsed.
- V156** a) Kuulide ruutkeskmise kiiruse on maksimaalne siis, kui elektriline potentsiaal on minimaalne, st siis, kui nõõride vahel on sirgnurk. Rakendades sümmeetriat ja impulsi ning energia jäävust, on võimalik antud olukorras kuulide kiirused leida.
 b) Paneme tähele, et A kiireneb sümmeetria tõttu vertikaalselt. Peale kuulide vahelise tõukejõu tuleb arvestada ka niidi pingega.
- V157** Pumpamise käigus kehtib ideaalse gaasi olekuvõrrand.
- V158** Ideaalse gaasi olekuvõrrandist on võimalik leida seos esialgse ja pärastise õhu ruumala vahel.
- V159** Kõrgusega h veesamba lisarõhk on ρgh . Sukeldumise käigus kehtib ideaalse gaasi olekuvõrrand.
- V160** Ühe molekuli keskmine kineetiline energia temperatuuril T avaldub kui $\langle E_m \rangle = \frac{3}{2}kT$.
- V161** Suurima võimaliku koormise massi korral on õhupalli keskmine tihedus võrdne õhu tihedusega.
- V162** Kuna manomeeter ja mõõteampull on kapillaari kaudu ühenduses, siis nende gaasirõhud on isegi temperatuuride erineedes ühesugused.
- V163** Kui ajavahemiku Δt jooksul kandub tiivikust läbi õhumass kineetilise energiaga ΔE , siis sellele vastav võimsus on $P = \frac{\Delta E}{\Delta t}$.
- V164** Ülesannet on mugav lahendada uurides ajavahemikku Δt ning vaadeldes, kuidas rongist eraldunud võimsus soojendab rongist möödunud õhu molekule.

- V165** Nii Maal kui ka Marsil peab õhupallile mõjuv üleslükkejõud kompenseerima koormise raskusjõu. Üleslükkejõud sõltub õhu tihedusest ning õhu tihedus on leitav ideaalse gaasi olekuvõrrandist.
- V166** Ideaalse gaasi olekuvõrrandiga on võimalik määrata, mis õhu ruumalaga avariiventiil avaneks. Õhu ruumala muutust on aga võimalik avaldada vajaliku vee tiheduse muudu.
- V167** Kuna balloon on silindrikujuline, on pinged selle telje sihis ning sellega ristuvast sihis erinevad. Mõlemal juhul peab ballooni seinas olev jõud tasakaalustama balloonisisese gaasi rõhu põhjustatud jõu.
- V168** Kerisele visatud vee tekitatud lisarõhk on leitav ideaalse gaasi olekuvõrrandist. See rõhk mõjub ühtlaselt üle kogu ukse laiuse, seega tuleb uksele mõjuva jõumomendi arvutamisel võtta jõu õlaks pool ukse laiusest.
- V169** On selge, et rehvi pumpamisel on rakendatav jõud võrdeline rehvis oleva rõhuga (õhurõhu suhtes). Rakendades jõudude tasakaalutingimust rehvi kokkupuutepinnale maaga, on võimalik leida kokkupuutepinna pindala, millest saab omakorda avaldada rehvi deformatsiooni ning rattarehvi ruumala muudu. Rattarehvi ruumala muutust tingitud rehvi siserõhu muutust on võimalik avaldada ideaalse gaasivõrrandiga.
- V170** Enne ja pärast jää sulamist saab kasutada ideaalse gaasi olekuvõrrandit. Lisaks saab aine massi jäävusest leida gaasi ruumalamuudu.
- V171** Paisumisel gaasi poolt tehtud tööd on kõige lihtsam leida $p - V$ graafikult protsessi aluse ala pindalana. Lisaks tuleb kasuks termodünaamika I seadus.
- V172** Temperatuuri kasvades hakkab esimese anuma rõhk p_1 suurenema ning mingil hetkel ületab see ventiili kriitilise rõhu Δp . Sellest hetkest alates hakkab ventiil õhku läbi laskma nõnda, et edaspidi anumate rõhud p_1 ja p_2 rahuldavad tingimust $p_1 - p_2 = \Delta p$.
- V173** Seibi alumise külje läheduses surub süsihappegaas teatud rõhuga seibi ülesse. Vastav jõud on ülemiselt küljelt tasakaalustatud nii õhurõhu, kui ka surumisjõu poolt.

- V174** Kolvi lõppasendis tasakaalustab kolvile mõjuv hõõrdejõud rõhkude vahest tekitatud rõhumisjõu.
- V175** Õhupalli lendu tõusmise piiril peab kuumaõhupalli keskmine tihedus olema võrdne välisõhu tihedusega.
- V176** Sügavale vee alla sukeldamisel surub veesamba rõhk palli kokku. Pall hakkab ise põhja vajuma, kui tema ruumala väheneb nii palju, et pallile mõjuv üleslükkejõud saab väiksemaks raskusjõust ehk palli keskmine tihedus muutub väiksemaks vee tihedusest.
- V177** Antud ülesandes on kolm tundmatut: paisupaagis oleva õhu moolide arv, paagi esialgne rõhk ning ruumala. Lisaks on tekstis kirjeldatud kolme tingimust, mida paak täitma peab; igäühe jaoks saab kirja panna ideaalse gaasi olekuvõrrandi.
- V178** Niiske õhu puhul on veeauru ja normaalse õhu rõhkude summa võrdne atmosfäärirõhuga, kusjuures veeauru rõhk on leitav küllastunud veeauru tihedusest.
- V179** Esialgu on vesinik teatud temperatuurivahe võrra soojem kui heelium, kuid pika aja möödudes on mõlemad soojuslikus tasakaalus. Koormise nihe ongi põhjustatud gaaside soojenemisest tulenevast paisumisest.
- V180** Korstna sees voolav õhk tekitab alarõhu, mis on avaldatav Bernoulli võrrandist. Rõhu langud korstna sees ja väljas peavad olema võrdsed.
- V181** Anuma tugevuse määrab ilmselt seina paksus. Gaasi rõhust tingitud mehaaniline tõmbepinge anuma seintes ei tohi ületada väärtust $\sigma = 450 \text{ MPa}$. Tõmbepinge leidmiseks tasub anum mõtteliselt jaotada kahes poolsfääriks ning vaadelda neile mõjuvate jõudude tasakaalu.
- V182** Tasub vaadata, kuidas muutub õhupalli temperatuur, kui sinna teatud ruumala V õhku sisse pumbata. Temperatuuri leidmiseks saab rakendada termodünaamika esimest seadust.
- V183** Selleks, et kuumaõhupall õhuks püsiks, peab sees olev õhk olema piisavalt madala tihedusega, et üleslükkejõud tasakaalustaks kuumaõhupalli raskusjõu. Kui õhupalli sees on õhk temperatuuril T , siis õhupalli pooridest imbub välja soe õhk temperatuuril T , samas kui õhupalli siseneb õhk temperatuuril T_0 . Propaani põletamine peab vastava soojuskao kompenseerima.

- V184** On võimalik näidata, et seni, kuni heelium pole võtnud enda alla veel kogu õhupalli ruumala, püsib tõstejõud konstante.
- V185** Adiabaatilisel paisumisel muutub gaasi siseenergia $c_V T_0$ osaliselt joa kineetiliseks energiaks $\mu v^2/2$. Düüsis peab kehtima energia jäävus. Seega, ajaühikus siseneval gaasihulgal on sama energia kui ajaühikus väljuval gaasil.
- V186** laserkiire kõrvalekaldenurk on leitav Snelli seaduse ja kiilu geometria rakendamisest.
- V187** Tasub teha selge joonis ning kasutada sarnaseid kolmnurki.
- V188** Selleks, et sisenev kiirte kimp oleks ka peale teise läätse läbimist paralleelne, peavad läätsede fookused ühtima.
- V189** Selleks, et kiirtekimp laieneks ja jääks paralleelseks, pidi optik paigutama nõguslääts kumerlääts ette niimoodi, et läätsede fookused ühtiksid nõguslääts ees. Fookuste ühtimises saab veenduda, kasutades läätse valemit ning arvestades, et paralleelse kiirtekimbu kujutis asub lõpmatuses.
- V190** Pärast selge joonise joonestamist taandub ülesanne geometria peale.
- V191** A asukoha leidmiseks võib kasutada läätsevalemit.
- V192** Ainus muutus kiire teekonnas toimub segu sees. Murdumisnäitaja muutuse tõttu hakkab kiir segus teise nurga all liikuma. Vastavat nurga muutust ning seejärel ka y -suunalist nihet on võimalik leida Snelli seaduse abil.
- V193** Selleks, et kaks valgusallikat sama kujutise annaksid, peab üks olema näiline ja teine tegelik.
- V194** Objekti kaugus läätsest on üheselt ära määratud sellega, et lääts on objektist ja kujutisest ühel kaugusel. Kiirte edasise käigu jaoks tuleb mõlemat läätse poolt eraldi vaadata.
- V195** Nõguspeegli pinnalt peegeldunud kiirte nurgapoolitajad läbivad peegli kõverusraadiuse keskpunkti.
- V196** Tasub koostada selge joonis ning murdumisnäitaja leidmiseks kasutada täisnurksete kolmnurkade omadusi ja Snelli seadust.

- V197** Kärbse kiiruse leidmiseks on kasulik vaadelda, kuidas kärbse poolt aja t jooksul läbitud lõik pikkusega vt läbi läätse välja venib.
- V198** Tuttavad märkavad üksteist sellel hetkel, kui kiir, mis saab alguse ühest inimesest ning põrkab vastu peegli paremat nurka, jõuab teise inimeseni. Antud olukorra jaoks saab koostada joonise ning vastavad tingimused kirja panna.
- V199** Ülesande lahendamiseks tasub vaadelda kõige äärmist kiirt, mis kumerläätse siseneb, ning abijoontega määratleda, kuidas vastav kiir optilist süsteemi läbib. Seejärel saab ära kasutada sarnaseid kolmnurki.
- V200** Antud juhul tasub vaadelda kõige äärmisi süsteemi sisenevaid kiiri.
- V201** Ülesande lahendamisel osutub tarvilikuks teadmine, et läätsele selle optilise teljega paralleelselt langevad kiired (või murtud kiirte pikendused nõrgusa läätse puhul) koonduvad fookuses punktiks. Seega on ainus moodus kahe läätse abil saada süsteem, mis teisendab paralleelse kimbu uuesti paralleelseks kimbuks selline, et läätsede fookused ühtivad.
- V202** Valguskiir siseneb prismaesse murdumata, sest kiir on normaali sihiline. Küll aga toimub murdumine prismast väljudes. Kuna terve tahu ulatuses on langemisnurk sama, tekitab üks tahk paralleelse kiirtekimbu. Kuna meil on kaks murdvat tahku, on esialgne kiirtekimp pärast prisma läbimist ja-gunenud kaheks.
- V203** Nii täis- kui poolvarjude piirjoonte pikendused on valgusallika puutujad.
- V204** Allika heledus on ligikaudselt võrdeline vaatleja silmaava nurkläbimõõdu ruuduga allika asukohast vaadatuna.
- V205** Piisab kahe ettevaatlikult valitud kiirte käikude vaatlemisest.
- V206** Ülesande mugavamaks lahendamiseks tuleb teha selge joonis ning rakendada väikeste nurkade lähendust. Lisaks, kiire ja kuuli puutepunkti pinnanormaal ühtib kuuli raadiusega.
- V207** Pikas optilises kius jäävad levima vaid sellised kiired, mille jaoks toimub südamikuga ja katte lahtuspinnal täielik sisepeegeldumine.

- V208** Pärast mõningast geomeetriat selgub, et A on kahe vasakul oleva läätsse fookuses; seega on punktist A tulevad kiired pärast vastavate läätsede läbimist paralleelsed.
- V209** Nõguslääts tekitab esemest näiva kujutise ning kumerlääts tekitab näivast kujutisest tõelise kujutise. Kuna kumerläätsse asukoht on teada, saab tagurpidi lähenedes rekonstrueerida näilise kujutise asukoha.
- V210** On lihtne näha, et plaadist väljub endiselt paralleelne valgusvihk. Küll aga on selle levimise suund muutunud. Valguslaigu nihke leidmiseks on mugav vaadelda kiirt, mis läbib läätsse optilist keskpunkti.
- V211** Mustaks värvitud tahkudelt valgus peegelduda ei saa, toimub neeldumine. Ülesande tingimus on täidetud, kui värvimata tahust kuupi sisenev valgus ei saa väljuda läbi kõrvaltahu (toimub sisepeegeldus).
- V212** Joonisel on kaks peegeldust ja üks peegelduse-peegeldus. Sellele vastab kolm võimalikku punktide konfiguratsiooni ning eeldatavasti on võimalik paari kavala argumendi põhjal osad konfiguratsioonid elimineerida (näiteks peab valgusallikas olema mõlema peegli vahel).
- V213** Nurga φ leidmiseks tuleb vaadelda kiirt, mis siseneb lõiku AB .
- V214** Läätsse asukoha leidmiseks tasub vaadata geomeetriliselt omapäraseid kiiri ja kuidas need läbi läätsse murduvad. Selleks sobivad näiteks kiired AB , AA' ja BB' .
- V215** Paneme tähele, et valemi järgi keskkonna murdumisnäitaja suurenedes, kuid läätsse murdumisnäitaja samaks jäädes läätsse fookuskaugus suureneb. Seega on ainus viis, kuidas valguskiired saaksid ka pärast anuma vett täis valamist samas punktis koonduda, see, kui vees peegelduksid valguskiired põhjas olevalt peeglit ja seejärel koonduksid samas punktis, kus enne.
- V216** Selleks, et kapillaarisein paistaks null-paksusega, peab kapillaarile puutu-jana langenud kiir napilt puudutama sisemist õõnsust. Sellisel juhul ei leidu ühtegi kiirt, mis läbiks kapillaari seina ilma sisemise õõnsuse piirpin-nale langemata.
- V217** Läätsse fookuskauguse leidmiseks tasub vaadelda valguskimpu, mille suund on paralleelne optilise peateljega. Sellisel juhul tekitavad kiired näilise ku-jutise läätsse fookusesse.

- V218** Suhteliselt kindel meetod on avaldada kõik ülesandes antud ja otsitavad muutujad võimalikult mugavate jooniselt leitavate suuruste kaudu ning loota, et saadud võrranditest on lihtne näha, kuidas lõppvastus avaldub k_1 ja k_2 kaudu. Häda korral tuleb lahendada kolmest võrrandist koosnev võrrandisüsteem (k_1 , k_2 ning otsitava suhte jaoks). Silmas peab pidama, et jooniselt valitud muutujad peavad ülesande geomeetria üheselt ära defineerima. Selleks sobivad näiteks läätses fookuskaugus ning pliatsi mõlema otsa kaugused läätsesest.
- V219** Kriitilise langemisnurga all on valgus sakilisel poolel täieliku sisepeegeldumise piiril. Selleks, et antud tingimust langemisnurgaga siduda on kasulik joonestada suur ja selge joonis.
- V220** Kui nõgusläätsel langevad paralleelsed kiired, löikuvad murdunud kiirte pikendused eesmisel fokaaltasandil.
- V221** Kui peegeldavate silindriliste seinte asemel oleks kaks tasapeeglit, siis tekiks optilise peateljega risti punktallika kujutiste lõpmatu jada (peegeldus, peegelduse peegeldus jne). Iga peegeldus tekitaks läbi läätses ekraanil uue kujutise. Tasapeeglite juhtu on võimalik ka silindrilise peegli peale laiendada.
- V222** Mõlemad teravustatavuse asendid on üksteise suhtes sümmeetrilised. See tähendab seda, et kui esimeses asendis on läätses kaugus esemest a ja sensorist b , siis teises asendis on vastavad kaugused ümber vahetatud.
- V223** Algselt paralleelsed kiired koonduvad pärast läätses läbimist fokaaltasandis. Seega on võimalik esimese läätses fokaaltasand rekonstrueerida, teades fookuse asukohta ja kahe kiire löikepunkti.
- V224** Poolkera kumera pinna keskosa võib vaadelda omaette õhukese läätsena, mille fookuskaugus ja kaugus paberi pinnast määravad kujutise suurenemine. Läätses fookuskauguse leidmiseks on kasulik vaadelda valguskiirt, mis liigub paralleelselt optilise peateljega. Pärast läätses murdumist koondub kiir fookusesse.
- V225** Kuna silmani jõudvate kiirte jaoks kehtib $r \ll L$ ning trajektoori kõverdumine toimub musta augu lähiümbruses, võib vaadelda kiire teekonda lihtsustatult: kiire liikumine musta auguni, hetkeline nurga muutus musta augu juures ning edasi sirge tee vaatlejani.

- V226** Juku näo kujutise leidmiseks tasub kõigepealt vaadelda, kuidas Juku silmad peeglites kujutisi tekitavad. Kuna peeglid on üksteise suhtes täisnurga all, on selge, et otse nurgapeegli nurka vaadates on näha kolmandat järku kujutis.
- V227** Sfäärilist akvaariumit saab vaadelda kui õhukest tasakumerat läätse, mis on surutud tasase küljega vastu sirgeseinalist akvaariumi. Lisaks peab arvestama, et läätses lõplikku kujutist tekitav kala ei vasta tegelikule kala asukohale, vaid akvaariumis murdumise tõttu asuvale kujutisele, mis on tegelikust kala asukohast n korda lähemal.
- V228** Kera ääres toimub pinnalt täielik sisepeegeldumine, kus peegeldunud kiired saavad alguse kas põrandalt või seinalt (ja olles seega kas valget või kollast värvi). Murdumisnäitaja määramiseks on vaja jooniselt uurida sisepeegeldumise piirjuhtu.
- V229** Kahe kujutamise tekkeks peab kumerpeegel asuma objektist A vasakul. A' leidmiseks peab määrama läätse fookuse, aga selleks peab silmas pidama asjaolu, et pole teada, kumb kujutistest K_1 ja K_2 kuulub objektile A .
- V230** Kärbsse näiline asukoht vastab kärbsest alguse saanud klaasist väljunud murdunud kiirte pikenduste lõikepunktile. Selle jaoks tasub vaadelda kahte kiirt: mõlemad saavad alguse kärbsest, aga üks väljub merevaigutükist pinnaga risti ja teine väikse nurga all. Edasi tuleb kiirte geomeetriat ettevaatlikult uurida ning rakendada Snelli seadust.
- V231** Allikat ja kujutist ühendav sirge läheb läbi läätse keskpunkti, kusjuures läätse keskpunkt peab jääma allika ja kujutise vahele, sest tegu on tõelise kujutisega. Lisaks teame, et sirge kujutis on sirge, kusjuures need kaks sirget lõikuvad läätse tasandis.
- V232** Lisaks väikeste nurkade lähendusele lihtsustab ülesande geomeetriat võimalikult sümmeetriliste kiirte käikude uurimist. Näiteks on mugav vaadelda kiiri, mis peegelduvad risti peegli pinnaga.
- V233** Esimesena tuleks alustada läätse keskpunkti leidmisega, seejärel paika panna läätse orientatsioon ning fookus. Keskpunkti leidmiseks tasub vaadata kiiri, mis puutuvad nii ringi kui ka ellipsit.

- V234** Tekitagu lõpmatuses asuv objekt läbi kumerläätsse ja nõgusläätsse vastavalt kujutised A' ja A . Kaamera vaatenurk on leitav, vaadates olukorda, kus A asub valgustundliku elemendi ääres. Sellisel juhul on kaamera vaatenurk A' poolt kaetav nurk kumerläätsse keskpunktist vaadatuna.
- V235** Ülesandes on arvandmed valitud nõnda, et peeglite fookused ühtiksid. Tööpoolest, nõguspeeglite fookuskaugus on pool raadiusest ja peeglite vahemaa on võrdne peeglite fookuskauguste summaga. See tähendab, et peale igat edasi-tagasi peegeldumist püsivad valguskimbu kiired paralleelselt, kusjuures kimp muutub 2 korda kitsamaks (sest fookuskauguste suhe on 2).
- V236** Tähistame märgitud punkti A -ga ja silindri keskpunkti O -ga. Antud ülesande kontekstis tasub vaadelda funktsiooni $f(\alpha) = \delta$, mis kirjeldab punktist A alguse saanud kiire silindrist väljumise nurka δ kiire AO suhtes funktsioonina stardinurgast α kiire AO suhtes. Silindri algasendit kirjeldab $f(\alpha) = 0$ kolme lahendiga. Lisaks on teada, et $f(\alpha) = 15^\circ$ on lahenditeta.
- V237** Ratta liikumist on mugavam vaadelda autodega seotud süsteemis.
- V238** Autode hulga pidevuse tõttu on lõigul C teatud punkti ajaühikus läbivate autode arv võrdne lõikude A ja B vastavate arvude summaga.
- V239** Lihtsam on leida, kui palju aega kulus autol esimese $4/5$ läbimiseks ning seejärel võtta t ja leitud aja vahe.
- V240** Ratturite sõiduaeg on leitav asjaolust, et esimene ja teine rattur läbisid sama pika vahemaa.
- V241** Kiirendamise ning pidurdamise käigus on rongi keskmine kiirus $v_{\max}/2$.
- V242** Möödasõidu käigus avaldub sõiduauto läbitud vahemaa ühtlase kiirenduse valemiga $x = vt + \frac{at^2}{2}$.
- V243** Kuna rongid kiirenevad konstantse kiirendusega, saame avaldada läbitud vahemaa liikumisvõrrandist $s(t) = vt + \frac{1}{2}at^2$. Lisaks peab mõlema rongi kokkupõrkeni läbitavate vahemaade summa olema $s = 2750$ m.
- V244** Tasub vaadata, kuidas heli poolt läbitav vahemaa muutub vile laskmise alguses ja lõpus.

- V245** Peale teejupi, kus rong sõidab kiirusega 18 km/h, tulevad rongil ajakaod ka teelõikudel, kus rong pidurdab ja kiireneb.
- V246** Nii kiirabiauto lähenemise kui ka kaugenemise jaoks saab kirja panna Doppleri seaduse. Lisaks on sageduste suhe üheselt määratud asjaoluga, et kiirabiauto sireeni toon langes väikese tertsi võrra.
- V247** a) Kõige suurem kokkupõrke oht on siis, kui esimene on jõudnud täielikult seiskuda (selles saab veenduda, kui liikuda tagumise autoga kaasa liikuvasse taustsüsteemi).
b) Kahe liikuva objekti suhtelist liikumist on kasulik uurida liikuvast taustsüsteemis.
- V248** Lõppsageduse avaldamiseks esialgse sageduse kaudu võib Doppleri seadust kaks korda järjest kasutada.
- V249** Ülesannet on mugavam vaadelda emma-kumma autoga seotud taustsüsteemis.
- V250** Graafikult on näha, et ainult kahel mõõdetud ajahetkel oli sportlase kiirus keskmisest madalama väärtusega. See tähendab, et peatus mahtus täielikult antud kahe perioodi sisse.
- V251** Vaadeldes tuule ja jalgratturi kiirusi vektoritena, on võimalik geomeetriselt konstrueerida vastavad tekstis toodud tingimused ning geomeetria põhjal tuule kiirus välja arvutada.
- V252** Tekkival seisulainel peavad olema sõlmed mõlemas keele võnkumise osa otspunktis. Viiuli keelt puudutades peab ka keele puutepunkt sõlmpunkt olema.
- V253** Näitleja liikumist on mugav vaadelda kettaga seotud taustsüsteemis. Sellisel juhul pöörleb maapind nurkkiirusega $\frac{2\pi}{T}$ ning näitleja kõnnib ketta peal kiirusega v .
- V254** Palli lendu on mugav vaadelda laboratoorses taustsüsteemis. Sellisel juhul liigub pall pärast viset ühtlaselt ning sirgjooneliselt, kusjuures selle kiiruse vertikaalsihiline komponent on v ning horisontaalsihiline komponent ωR .

- V255** Laine levik toimub geomeetrilise optika seaduste kohaselt. Kehtib $\sin \alpha_1 / \sin \alpha_2 = v_1 / v_2$, kus v_i ja α_i on vastavalt keskkonna $i \in \{1, 2\}$ laine leviku kiirus ja langemisnurk eralduspinna normaali suhtes.
- V256** Ülesande geomeetria ning lööklaine koonuse nurga kaudu on võimalik avaldada lennuki koordinaadid stopperi käivitamise ja peatamise hetkedel. Leitakse nihke kaudu on lennukiirus lihtsasti leitav.
- V257** Selleks, et autorehvid kuluksid vähimal määral, peavad rattad pöörama ühtse kehana. Kuna rattad ei libise, asub pöörlemiskese rataste teljel.
- V258** Kui hall kamm liigub ühe pii võrra, on uus pilt identne esialgsega ning järelilikult on tume laik liikunud ühe "lainepikkuse" võrra.
- V259** Antud ülesandes on kolm tundmatut: pilu laius, katiku kiirus ja piisa kujutise kiirus sensori tasandis. Lisaks kirjeldati kahte olukorda, mis seovad antud tundmatuid. Selgub, et nendest piisab, et määrata kolmandas olukorras triibu pikkust.
- V260** Liikudes B suunas on laeva kiirus $v_0 + v(t)$ ning liikudes A suunas on kiirus $-v_0 + v(t)$. On võimalik näidata vastuväiteliselt, et selleks, et minimeerida sõiduaega kahe punkti vahel, peavad voolukiirused alguses ja lõpus olema võrdsed. Vastasel juhul saaks valida veel väiksema sõiduajaga plaani nihutades stardiaega emmas-kummas suunas.
- V261** Ülesannet on mugavam vaadelda õhu taustsüsteemis, sest siis on helilainefrondid kiirusega c kasvava raadiusega ja paigaloleva keskmega poolsfäärid. Helivõimsus jaotub ühtlaselt üle terve frondipinna, seega on tajutatav võimsus pöörvõrdeline frondi pindalaga ehk frondi raadiuse ruuduga.
- V262** Olukorda on mugavam vaadelda veega seotud taustsüsteemis, sest siis liiguvad lained paadi trajektoori suhtes sümmeetriliselt (lainefrondid on paadi varasematest asukohtadest eemalduvad ringid).
- V263** Mõõdetud lainepikkuste erinevus tuleneb mõõdetud punktide kiiruste vahel vaatleja suhtes. Kui Päikese pöörlemise nurkkiirus ekvaatoril on v , siis üks ekvaatori ots eemaldub vaatlejast kiirusega v ja teine läheneb kiirusega v . Antud kiirusele vastav lainepikkuse muut on leitav Doppleri nihkest.

- V264** Liikudes süsteemi, mis pöörleb nurkkiirusega $\omega/2$, on võimalik olukorra sümmeetriat ära kasutada.
- V265** Pildistamise hetkel pöörleb kogu ratas ümber hetkelise pöörlemistelje, mis läbib ratta ja maa puutepunkti. See tähendab, et iga ratta osake liigub mööda ringjoone kaart, mille keskpunktiks on ratta ja maa puutepunkt.
- V266** Leviaegade suhtelised erinevused on väikesed, seega võib lugeda, et helikiirus on hulga suurem tuule kiirusest. Heli levikut on kasulik vaadata tuulega seotud taustsüsteemis.
- V267** Ülesandes antud algandmed kirjeldavad kaatri liikumist tuule suhtes. See- ga tasub olukorda vaadelda tuulega kaasa liikuvas taustsüsteemis.
- V268** a) Vastavalt sellele kas labad liiguvad salvestatavatele pikslite veergudele vastu või eemale, on labade kujutiste tihedus vastavalt suurem või väiksem.
 b) Vaadeldes pildil ühte vertikaalset pikslite veergu ei ole moonutusi näha. Seega tasub uurida kui palju labasid erinevatel pikslite veergudel näha on.
 c) Teades labade arvu on võimalik vaadelda täpselt kui palju üks laba salvestamise käigus liigub.
- V269** Valgus peegeldub tagasi kile ülemiselt ja alumiselt pinnalt. Peegeldus on minimaalne, kui vastavad kiired liituvad vastasfaasides. Selleks, et määrata mitu täislainepikkust optiliste teede vahesse mahub, tuleb vaadelda, kuidas minimeerida peegeldunud valguse hulka punase ja sinise valguse jaoks.
- V270** Heledad vöödid vastavad ülemiselt ja alumiselt pinnalt peegeldunud kiirte liitumisele samas faasis. Vaadates põrandat erinevate nurkade alt, muutub kiirte optiliste teekondade vahe piisavalt palju, et see vastaks 20-le lainepikkusele. Vastav optiliste teekondade vahe vahemik on leitav põranda geometriast.
- V271** Magnetväljas hakkab osake liikuma mööda ringjoont, mille raadius on leitav jõudude tasakaalust. Maksimaalse nurga korral väljub osake magnetri- bast eraldusjoonega paralleelselt.
- V272** Elektron sooritab solenoidi teljega risti tasandis ringliikumist. Antud ring- liikumise periood on leitav kasutades Lorentzi ja tsentrifugaaljõu tasakaa- lutingimust.

- V273** Elektrivool generaatori mähises (juhtmekontuuris) tekib elektromagnetilise induktsiooni toimet ning seda protsessi kirjeldab Faraday seadus $\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$, kus ε on voltides mõõdetav elektromotoorjõu suurus ning $\Delta\Phi$ on juhtmekontuuri läbiva magnetvoo muutus, mis toimub ajavahemiku Δt jooksul.
- V274** Magnetväljas ringliikumisel käitub Lorentzi jõud kesktõmbejõuna. Analoogselt on teisel juhul kesktõmbejõud kuloniline jõud kahe kuuli vahel, kusjuures peab tähelepanu pöörama sellele, et kuulid tiirlevad ümber ühise massikeskme.
- V275** Raamis indutseeritakse vool, sest takisti kukkudes suureneb raami läbiv magnetvoog, mis omakorda tekitab Faraday seaduse kohaselt raamis elektromotoorjõu ja voolu. Seega on stabiilses režiimis raskusjõud ning takistit läbiva voolu poolt tekitatud Lorentzi jõud tasakaalus.
- V276** Osakesed hakkavad tsüklotronis liikuma päripäeva mööda järjest suureneva raadiusega poolringjooni. Osake väljub tsüklotronist, kui tema trajektoori raadius kasvab sama suureks tsüklotroni raadiusega R .
- V277** Lorentzi jõu tõttu liiguvad mõlemad osakesed mööda ringjoont, kusjuures mõlema osakese kiirusvektorite pöörlemise nurkkiirused on samad.
- V278** Osakeste kiirus magnetvälja sisenedes on avaldatav energia jäävusest. Magnetväljas algab ringliikumine, kusjuures detektorini jõutakse pärast poole ringjoone läbimist. Teisisõnu on detekteeritud x -koordinaat $2R$, kus R on ringjoone raadius.
- V279** Laeng sooritab magnetväljas ringliikumist; mida suurem on magnetväli, seda suurem on ringi raadius. Enne ja pärast ringliikumist on osakese trajektor sirge, kusjuures ülemine ringjooneks on ilma murdepunktita, st sirgjooned on ringjoone puutujaks.
- V280** Traat võtab kaare kuju (sest Ampere'i jõud mõjub analoogselt täispuhutatud palli puhul pallikestale ülerõhu poolt mõjuva jõuga: lühikesele mõttelisele traadijupile mõjuv jõud on risti traadijupiga). Pinge leidmiseks on mugav vaadelda lühikest traadijupi lõiku ning kirja panna jõudude tasakaalu tingimuse.

- V281** Selleks, et venitada pooli väikse vahemaa $\Delta\ell$ võrra pikemaks on vaja teha tööd, millest osa kulub magnetväljas salvestatud energia suurendamiseks ning teine osa kulub vooluallika poolt tehtud töö kompenseerimiseks. Magnetväljas salvestatud energia leidmiseks võib kasutada kas pooli kogueenergia valemit $\frac{LI^2}{2}$ või magnetvälja energiatihedust $w = \frac{B^2}{2\mu_0}$.
- V282** Magnetväljas liiguvad osakesed mööda ringjoont kiirusest sõltumatu perioodiga $t = \frac{2\pi m}{qB}$. Näeme, et ülesandes antud ajavahemik T vastab poolele täistiirule. Antud tähelepanek võimaldab olukorra mugavamalt skitseerimist. Iga kord kui elektriväli sisse lülitatakse, antakse osakesele väike elektriväljasihiline impulss.
- V283** Magnetväljas hakkab osake liikuma mööda ringjoont. Ringjoone raadius on avaldatav Lorentzi jõu ja kesktõmbekiiruse võrdsusest. Märkame, et kui ringjoone raadius on piisavalt väike, väljub elektron tuldud suunas tagasi. Ringjoone suurenedes väljub elektron lõpuks vasakust küljest.
- V284** Kuulikele mõjuvad raskusjõud, niidi pinge ning Lorentzi jõud. Kuulike püsib ringjoone kaare kujulisel trajektooriga seni, kuni Lorentzi jõud ja niidi pinge ületavad ülejäänud jõudude niidisihilise komponendi. Vastav kriitiline nurk on leitav energia jäävuse seadusest ning jõudude tasakaalust.
- V285** Magnetvälja väljalülitamise käigus muutub magnetvoog läbi silindri ristlõike, mis indutseerib Faraday seaduse kohaselt keeris-elektrivälja. Keeris-elektriväli mõjub omakorda silindri pinnal olevatele laengutele teatud jõuga ning paneb silindri pöörlema. Silindri pöörlemise kiiruse leidmiseks on mugav vaadelda lühikest ajavahemikku Δt , mille jooksul väheneb magnetväli ΔB võrra.
- V286** Elektronid hakkavad liikuma mööda z -teljelise heeliksi, kusjuures heeliksi raadius on võrdeline $x - y$ suunalise kiirusega. Seega liiguvad kõik elektronid $x - y$ tasandis mööda ringjoont.
- V287** Kangi kriitilise nurga korral kehtib varda jaoks jõumomentide tasakaal.
- V288** Kehtib Newtoni II seadus ning jõumomentide tasakaal (näiteks ühe toru otspunkti suhtes).
- V289** Toereaktsiooni käärade telje sihiline komponent peab olema tasakaalustatud hõõrdejõu poolt.

- V290** Kuuli hoiab augus või “lökkab” august välja üks ja sama jõud — kuulile mõjuv raskusjõud, mis on suunatud vertikaalselt alla. Kuul on augus, kui raskusjõu vektor läbib augu põhja ja kukub, kui see väljub sellest.
- V291** Libisemise piiril tasakaalustab lund katuselt alla lökkavat raskusjõudu hõõrdejõud, kusjuures hõõrdejõud mõjub vaid lume kuivale osale.
- V292** Koheldes hõõrdejõudu tundmatuna, võime kasti jaoks kirja panna Newtoni II seaduse nii x - kui ka y -telje jaoks. Hõõrdejõu maksimaalne väärtus on $F_\mu = N\mu$, kus N on toereaktsioon.
- V293** Liivahunniku maksimaalse kõrguse saavutamiseks peavad pindmised liivakihid olema libisemise äärel. Seega tasub vaadelda jõudude tasakaalu pindmiste liivaterade jaoks.
- V294** Kriitilise hõõrdeteguri väärtuse korral kehtib jõumomentide tasakaal tuulepoolsete rataste telje suhtes.
- V295** Selleks, et süsteem oleks tasakaalus, peab mutter asuma täpselt nööri kindepunkti all.
- V296** Kuna nöör on venimatu, on mõlemad hammasrattad paigal ja seega tasakaalus. Kehtib nii jõudude, kui ka jõumomentide tasakaal. Antud juhul on kõige mugavam vaadelda jõumomentide tasakaalu hammasrattaste keskpunktide suhtes.
- V297** Jõu ülekanne toimub kangi põhimõttel, kus summaarne jõumoment pöördtelje suhtes on võrdne nulliga. Vastavad jõumomentide tasakaalu saab kirja panna nii käepideme kui ka löiketerade jaoks.
- V298** Kuulile mõjub raskusjõud, niidi pinged, toereaktsioon ning hõõrdejõud kuuli ja kasti vahel. Süsteemi lahendamise standardmeetod on rakendada Newtoni II seadust nii x - kui ka y -telje jaoks ning jõumomentide tasakaalu tingimust. Elu teeb lihtsamaks tähelepanek, et hõõrdejõu ja toereaktsiooni võib kombineerida üheks jõuks, mille nurk kasti vertikaali suhtes on kuni $\arctan \mu$ ning seejärel täheldada, et tasakaalu korral peavad kuulile mõjuvad kolm jõudu lõikuma ühes punktis.
- V299** Prussi asend on stabiilne, kui väikse kõrvalekalde korral muutub prussi potentsiaalne energia suuremaks. Teisisõnu peab massikese kõrgemale tõusma.

- V300** Ülemine klots ei libise, kui kiirendusest põhjustatud jõud ei ületa seisuhõõrdejõudu. Kui ülemine klots ei libise, võib kahte klotsi käsitleda ühtse kehana, mille kiirendus võib maksimaalselt olla $\mu_2 g$.
- V301** Hõõrdevaba ploki korral on pinge põhiköies jääv, muutub vaid selle suund. Lisaks peab tasakaalutingimuse rahuldamiseks ploki kinnituse pinge olema võrdne plokki läbiva põhiköie pingete summaga. Lahendamise jaoks on mugav alustada päästja poolsest otsast ning öelda, et vastav tõmbejõud on F .
- V302** Mõistlik on nõõri pinge jaotada horisontaalseks ja vertikaalseks komponendiks T_x ja T_y . Sellisel juhul kasvab Juku saabastele mõjuv toereaktsioon T_y võrra ning kelgule mõjuv toereaktsioon kahaneb T_y võrra. Minimaalse kelgunõõri nurga puhul on Jukust tulenev hõõrdejõud võrdne kelgu hõõrdejõuga.
- V303** Ülesande lahendamine jaguneb kaheks osaks: (a) kas antud jõust piisab üle serva kantamiseks; (b) ega klots seejuures libisema ei hakka. Mõlema analüüsimiseks on mugav rakendada jõumomentide tasakaalu. Lisaks on kasulik teada, et hõõrdejõu ja toereaktsiooni resultantjõu maksimaalne nurk vertikaali suhtes on $\arctan \mu$.
- V304** Et kuuli C kiirusvektor on risti sirgega AC , siis hetkeline pöörlemiskese asub sellel sirgel. Seega, kui kuul A hakkab libisema, siis on selle kiirusvektor samuti (ning järelikult ka hõõrdejõu vektor) risti sirgega AC . Piirjuhtumil, kui kuulide masside suhe on selline, et kuul A hakkab vaevu liikuma, on hetkeline pöörlemiskese väga lähedal punktile A .
- V305** Kehtib nii jõudude kui ka jõumomentide tasakaal. Ülesandes on kolm huviväärset punkti: rõnga keskpunkt, massikese ning võlli ja rõnga puutepunkt.
- V306** Silindril peab kehtima nii jõudude kui ka jõumomentide tasakaal. Jõumomentide tasakaalu on mugav vaadelda telje suhtes, mis läbib toetuspunkti, sest siis on hõõrdejõu ja toereaktsiooni jõuõlg 0.
- V307** Kuna tagumine ratas on õhku tõusmas, siis sellele jõude ei rakendu. Ainsad jalgrattale mõjuvad jõud on raskusjõud ning jõud esiratta ja maapinna kontaktpunktis. Lisaks on teada, et peab kehtima nii jõudude kui jõumomentide tasakaal iga punkti suhtes.

- V308** Pulgale mõjuvad neli erinevat jõudu: silindri ja pulga vaheline toereaktsioon, raskusjõud, maa ja pulga vaheline toereaktsioon ning hõõrdejõud. Pulga asend on stabiilne, kui jõudude ja jõumomentide tasakaalu tingimustest avaldatav hõõrdejõud ei ületa maksimaalset seisuhõõrdejõudu ning kui varda alaots ei tõuse õhku. Mõlemat tingimust väljendavad erinevad võrratused, mis peavad samaaegselt kehtima.
- V309** Konnale mõjub kolm jõudu: raskusjõud, rõhumisjõu ja hõõrdejõu resultant ning iminapa tekitatud tõmbejõud. Rõhumisjõu ja hõõrdejõu resultandi nurk pinnanormaali suhtes on kriitilisel juhul $\arctan \mu$. Tasakaalu korral peavad antud jõud üksteist ära tasakaalustama, ehk moodustuma kolmnurga.
- V310** Tasakaalu korral peab iga toru jaoks kehtima jõudude ning jõumomentide tasakaal. Alumiste torude jaoks on jõumomentide tasakaalu kõige mugavam vaadelda maapinna puutepunkti suhtes, sest sellisel juhul on maapinna hõõrdejõu panus 0. Lisaks paneme tähele, et kahe alumise silindri vahel rõhumisjõudu ei ole, sest see kaob niipea, kui alumised silindrid natukeneagi üksteisest eemalduvad.
- V311 a)** Jõu määramiseks on vajalik leida, kui palju muutub tungraua kõrgus ühe vända täispöördega. Selle jaoks võib rakendada Pythagorase teoreemi tungraua pikkuse jaoks ja seda diferentseerida.
b) Selleks, et tungraud oleks ilma väntamiseta hõõrdejõu tõttu tasakaalus, peab hõõrdejõud täpselt kompenseerima eelnevas alamülesandes leitud väntamiseks kuluva jõu.
- V312** Nöörile mõjuvad kolm jõudu: raskusjõud, nööri toereaktsioon ning hõõrdejõud. Selleks, et tasakaalutingimusi kirja panna on mugav vaadelda õhus rippuvat osa ja plaadil lebavat osa eraldi. Seejuures peab arvestama ka nööri ja plaadi kokkupuutepunktis mõjuva nööri pingega.
- V313** Traadile mõjuvad kolm jõudu: raskusjõud ja traatide kontaktpunktis ning traadi ja silindri puutepunktis mõjuvad rõhumisjõud. Selleks, et traat tasakaalus oleks, peavad nende jõudude pikendused lõikuma ühes punktis (vastasel korral mõjuks kahe jõu lõikumispunkti suhtes kolmas jõud traadile nullist erineva jõumomendiga ja traat hakkaks liikuma). Stabiilsuse analüüsis saab tähele panna, et kui "katus" pöörleb tervikuna, siis selle massikese liigub mööda ringjoont.

- V314** Tasakaalu korral peab kehtima jõumomentide tasakaal. Kuna kehade süsteemile mõjuvad kolm jõudu, peavad jõudude pikendused lõikuma samas punktis, sest vastasel juhul saaksime valida kahe jõu pikenduse lõikepunkti ning selle punkti suhtes mõjuks kolmanda punkti poolt nullist erinev jõumoment. Lisaks paneme tähele, et kehadele A ja B mõjuvad sama absoluutväärtusega jõud (mõlemad on libisemise äärel) ning nende suunad on teada.
- V315** Pulgale mõjuvad kolm jõudu. Kuna niiti tõmmatakse aeglaselt, võib eeldada, et süsteemis kehtib nii jõudude kui ka jõumomentide tasakaal. Jõumomentide tasakaalu tõttu peavad jõudude rakendussirged lõikuma ühes punktis.
- V316** Ringikujulisel orbiidil on satelliidi kiirus kogu orbitaalperioodi jooksul konstantne ja seetõttu on varjus veedetud osa ajast võrdne orbiidi varjus oleva osa pikkuse ja kogu orbiidi pikkuse suhtega.
- V317** Kui väike prints kõnnib piki asteroidi ekvaatorit, mõjub talle gravitatsioonijõud, normaaljõud ning ringjoonelisest trajektoorist tingitud kesktõmbe-kiirendus. Hõljuma hakates normaaljõudu ei mõju ning kehtib jõudude tasakaal.
- V318** Maa tiirlemise tõttu erineb Maa täispöörde arv aastas keskmiste päikese-ööpäevade arvust ühe võrra.
- V319** Sidesatelliidil kõrgus on leitav ringorbiidil mõjuva gravitatsioonijõu ja tsentrifugaaljõu tasakaalust.
- V320** Peale energia jäävuse kehtib ka impulsimomendi jäävus Maa keskpunkti suhtes.
- V321** Maa jõudude tasakaalust on võimalik avaldada Päikese mass ning Päikese nurkdiameetrist Päikese raadius.
- V322** Kasutades trossi pinget tundmatuna, saab mõlema satelliidi jaoks kirja panna jõudude tasakaalu.
- V323** Geostatsionaarse orbiidi raadius on leitav jõudude tasakaalust ning orbiidi perioodist.

- V324** Kosmosejaama trajektoori nihked on põhjustatud maa pöörlemisest ümber oma telje, kusjuures ühele ööpäevale vastava kosmosejaama nihke ja Maa ekvaatori pikkuse suhe on otseses sõltuvuses kosmosejaama ja maa pöörlemise nurkkiiruste suhtega.
- V325** a) Kuu ja Maa poolt avaldatavad jõud on otseselt leitavad abivalemi kaudu.
b) Kaabli katkemispunktis on pinge maksimaalne. Pinge on leitav jõudude tasakaalust.
- V326** Satelliidi tüüpiline kiirus on võrreldav esimese paokiirusega, sest satelliitide orbitaalraadiused ei erine üksteisest märkimisväärselt. Ülesande eelduste kohaselt liiguvad satelliidid sarnaselt molekulidega gaasis. Gaasis molekuli vaba tee hindamisel arvestatakse, et molekul liigub ilma põrgeteta ligikaudu aja jooksul, mil tema kokkupõrke-ristlõige on katnud ruumala, milles asub tüüpiliselt üks osake.
- V327** Termodünaamika I seaduse kohaselt $\Delta U = Q - A$, kus Q on süsteemi antud soojushulk ning A on välisjõudude vastu tehtud töö. Antud üesande kontekstis on Q negatiivne ja A positiivne.
- V328** Kahe vastasserva vaheline takistus on $R = \frac{\rho L}{S}$, kus L on servade vaheline kaugus ja S ristlõikepindala.
- V329** Jääkera sees tekib ülerõhk õhu soojenemisest tulenevast rõhu tõusust. See-ga on kõige kriitilisem moment vee sulamise temperatuuril.
- V330** Küttesüsteemis oleva vee ruumala esialgses olukorras ja töörežiimis on avaldatavad ülesandes antud valemiga.
- V331** Vee jäätumisel eralduv soojushulk peab täpselt ära kuluma jää soojendamiseks.
- V332** Vee jäätumisel eraldunud soojushulk kulub alajahtunud vee soojendamiseks jäätumistemperatuurini.
- V333** P - V teljestikus avaldub gaasi tehtud töö tsükli aluse pindalana. Alternatiivselt võib iga tsükli etapil tehtud töö leidmiseks rakendada termodünaamika esimest seadust.
- V334** Mõlema olukorra jaoks kehtib energia jäävuse seadus, kusjuures vedelike tihedused ning erisoojused on tundmatud.

- V335** Varda pöörlemise käigus muutub hõõrdejõu F_h ületamiseks kulutatud töö soojuseks. Töö on leitav hõõrdejõu ja läbitud tee pikkuse korrutisena.
- V336** Ülesandes on kaks tundmatut: vee lõpptemperatuur ja termose erisoojus. Need on leitavad pannes süsteemi jaoks kirja soojusliku tasakaalu võrrandid.
- V337** Energia jäävuse seaduse kohaselt peab rauatükist eraldunud soojusenergia minema vee soojendamiseks ja aurustumiseks.
- V338** Energia jäävuse seaduse kohaselt peab jõhvivate soojendamiseks kuluv soojushulk tulema vee jahtumise arvelt.
- V339** Vee aurustumise käigus kehtib energia jäävuse seadus. Seega tuleb väikese veekoguse aurustumiseks vajalik soojushulk järelejäänud vee temperatuuri langemise arvelt.
- V340** Ühest küljest on hõõrdumisest tekkiv soojushulk hõõrdejõu ja toru ääre poolt läbitud vahemaa korrutis. Teisest küljest on soojushulk avaldatav toru soojusmahtuvusest ja lõpptemperatuuri ning algtemperatuuri vahest.
- V341** Jäätükk koos mündiga hakkab uppuma siis, kui selle keskmine tihedus on võrdne vee tihedusega. Jää sulamiseks vajaminev energia saadakse vee jahtumisel eraldunud energiast.
- V342** Nafta jahtumisel eraldunud soojus kulub vee soojendamiseks.
- V343** Kastmisvee anuma taha tekib kiirtega ristuvale tasandile ringikujuline vari. Samasugune vari tekiks ka ringist, mis paikneb risti päikesekiirtega. Seega neelavad võrdse raadiusega kera ja kiirtega risti olev ring valgust võrdselt, sõltumata päikesevalguse langemise nurgast.
- V344** Aja Δt jooksul peab koolimajja siseneva ja väljuva vee soojushulkade vahe olema võrdne soojuskadudega läbi seinte.
- V345** Kehtib soojusbilanss lihvimise käigus eralduva soojuse ning sisse- ja väljavoolava vee soojusvoo vahel. Mugavuse mõttes võib vaadelda ajavahemikku Δt ning selle jooksul lihvil eralduvat ning vee poolt äraantavat soojushulka.

- V346** Enne keema hakkamist pidid vees olevad mullid olema nii väiksed, et pindpinevuse poolt tekitatud lisarõhu ja õhurõhu summa jäi suuremaks kui küllastunud veeauru rõhk.
- V347** Soojusvoog läbi kihi paksusega d , pindalaga S , temperatuuride vahel ΔT ja soojusjuhtivuskoeffitsiendiga D on $Q = D \frac{S \Delta T}{d}$. Statsionaarses olekus tasakaalustab jää ja vee eralduspinnal ühe plaadi poolt tulev soojusvoog teiselt poolt tuleva soojusvoo täielikult ära.
- V348** Süsteemis kehtib energia jäävuse seadus. Nimelt ühe tunni jooksul läheb 95 % kahe liitri aurustumisel eraldunud energiast tundmatu massiga jahutusvee soojendamiseks ΔT võrra. Jahutusvee kiirus on leitav toru massivoo ja ristlõike pindala kaudu.
- V349** Suurima kiiruse saavutab veeaur siis, kui vesi on kuumutatud keemistemperatuurini. Sellisel juhul kulub kogu küttekeha võimsus vee aurustamiseks.
- V350** Vesiradiaatori soojusvahetust toaga kirjeldavat võrdetegurit on võimalik leida nimivõimsuse kaudu. Lisaks soojusvahetusele saab radiaatori võimsust siduda radiaatorit läbiva vee siseenergia kaoga.
- V351** Ideaalse soojusmasina kasutegur avaldub kujul $\eta = \frac{T_j - T_k}{T_j}$, kus T on temperatuur kelvinites. Kasutegur on samas tehtud töö ja jahtusvedelikult võetud soojushulga suhe.
- V352** Spiraal kuumeneb temperatuurini, mil tekib soojuslik tasakaal spiraali ja ümbritseva keskkonna vahel. Teisisõnu spiraali takistil eralduv võimsus peab olema võrdne soojusvooga spiraalist toa õhku.
- V353** Soojusliku tasakaalu tingimuse kohaselt kulub radiaatori võimsus sissetuleva õhu soojendamiseks ja seinte soojuskadude kompenseerimiseks. Seinte soojuskaod on leitavad akna avamise eelsest tasakaalutingimusest.
- V354** Lisaks läbi atmosfääri tulevale päikesekiirgusele tuleb arvestada atmosfääri poolt kiiratava võimsusega. Juhul, kui Maa pinnalt jõuab atmosfääri kiirgus võimsusega P_m , siis atmosfäär kiirgab Maast välja ja Maale sisse kiirgust võimsusega $\frac{P_m}{2}$.

- V355** Temperatuuri kasvu või langemise kiirus on võrdeline tuppa siseneva summaarse soojusliku võimsusega. Sellele vastab graafiku puutuja tõus. Tuulepuhuja sisse lülitamise ajahetkel oli graafiku tõusu muut võrdeline tuulepuhuja võimsusega.
- V356** Tasakaalulises olukorras on ruumist eemalduv soojuse hulk võrdne küttekeha poolt toodetud soojusega. Selle põhjal saab leida esialgsest olukorrast keskkonna ja ruumi vahelise soojusvahetuse võrdelisusteguri ning saadud tulemust kasutada pärastise tasakaalulise temperatuuri leidmiseks.
- V357** Soojusvahetus eesruumi ja õue vahel peab olema sama suur kui soojusvahetus eesruumi ja kaupluse vahel. Seega püsib päevasel ajal eesruumis temperatuur $\frac{T_0+T_1}{2} = 12^\circ\text{C}$ ning eesruumi ehitusega vähenesid ukse lahtikäimisest tingitud soojuskaod 2 korda.
- V358** Et korterid on identsed ning nende sisetemperatuurid on samad, peavad ka soojuskaod läbi nende seinte olema võrdsed. Seega annab katlast tulev kuum vesi poole oma soojusest ära ülemises korteris ja poole alumises. Lisaks on radiaatori poolt ära antav soojusvõimsus võrdeline torude keskmise temperatuuriga ning radiaatori ribide kogupindalaga.
- V359** Alguses on lisanduva vee temperatuur võrdne soojendis oleva vee temperatuuriga ja vett välja ei voola; seega muutub vee temperatuur ainult soojendilt saadava soojuse tõttu. Stabiilsel temperatuuril on ajaühikus väljavoolava vee soojendamiseks kulunud energia võrdne soojendi võimsusega.
- V360** Selleks, soojustuskihtide vahel oleval kilel vältida kondenseerumist, ei tohi kile asukohas temperatuur langeda alla kastepunkti. Kastepunkt on leitav graafikult, leides veeauru osarõhu toatemperatuuril ning seejärel leides sellele vastava kastepunkti.
- V361** **a)** Kehtib soojuslik tasakaal sise- ja välisseina vahel. Nimelt on soojusvoog siseseinalt välisseinale võrdne siseseina poolt kiiratava soojusvoo ja välisseinalt saabunud kiirguse peegeldunud osa summaga. Välisseina jaoks kehtib analoogne tasakaalutingimus.
b) Nüüd kehtivad sarnased voo tasakaalud iga seina paari vahel, aga õnneks on eelmise osa tulemus üldistatav ka mitme seina jaoks.

- V362** On teada, et hetkeline efektiivne soojusvõimsus on võrdeline temperatuuri ja aja graafiku puutuja tõusuga. Enne pliitüki lisamist on ainsad soojuskaod läbi seinte; mida suurem on ahju temperatuur, seda suuremad on kaod. Pärast pliitüki lisamist läheb osa ahju võimsust veel pli sulatamiseks.
- V363** Telk peab olema soojuslikus ja niiskuslikus tasakaalus. Peale soojakadudele läbi seinte läheb osa soojusest kaotsi ventileeritava õhuga.
- V364** Kütteelement on soojuslikus tasakaalus ümbritseva keskkonnaga ning kaod keskkonda on võrdelised sise- ja välistemperatuuride vahel. Soojusliku tasakaalu temperatuur on määratav nn graafilise meetodiga, mis seisneb $\sigma(t)$ ja teatud funktsiooni pingest löikepunkti leidmises.
- V365** Soojustasakaalu korral kiirgab kuup sama palju kui see neelab. Kiiratud võimsus on leitav Stefan-Boltzmanni seadusest ning neelatav võimsus kuubi projektsiooni pindalast kiirguse leviku suunaga risti oleval tasandil. On selge, et maksimaalse temperatuuriga peab kuubi projektsiooni pindala olema maksimaalne ja minimaalse temperatuuriga minimaalne.
- V366** Esialgu võib leida piirituse ja vee massid ning nende kaudu vastavad ruumalad.
- V367** Rongi taustsüsteemis on rong paigal ning õhk uhab mööda kiirusega v , kusjuures õhu jaoks kehtib massi jäävuse seadus.
- V368** Algandmetest on võimalik leida, kui palju energiat ühe sammu tegemine genereerib ning kui palju energiat telefoni aku hoiustab. Nende suhe määrab vajalike sammude arvu.
- V369** Eri värvi komponendid on täielikult eraldunud juhul, kui plaadist väljuvate laserkiirte tsentrite vaheline kaugus distantil l saab võrdseks kiire diameetriga.
- V370** Lihtsuse mõttes võib eeldada, et Kuu pinnale jõudev summaarne valgusvoog Päikeselt peegeldub ühtlaselt poolsfäärile, mille keskpunktiks on Kuu ja pinna peal asub Maa.
- V371** Reservuaari veetasemest ülespoole jääva vee kaalu peab tasakaalustama kapillaarjõud vee ja klaasi kontaktjoonel.

- V372** Kuna kogu Smurfile langenud valgusest I neeldub Smurfil vaid $I \cdot \varepsilon$, kujutab $I \cdot \varepsilon$ graafik Smurfil neeldunud valguse intensiivsust lainepikkuse kohta sõltuvalt lainepikkusest. Graafiku alune pindala annabki Smurfil neeldunud soojushulga.
- V373** Kirjeldatud eeldustel luminesentsstoru (ja nendest moodustatud rivi) võib vaadelda lõpmata pika joonvalgusallikana, mille valgusvoog jaotub ühtlaselt silindripinnale, mille pindala on võrdeline silindri raadiusega. Kuna kogu energia jaguneb silindri pinna peale, siis valgustatus on pöördvõrdeline kaugusega. Sarnase argumentatsiooniga saab ka leida LED-lambi valgustatuse sõltuvuse kaugusest.
- V374** Maja teatud punkt ja tema peegelkujutis mere pinnalt paiknevad sümmeetriliselt mere tasandiga võrreldes. See võimaldab vee tasandi leidmist.
- V375** Jooniselt on võimalik mõõta ringide läbimõõdud. Kasutades lühikese lainepikkusega lainete kiiruse valemit, on esimeste ringide raadiuste põhjal võimalik arvutada kulunud ajavahemikud.
- V376** Iga lagunev uraani tuum jõuab oma lagunemisahelas radoonini. Tasakaalulisel juhul tähendab see, et ajaühikus lagunevate uraani tuumade arv on võrdne ka nii ajaühikus tekkivate kui ka lagunevate radooni tuumade arvuga. Lagunevate uraani tuumade arv on leitav, kui uurida uraani tuumade koguarvu avaldist $N_U(t) = N_0 2^{-\frac{t}{\tau}}$. Diferentseerides saame, et ajaühikus lagunevate uraani tuumade arv on $\frac{\Delta N_U(t)}{\Delta t} = \frac{N_0 \ln 2}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{N_U(t) \ln 2}{\tau}$.
- V377** Horisontaalsuunalise tuule tõttu langevad vihmapiisad teatud nurga all vertikaali suhtes. Kuna lõunaküljel olev tünn täitub kaks korda kiiremini, siis lõunakatuse ristlõikepindala peab langevate piiskade risttasandis olema kaks korda suurem kui põhjaküljel.
- V378** Kõik objektid, mis ületavad fotol horisonti, peavad olema vähemalt sama kõrgel kui fotoaparaat.
- V379** Osakese energia säilib vaid lööklaine taustsüsteemis. Seega tasub vaadelda liikumist vastavas taustsüsteemis.

- V380** Kuna täisvari on poolvarjust märksa väiksem ja Päikese nurkläbimõõt on ka väike, peab õhupall maapinnast suhteliselt kaugel olema. Seega võib maapinna läheduses lugeda varju koonuseid ligikaudu silindriteks. Pane me tähele, et poolvarju koonuse läbimõõt maapinna läheduses on 2,5 m, sest poolvarju laius (väikseim mõõde) vastab koonuse läbimõõdule. Analogselt on täisvarju koonuse läbimõõt $1,0 \text{ m} \cdot \frac{2,5 \text{ m}}{5,0 \text{ m}} = 0,5 \text{ m}$.
- V381** Kuna anumad on ühendatud, on rõhud mõlemas anumal samal kõrgusel samad ja anumate vedeliku tasemed võrdsed.
- V382** Tünnile mõjuv üleslükkejõud peab olema võrdne raskusjõuga.
- V383** Väljuva veejoa kiirus on leitav Bernoulli seadusest või energia jäävusest. Lisaks on väljuvas joas vooluhulk igas ajaühikus sama, st $Av = \text{Const}$, kus A ja v on vastavalt joa ristlõikepindala ja kiirus.
- V384** Torudes oleva vee rõhk on avaldatav vedelikusammaste kõrguste kaudu. Lisaks kehtib mõlemas torus Bernoulli seadus ning vee pidevustingimus, st sama aja jooksul läbib mõlemat toru sama kogus vett.
- V385** Kuubi vettevajumisel on kõige kriitilisem hetk see, kui kuubi ülemine tahk on parajasti vee alla vajunud, sest siis hakkab kuubile mõjuma suurim üleslükkejõud.
- V386** a) Torus olevale veesambale mõjub raskusjõud, takistusjõud ning pumba poolt avaldatud jõud. Ühtlase pumpamise korral kehtib jõudude tasakaal.
b) Pump paneb vee alarõhku tekitades liikuma. Kuna pump asub maapinnal, tekib minimaalne alarõhk juhul, kui pump tekitab vaakumi.
- V387** Õhutakistuse puudumisel jõuab veejuga märgini sama kiirusega nagu väljudes (energia jäävusest tulenevalt). Jõu leidmiseks võib vaadelda ajavahe-
mikku Δt ning selle jooksul üle antavat vee impulssi.
- V388** Veejoa väljumise kiirus on leitav energia jäävuse seadusest või alternatiivselt impulsi jäävusest. Mõlemad lähenemised on korrektsed, aga annavad numbrilise konstandi võrra erineva vastuse, mis on tingitud jäävusseaduste kehtivuse eelduste erinevusest. Tünni ja aluse kõrgused on leitavad valides graafikult kaks (või vajadusel rohkem) punkti ja lahendades tekkinud võrrandisüsteemi.

- V389** Kuna veejuga kiireneb ühtlaselt, kehtib energia jäävuse seadus. Lisaks kehtib vee massi jäävus ristlõigete ulatuses.
- V390** Kolbile mõjuv jõud tekitab kolvi sees lisarõhu F/S . Kuna tegu on laminaarse vooga, kehtib Bernoulli seadus. Alternatiivselt võib rakendada energia jäävust kolvi ees ja suudme juures.
- V391** Niisama sirges torus voolav vesi piki-sihilisi deformatsioone ei tekita. Kaarekujulise osa juures, aga survestab vesi väliskülge rohkem kui sisekülge ning tekitab piki-sihilisi pingeid. Pinge täpse suuruse määramiseks on mugav vaadelda kaarekujulist osa tervikuna ning uurida, kuidas vee impulss muutub kaarekujulisse ossa sisenedes ja väljudes.
- V392** Klaasi sees olevate õhu molekulide arv jääb samaks, aga ruumala suureneb. Seega tekib klaasi sees veepinna kohal alarõhk. Teisest küljest väheneb paberi kohal veesamba kõrgus, mis vähendab hüdrostaatilist rõhku. Tekkinud summaarne alarõhk peab kompenseerima paberi raskusjõu.
- V393** Kuna klots on tasakaalus, peab kuubile mõjuv summaarne üleslükkejõud olema võrdne gravitatsioonijõuga. Selle jaoks on mugav võtta alumisse vedelikku jäänud kuubi osa ruumala tundmatuna.
- V394** Süsteemi massikeske on võimalikult madalal siis, kui veesamba kõrgus ühtib süsteemi massikeskme kõrgusega. Selles saab veenduda, kui vaadelda, mis juhtub väikese veekoguse lisamisel või eemaldamisel.
- V395** a) Vee sissevoolu lõppedes on hüdrostaatilised rõhud vees torni sees ja väljas tasakaalus. Õhurõhk torni sees vee kohal on võrdne hüdrostaatilise rõhuga samal tasemel tornist väljas.
b) Luugile mõjub altpool torni sees oleva õhu rõhk ning ülevalt vee hüdrostaatiline rõhk.
- V396** a) Juhul kui ookeani keskmine tihedus ning lisarõhk on vastavalt ρ ja p , kehtib ülesandes mainitud kokkusurutavuse seos $\rho \approx \rho_0(1 + \beta p)$. Lisaks on vee rõhud ookeani põhjas kokkusurumatul ja kokkusurutud juhtudel võrdsed.
b) Tasub vaadelda väikest vee kogust massiga m ning selle ruumala muute sügavusel H võrreldes pinnapealse olukorraga.

- V397** Kausile mõjub valamise käigus raskusjõud, üleslükkejõud ning vee sissekukkumisest tulenev rõhumisjõud. Rõhumisjõud on leitav vaadeldes, missuguse impulsi Δp kukkuv vesi ajavahemiku Δt jooksul kausile üle annab. Sellisel juhul on rõhumisjõud $F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$.
- V398** Selleks, et määrata, mis ruumiirirkonda vesi jõuab, võib vaadelda punkti koordinaatidega (x, y) ning üritada määrata, missuguselt algkõrguselt peaks veejuga alguse saama, et sellesse punkti jõuda. Kui lahendit ei ole, antud ruumipunkti vesi ei jõua.
- V399** Õli valamise tulemusena langeb vee tase $l - h$ võrra selles torus, kuhu õli kallati, ning tõuseb sama taseme võrra teises torus. Kuna süsteem on tasakaalus, peavad mõlemad vedelikusambad U-toru alumises punktis sama rõhku avaldama.
- V400** Omavõnkesageduse leidmiseks on harilikult kõige mugavam vaadelda väikest hälvet tasakaaluasendist ning uurida, kuidas süsteem edasi käitub. Ülesande kontekstis võib oletada, et õhuke veekiht ühes toru harus kandub teisele toru poolele. See põhjustab lisarõhu toru teises pooles, mis üritab süsteemi tasakaaluasendisse tagasi viia.

Lahendused

L1 Kivi ★

Autor: Aigar Vaigu, lõppvoor, 2005, G 1

Läheme üle vabalt langevasse taustsüsteemi. Selles süsteemis liiguvad vabalt langevad kehad konstantse kiirusega. Kivi saavutab langevas süsteemis palli viskamise hetkeks, Δt , õhupalli suhtes suhtelise kiiruse $u = g\Delta t$; see ei tohi olla suurem, kui maksimaalne viskekiirus v_{\max} . Seega

$$\Delta t \leq \frac{v_{\max}}{g}.$$

Avaldame palli viskekiiruse energia jäävuse seadusest:

$$\frac{mv_{\max}^2}{2} = mgh \quad \Rightarrow \quad v_{\max} = \sqrt{2gh}.$$

Maksimaalne viivituse aeg on seega

$$\Delta t_{\max} = \frac{v_{\max}}{g} = \sqrt{\frac{2h}{g}} \approx 2 \text{ s}.$$

L2 Pallid ★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2007, G 1

Ühesuguse massiga pallide elastse kokkupõrke tulemusena vahetavad nad oma kiirusevektorid (järeldeb lihtsalt impulsi ja energia jäävusest massikeskme süsteemis vaadatuna). Seega võime sama hästi öelda, et pallid lähevad üksteisest vabalt läbi, kusjuures ühe palli algkiirus ja teise palli lõppkiirus on võrdsed nulliga. Kui Juku istub kõrgusel h , siis saame mõlema vabalt liikuva palli jaoks lennuajaks $t = \sqrt{2h/g}$. Seega tabavad pallid viskajaid üheaegselt.

Alternatiivne lahendus

Kui Juku visatud pall jõuab täpselt tagasi oma algkõrgusele, siis peab tema kiiruse absoluutväärtus vahetult kokkupõrke eel ja vahetult kokkupõrke järel olema sama. Elastse kokkupõrke korral kehtib energia jäävus, järelikult võrdub ka Juhani palli kiiruse absoluutväärtus vahetult kokkupõrke eel kiiruse absoluutväärtusega vahetult kokkupõrke järel. Seega liigub kumbki pall tulnud suunas tagasi nii, et liikumise ajagraafik on peegelsümmeetriline põrkehetke suhtes. Seega, kui nad startisid samaaegselt, siis nad ka finišeerivad samaaegselt.

L3 Hobune ★

Autor: Valter Kiisk, piirkonnavor, 2007, G 1

Vaba langemise aeg

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3}{9,81}} \approx 0,78 \text{ s}$$

Seega otsitav kaugus on $s = vt = 10 \text{ m/s} \cdot 0,78 \text{ s} = 7,8 \text{ m}$.**L4 Eiffeli torn ★**

Autor: Aigar Vaigu, piirkonnavor, 2010, G 1

Kontrollime, kui kaua kukub raudkuul ülemiselt vaateplatvormilt $h = 273 \text{ m}$ maapinnale.

$$h = \frac{gt^2}{2} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \approx 7,5 \text{ s.}$$

Alates hetkest, kui mõlemad kuulid langevad, on nende suhteline kiirus muutumatu, sest mõlemad kuulid on siis vabalt langevas taustsüsteemis paigal. Leiame esimese kuuli kiiruse teise kuuli kukutamise hetkel.

$$v = gt \approx 29,4 \text{ m/s.}$$

Ajavahemik kuulide maapinnale jõudmisel on sama mis kuulide kukutamiselgi, ehk $t = 3 \text{ s}$.**L5 Kokkupõrge ★**

Autor: Andreas Valdmann, piirkonnavor, 2011, G 1

a) Autode kiirused on võrdsed ja vastassuunalised. Seetõttu on koguimpulss võrdne nulliga ja autod jäävad pärast kokkupõrget paigale. Kogu esialgne kineetiline energia kulub purustuste tekitamiseks. Selleks on $2\frac{mv_a^2}{2} = mv_a^2$. Autode kiirused on $50 \text{ km/h} = 13,9 \text{ m/s}$ ja koguenergia on 289 kJ .

b) Minnes üle massikeskme taustsüsteemi näeme, et olukord taandub eelmiseks olukorraks, seega kokkupõrke koguenergia on 289 kJ .

L6 Lendav pudel ★

Autor: Erkki Tempel, piirkonnavor, 2014, G 1

Mõlemat juhtu, millal pudel liigub üles ning pudel liigub alla, võib vaadelda kui vabalangemist. Kuna pudelile ja veele mõjuvad jõud on vabalangemise korral samasugused, siis vesi ei voola pudelist välja kummalgi juhul. Seega vee väljavoolu kiirus on 0 m/s .

L7 Põtsataja ja pähklid ★

Autor: Erkki Tempel, piirkonnavor, 2014, G 2

Lahenduse lihtsustamiseks läheme üle rongiga seotud taustsüsteemi. Sellisel juhul võib rongi liikumise jätta arvestamata ning vaadelda pähklite loopimist seisvalt rongilt. Pähklite liikumisel vaatleme kahte komponenti: vertikaalne kukkumine kiirusega g ning ühtlane horisontaalne liikumine kiirusega u . Pähklid jõuavad maapinnani ajaga $t = \sqrt{2h/g}$. Sama ajaga liigub kumbki pähkel horisontaalselt vahemaa $s = u\sqrt{2h/g}$ võrra. Pealtvaates on pähklite trajektoorid täisnurkse võrdhaarse kolmnurga kaatetiteks. Pähklite omavaheline kaugus l maandumishetkel on võrdne kolmnurga hüpotenuusi pikkusega, mille leiame Pythagorase teoreemist:

$$l = \sqrt{2s^2} = 2u\sqrt{\frac{h}{g}}.$$

L8 Kurv ★

Autor: Mihkel Rähn, lahtine, 2016, G 2

Olgu auto külgakalle α ning autole mõjuv summaarne jõud N . Kuna autos olijad ei tunne külgsuunalist jõudu, on N teega risti ja seega nurga α all vertikaali suhtes. Jõu võrrandid maaga seotud teljestikus on:

$$\begin{aligned}mg &= N \cos \alpha, \\ N \sin \alpha &= \frac{mv^2}{R}.\end{aligned}$$

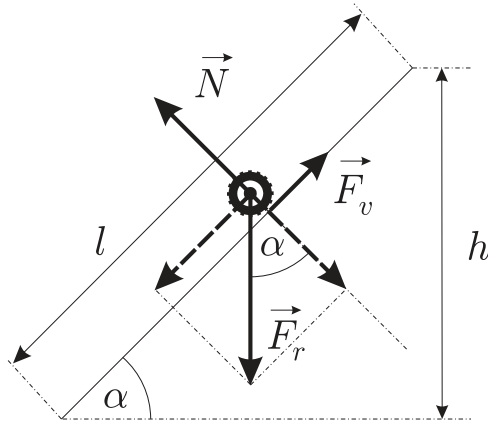
Lahendades võrrandisüsteemi, saame

$$\alpha = \arctan\left(\frac{v^2}{Rg}\right) = 14^\circ.$$

L9 Tõus ★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2005, G 2

Autole mõjuv veojõud on määratud tee ja rataste vahelise hõõrdeteguriga. Antud juhul hõõrdumine ei takista liikumist, vaid, vastupidi, on liikumise aluseks. Kui hõõrdetegur oleks võrdne nulliga, siis ei saaks auto üldse edasi liikuda. Kanname joonisele kõik autole mõjuvad jõud (vt joonist): raskusjõu $F_r = mg$, toereaktsiooni $N = mg \cos \alpha$ ja hõõrdejõuga võrdse veojõu $F_v = \mu mg \cos \alpha$.



Paneme kirja energia miinimumitingimuse mäkke tõusu jaoks:

$$E_h = E_0 + A,$$

kus $E_h = mgh = mgl \sin \alpha$ on auto potentsiaalne energia mäe tipus, $E_0 = mv^2/2$ on auto kineetiline energia mäe jalamil ning $A = F_v l = \mu mgl \cos \alpha$ on auto mäkke vedamiseks hõõrdejõu poolt tehtud töö. Saame

$$mgl \sin \alpha = \frac{mv^2}{2} + \mu mgl \cos \alpha.$$

Sellest võrrandist saame avaldada otsitava hõõrdeteguri:

$$\mu = \tan \alpha - \frac{v^2}{2gl \cos \alpha} = \tan 5^\circ - \frac{(30 \cdot 1000/3600)^2}{2 \cdot 9,8 \cdot 200 \cdot \cos 5^\circ} \approx 0,07.$$

Arvestades, et libedal jääl võib hõõrdetegur langeda alla 0,05, võib meie auto teoreetiliselt koju jääda, kui tee on libe ja teele pole õigeaegselt liiva pandud ning autol pole naastrehve all.

L10 Keha ★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2006, G 3

Ülesse visatud keha koordinaadi leiame võrrandist:

$$h = v_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

Iga antud v_0 ja h jaoks annab see võrrand kaks t väärtust:

$$t_{1,2} = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2gh}}{g}.$$

Nende kahe väärtuse vahe on ajavahemik, mis möödub kõrguse h kahe läbimise vahel keha poolt:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{2\sqrt{v_0^2 - 2gh}}{g}. \quad (1)$$

Siit saame, et

$$v_0 = \sqrt{2gh + \frac{g^2 \Delta t^2}{4}}.$$

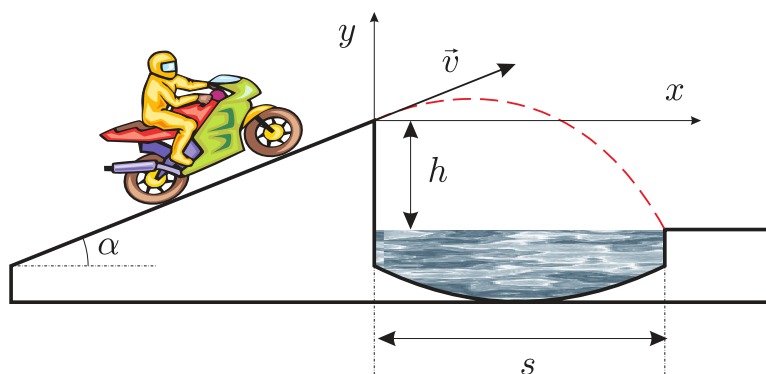
Kui valemis (1) võtta $h = 0$, siis saame ajavahemiku, mis möödub liikumise algusest kuni jõudmiseni tagasi algpunkti: $\tau = 2v_0/g$. Asendades siia varem saadud v_0 väärtuse, saame:

$$\tau = 2\sqrt{\frac{2h}{g} + \frac{\Delta t^2}{4}}.$$

L11 Mootorratas ★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2007, G 5

Suuname koordinaatteljed nii, nagu näidatud joonisel.



Mootorratturi liikumist kirjeldavad seosed

$$x = vt \cos \alpha, \quad y = vt \sin \alpha - \frac{gt^2}{2},$$

kust saame

$$y = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2v^2 \cos^2 \alpha}.$$

See on parabooli võrrand. Asendades siia mootorratturi langemiskoha koordinaadid $x = s$ ja $y = -h$, leiame minimaalse kiiruse

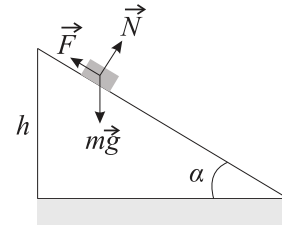
$$\begin{aligned} -h &= s \tan \alpha - \frac{gs^2}{2v^2 \cos^2 \alpha} \Rightarrow \frac{gs^2}{2v^2 \cos^2 \alpha} = h + s \tan \alpha \Rightarrow \\ \Rightarrow 2v^2 \cos^2 \alpha &= \frac{gs^2}{h + s \tan \alpha} \Rightarrow v^2 = \frac{gs^2}{2 \cos^2 \alpha (h + s \tan \alpha)} \Rightarrow \\ v &= \frac{s}{\cos \alpha} \sqrt{\frac{g}{2(h + s \tan \alpha)}}. \end{aligned}$$

L12 Kelk ★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2008, G 2

Kehtib energia jäävuse seadus. Algul on kelk kõrgusel h ja omab potentsiaalset energiat mgh . See energia kulutatakse hõõrdejõu ületamise tööks mõlemal mäenõlval ja kelgu uueks tõusuks vajaliku potentsiaalse energia peale. Energia jäävust väljendab valem

$$mgh = A_1 + A_2 + mgh_2, \quad (1)$$



kus h_2 on kelgu lõppkõrgus. Hõõrdejõud mõlemal nõlval avaldub kujul $F = \mu N = \mu mg \cos \alpha$. Teepikkus laskumisel on $s_1 = h / \sin \alpha$ ning tõusul $s_2 = h_2 / \sin \alpha$. Seega tehtud töö hõõrdejõu ületamiseks on

$$A_1 = F s_1 = \mu mgh / \tan \alpha$$

ja

$$A_2 = F s_2 = \mu mgh_2 / \tan \alpha.$$

Asendades saadud seosed valemisse (1) saame

$$h_2 = \frac{1 - \mu / \tan \alpha}{1 + \mu / \tan \alpha} h \approx 7 \text{ m}.$$

L13 Hantel ★

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2008, G 1

Kehale antakse energia $E_k = \frac{mv^2}{2}$. Massikese saab impulsi $p_c = mv$ ning hakkab vertikaalsuunas liikuma kiirusega

$$v_c = \frac{p_c}{m+m} = \frac{v}{2}$$

ning süsteemi kulgliikumise energia on seega

$$E_v = \frac{v_c^2(m+m)}{2} = \frac{mv^2}{4}.$$

Kui keha saavutab maksimaalse kõrguse, on tema kulgliikumise energia täielikult muutunud potentsiaalseks energiaks ning süsteemi kineetiline energia on nüüd

$$E = E_k - E_v = \frac{mv^2}{4}.$$

L14 Ping-pong ★

Autor: Siim Ainsaar, lõppvoor, 2008, G 2

Kui pall tõuseb kahe järjestikuse pörke vahel (pärast i -ndat pörget) kõrgusele h_i , saame nende pörgete vahelise ajavahemiku t_i :

$$h_i = \frac{g \left(\frac{t_i}{2}\right)^2}{2} \implies t_i = 2\sqrt{\frac{2h_i}{g}}.$$

Igas lennu haripunktis on palli kiirus ja ka kineetiline energia null ning koguenergia E_i potentsiaalne. Kui palli mass on m , siis $E_i = mgh_i$ ja on võrdeline haripunkti kõrgusega h_i . Seega ka haripunkti kõrgus kahaneb pärast igat pörget k korda: $h_{i+1} = \frac{h_i}{k}$. Ilmselt selles seoses $h_0 = h$.

Kukkumise aeg enne esimest pörget:

$$t_0 = \frac{2h}{g}.$$

Nii saamegi koguaja:

$$\begin{aligned} t &= t_0 + t_1 + t_2 + \dots = \sqrt{\frac{2h}{g}} + 2\sqrt{\frac{2h}{gk}} + 2\sqrt{\frac{2h}{gk^2}} + 2\sqrt{\frac{2h}{gk^3}} + \dots = \\ &= \sqrt{\frac{2h}{g}} + 2\sqrt{\frac{2h}{gk}} \left[1 + \left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)^1 + \left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)^3 + \dots \right] = \\ &= \sqrt{\frac{2h}{g}} + \sqrt{\frac{2h}{gk}} \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{k}}} = \sqrt{\frac{2h}{g}} + 2\sqrt{\frac{2h}{g}} \frac{1}{\sqrt{k} - 1} = \\ &= \sqrt{\frac{2h}{g}} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{k} - 1} \right) = \frac{\sqrt{k} + 1}{\sqrt{k} - 1} \sqrt{\frac{2h}{g}}. \end{aligned}$$

L15 Mürsk ★

Autor: Mihkel Kree, piirkonnavoos, 2009, G 2

Tähistame mürsu kiiruse lagunemishetkel v -ga. Vahetult pärast lagunemist peab ühe poole kiirus olema samuti v , kuid vastassuunaline. Olgu teise osa kiirus sel hetkel u . Impulsi jäävuse tõttu

$$Mv = \frac{M}{2}u - \frac{M}{2}v,$$

millest $u = 3v$. Vahetult pärast lagunemist kuulidel vertikaalne kiiruskomponent puudub, seetõttu võtab kummagi tüki langemine võrdselt aega. Teine tükk maandub kahurist kaugusele $L + 3L = 4L$.

L16 Kerad ★

Autor: Valter Kiisk, lahtine, 2010, G 1

Õõnes ja homogeenne kera eristuvad selle läbi, et esimese inertsimoment on suurem, sest mass on koondunud pöörlemisestrikt kaugemale, st sama nurkkiirusega pööreldes on pöörlemisega seotud kineetiline energia suurem. Niisiis võrdse kineetilise energia omandamisel (näiteks sama kaldpinda mööda alla veeredes) saavutab õõnes kera väiksema kiiruse (sest pöörlemisega seotud energia on suurem).

Vedelikku sisaldava kera korral kulub aga osa liikumise energiast paratamatult vedeliku sisehõõrdumise ületamiseks, seetõttu mehaanilise energia jäävus on katsetes rikutud (näiteks lükkame kerad veerema; vedelikku sisaldav kera pidurdub iseenesest).

L17 Sild ★

Autor: Valter Kiisk, lõppvoos, 2010, G 1

Olgu silla kõverusraadius r . Pythagorase teoreemist

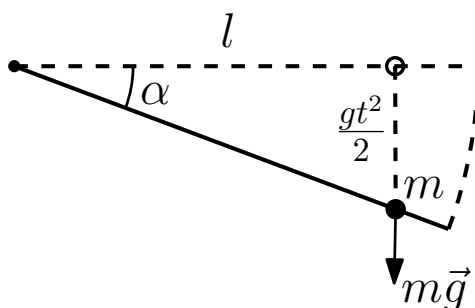
$$r^2 = (l/2)^2 + (r - h)^2 \implies 0 = l^2/4 - 2rh + h^2.$$

Kuna $h \ll l$ ja seega $h \ll r$, siis h^2 võib ära jätta ja $r = l^2/8h = 250$ m. Auto raskusjõu mg ja toereaktsiooni N resultant annab kesktõmbekiirenduse v^2/r . Seega $N = mg - mv^2/r \approx 8700$ N.

Kontakt rataste ja maapinna vahel hakkab kaduma, kui $N = 0$. Seega $v = \sqrt{gr} \approx 180$ km/h.

L18 Varras ★

Autor: Stanislav Zavjalov, lõppvoos, 2011, G 2



Kuna varras on kaalutu, peab sellele mõjuv sumaarne jõud olema 0. Vastasel korral mõjuks sellele Newtoni III seaduse kohaselt lõpmatu jõud, mis pole füüsikaline. Sellest saab järeldada, et massile mõjuv normaaljõud on null ning hõõrdeta libisemise tõttu on ka vardaga paralleelne jõukomponent null. Seega ei mõju massile varda poolt ükski jõud ning mass on vabalanguses.

Aja t jooksul jõuab mass langeda vahemaa $\frac{gt^2}{2}$ ning varda ja horisontaali vaheline nurk avaldub kui (vt joonist) $\tan \alpha = \frac{gt^2}{2l}$.

L19 Kadunud rahakott ★

Autor: Eero Vaher, lahtine, 2012, G 2

Hoovõturaja alumise otsani jõudes on rahakott omandanud kineetilise energia $E = \frac{mv^2}{2} = mgh$, kusjuures algkiirus $v = \sqrt{2gh}$ on horisontaalne. Kui valime koordinaatide alguspunktiks hoovõturaja alumise otsa, määravad rahakoti lennutrajektoori võrrandid $x = vt$ ja $y = -gt^2/2$. Rahakott maandub siis, kui selle trajektoori ja nõlva kirjeldav joon $y = -x \tan \alpha$ lõikuvad. Seega

$$-gt^2/2 = -vt \tan \alpha,$$

$$t = \frac{2v \tan \alpha}{g},$$

ehk

$$x = 4h \tan \alpha.$$

L20 Kivi ★

Autor: Taavi Pungas, lahtine, 2013, G 1

Olgu libisema hakkamise hetkel pinna kaldenurk α . Mõtleme esmalt, kuidas on seotud see α väärtus hõõrdeteguriga μ . Topsile mõjuva raskusjõu mg jagame pinnaga risti olevaks komponendiks $F_{\perp} = mg \cos \alpha$ ning pinnaga paralleelseks komponendiks $F_{\parallel} = mg \sin \alpha$. Kivi pind avaldab topsile toereaktsiooni $N = F_{\perp}$ ning maksimaalset hõõrdejõudu $F_h = \mu N$. Tops libiseb maha, kui $F_{\parallel} > F_h$. Kriitilisel hetkel saame võrrandi $F_{\parallel} = F_h$ ehk

$$\mu \cos \alpha = \sin \alpha, \quad \text{millest} \quad \tan \alpha = \mu.$$

Kaldenurk α on ühtlasi võrdne vertikaali ja kivi keskpunktist libisemispaika tõmmatud joone vahelise nurgaga ja suhtub täisringi 360° samuti kui kaarepikkus b suhtub ümbermõõtu a , $\alpha = 360^\circ \cdot b/a$. Seega $\mu = \tan(360^\circ \cdot b/a)$ ning arvuliseks vastuseks saame

$$\mu = \tan(30^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,58.$$

L21 Kelgutaja ★

Autor: Taavi Pungas, piirkonnavor, 2013, G 4

Laps kelgutab vahemaa $l = h/\sin \alpha$. Fikseeritud h ja t puhul on nõlva kalle vähim siis, kui hõõrdejõud puudub. Sel juhul on raskusjõu ja toereaktsiooni resultantjõu suund mööda nõlva alla ning see annab kelgule kiirenduse $a = g \sin \alpha$. Kiirendus on konstantne, seega $l = \frac{at^2}{2}$. Asendades vahemaa ja kiirenduse avaldised, saame

$$\frac{h}{\sin \alpha} = \frac{gt^2 \sin \alpha}{2},$$

millest leiame

$$\alpha = \arcsin \left(\sqrt{\frac{2h}{gt^2}} \right).$$

Kasutades ülesandes toodud lähteandmeid, saame arvuliseks vastuseks $\alpha = 12^\circ$.**L22 Pall ★**

Autor: Taivo Pungas, lõppvoor, 2013, G 2

$h \propto t^2$, kus h on maksimaalse tõusu kõrgus ja t on sellele kõrgusele tõusmiseks kulunud aeg.

Olgu t_i aeg, mis kulus pallil pärast i -ndat põrget maksimaalsele kõrgusele tõusmiseks. Kuna iga piik graafikul tähistab üht põrget, siis võime mõõta graafikult 3. ja 4. põrke alguste vahelise kauguse d_3 , kusjuures $t_3 = kd_3$ (kus k on mingi võrdetegur), ning 1. ja 2. põrke alguste vahelise kauguse d_1 , kusjuures $t_1 = kd_1$. Seega $\frac{t_1}{t_3} = \frac{d_1}{d_3}$, kust

$$h_1 = h_3 \left(\frac{t_1}{t_3} \right)^2 = h_3 \left(\frac{d_1}{d_3} \right)^2 \approx 1,7 \text{ m}.$$

L23 Kaubarong ★

Autor: Mihkel Rähn, lahtine, 2014, G 1

Jagades tuntud töö valemi $A = Fs + \Delta E$ ajaga, saame võimsuse jaoks võrrandi

$$N = Fv + \frac{\Delta E}{t},$$

mille kohaselt veduri võimsus on tasakaalustatud takistusjõudude ja kiiruse korrutise ning potentsiaalse energia E muutumise kiiruse summaga. Hõõrdejõud on $F = \mu mg$. Horisontaalsel teel potentsiaalne energia ei muutu ning avaldades saame

$$v_1 = \frac{N}{\mu mg} = 92 \text{ km/h}.$$

Tõusul toimub potentsiaalse energia $E = mgh$ suurenemine, kus $h = s \sin a$ ning $\sin a = \frac{1 \text{ cm}}{100 \text{ cm}}$. Seega

$$\frac{\Delta E}{t} = \frac{smg}{t} \sin a = mgv \sin a.$$

Seega teisel juhul

$$N = umgv_2 + mgv_2 \sin a,$$

millest

$$v_2 = \frac{N}{mg(u + \sin a)} = 15 \text{ km/h.}$$

L24 Vaakumkahur ★

Autor: Andreas Valdmann, lahtine, 2014, G 2

Pall jaotab kahuritoru kaheks kambriks. Enne tulistamist on mõlemas kambri rõhk võrdne nulliga. Vasakpoolse membraani purustamisel täitub vasak pool torust välisõhuga ning palli poolte vahel tekib rõhkude vahe $\Delta P = P_0 - 0 = P_0$. Pallile hakkab mõjuma jõud, mis on võrdne palli ristlõikepindala ja rõhkude vahe korrutisega: $F = P_0 \pi d^2 / 4$. Newtoni 2. seaduse abil saame leida palli kiirenduse $a = F/m$. Ühtlaselt kiireneva liikumise korral kehtib seos

$$l = \frac{v^2 - v_0^2}{2a},$$

kus l on läbitud vahemaa ning v_0 ja v on vastavalt alg- ja lõppkiirus. Kuna palli algkiirus on võrdne nulliga ning tahame leida lõppkiirust, siis avaldame

$$v = \sqrt{2la} = \sqrt{\frac{2lP_0\pi d^2}{4m}} = d\sqrt{\frac{lP_0\pi}{2m}}.$$

Kasutades ülesandes antud arvvärtusi, saame palli kiiruseks vahetult enne parempoolse membraani läbimist $v = 130 \text{ m/s}$. Membraani purustamiseks kulub energiat ning seetõttu on palli väljumiskiirus sellest veidi väiksem, kuid võite isegi ette kujutada, et õhuke fooliumileht ei takista 470 km/h kihutava palli lendu just märkimisväärselt.

L25 Mängukahur ★

Autor: EFO žürii, lahtine, 2016, G 1

Kuna pall maandub kaldpinnale risti, siis liigub pall sellel hetkel nurga α all vertikaali suhtes. Seega tulistatakse pall kahurist välja ka nurga α all vertikaali suhtes ning pall pörkab kaldpinnalt tagasi ka sama nurga all. Palli horisontaalne kiiruse komponent on $v \sin(\alpha)$ ja vertikaalne komponent on $v \cos(\alpha)$. Trajektoori kõige ülemises punktis on vertikaalne kiiruse komponent null ja on kulunud pool kogu liikumise ajast t . Aja $t/2$ jooksul muutub kiirus raskuskiirenduse tõttu $gt/2$ võrra, seega $gt/2 = v \cos(\alpha)$, millest $t = 2v \cos(\alpha)/g$. Horisontaalne kiirus ei muutu liikumise jooksul. Horisontaalselt läbitud vahemaa on

$$s = vt \sin(\alpha) = \frac{2v^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha)}{g} = \frac{v^2 \sin(2\alpha)}{g}.$$

Seega kahurist tulistades oli palli algkiirus v_1 , kus

$$v_1^2 = \frac{Lg}{\sin(2\alpha)},$$

ning tagasipõrkel v_2 , kus

$$v_2^2 = \frac{lg}{\sin(2\alpha)}.$$

Tulistamise ja tagasipõrkamise hetkel oli pallil ainult kineetiline energia:

$$E_1 = \frac{mv_1^2}{2} = \frac{mLg}{2\sin(2\alpha)}, \quad E_2 = \frac{mv_2^2}{2} = \frac{mlg}{2\sin(2\alpha)}.$$

Seega põrkel kaduma läinud energia osakaal on

$$\frac{E_1 - E_2}{E_1} = \frac{L - l}{L}.$$

L26 Kõievedu ★

Autor: Oleg Košik, piirkonnavor, 2016, G 2

Olgu nööri tõmme T . Vastavalt Newtoni III seadusele on nööri tõmme mõlema mehe jaoks sama suur, kuid vastupidises suunas. Lisaks nööri tõmbele mõjub kummalegi mehele vastassuunas hõõrdejõud, mille maksimaalne väärtus on võrdeline raskusjõuga. Seetõttu hakkab esimesena liikuma kergem mees, kelleks on Oleg.

Vaatame, millise maksimaalse kiirendusega hakkab Oleg liikuma. Jõudude tasakaal Eero jaoks:

$$T - \mu m_1 g = 0.$$

Olegi puhul kehtib aga Newtoni II seadus:

$$T - \mu m_2 g = m_2 a.$$

Avaldades esimesest võrrandist $T = m_1 g$ ja asendades teise võrrandisse, leiame

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_2} \mu g \approx 0,86 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

L27 Vastlaliug ★

Autor: Moorits Mihkel Muru, lõppvoor, 2017, G 1

Hõõrdejõu tõttu kulutatud energia sõltub läbitud teepikkusest ja selle kaldest, potentsiaalse energia vahe sõltub kõrguse muutust. Esimesel löigul vabaneb potentsiaalne energia $E_1 = mgh$ ja hõõrdejõu mõjul liikumiseks kaotatakse energia

$$A_1 = \mu \cdot mg \cos \alpha \cdot \frac{h}{\sin \alpha} = \mu mgh \cot \alpha.$$

Teisel löigul vabaneb potentsiaalne energia $E_2 = mgs \sin \beta$ ja hõõrdejõu tõttu kaotatakse energia

$$A_2 = \mu \cdot mg \cos \beta \cdot s = \mu mgs \cos \beta.$$

Seega nõlva lõppedes on kelgutajal alles kineetiline energia

$$\begin{aligned}\Delta E &= E_1 - A_1 + E_2 - A_2 = \\ &= mgh(1 - \mu \cot \alpha) + mgs(\sin \beta - \mu \cos \beta) = 787,4 \text{ J}.\end{aligned}$$

Tasase maa peal enam potentsiaalset energiat ei vabane, aga kineetiline energia väheneb hõõrdumise tõttu. Kelk libiseb tasase maa peal

$$l = \frac{\Delta E}{F_h} = \frac{\Delta E}{\mu mg} = 21,4 \text{ m}.$$

Seega kogu vastlaliu pikkus on

$$\frac{h}{\sin \alpha} + s + l = 47,2 \text{ m}.$$

L28 Karatist ★★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2007, G 6

Laua paindumist käsitleme sarnaselt vedru paindumisega. Laua elastsusenergia enne purunemist on $E = kx^2/2$. Eeldame, et pärast plastset põrget toimival liikumisel on mehaaniline energia jääv ning lauajupp ja käsi peatuvad vahetult pärast lööki. Käe ja laua kokkupõrge – löök – on täielikult mitteelastne. Seega peab pärast lööki laua ja rusika kineetilise energiast

$$W = \frac{(m + M)u^2}{2}$$

piisama laua deformeerimiseks.

$$E = W \quad \Rightarrow \quad u = \sqrt{\frac{kd^2}{m + M}},$$

kus u on laua ja käe kiirus pärast lööki. Löögi hetkel kehtib impulsi jäävus

$$(m + M)u = mv \quad \Rightarrow \quad v = \frac{m + M}{m}u.$$

Kokkuvõttes saame

$$\begin{aligned}v &= \frac{m + M}{m} \sqrt{\frac{kd^2}{m + M}} = \sqrt{\frac{kd^2(m + M)}{m^2}}, \\ v &= \sqrt{\frac{1,4 \cdot 10^5 \cdot 0,02^2 \cdot (1,5 + 2)}{1,5^2}} \approx 9,3 \text{ m/s}.\end{aligned}$$

L29 Veenus ★★

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2007, G 2

a) Maksimaalse eemaldumise korral moodustub Maast, Veenusest ja Päikesest täisnurkne kolmnurk, mille täisnurga tipp on Veenus. Siit saame Veenuse ja Maa orbitaalraadiuste suhe

$$\alpha = \sin 46^\circ = 0,72.$$

b) Veenuse tiirlemisperioodi saame Kepleri seadusest

$$T_V = T_M \sqrt{\alpha^3}.$$

Maa tiirlemise nurkkiirus $\omega_M = \frac{2\pi}{T_M}$ ning Veenuse tiirlemise nurkkiirus $\omega_V = \frac{2\pi}{T_V}$. Nende suhtelise liikumise nurkkiirus

$$\Delta\omega = \omega_V - \omega_M = \omega_M \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha^3}} - 1 \right)$$

ning suhtelise liikumise periood on

$$T_s = \frac{T_M}{\frac{1}{\sqrt{\alpha^3}} - 1} = 570 \text{ päeva.}$$

Järjestikuste eemaldumiste vahele jääb Päikeselt vaadatuna nurk $2 \cdot (90^\circ - 46^\circ) = 88^\circ$ või $360^\circ - 88^\circ = 272^\circ$, ehk päevades

$$T_s \frac{88}{360} = 140 \text{ päeva.}$$

ja

$$T_s \frac{272}{360} = 430 \text{ päeva.}$$

L30 Auto ★★

Autor: Mihkel Heidelberg, piirkonnavor, 2009, G 5

Vedavate rataste ja maa vahel mõjub mingi horisontaalsihiline hõõrdejõud F . Jõust ja kiirusest saame auto liikumisse mineva võimsuse $N_l = Fv$. Ratastele mõjub jõumoment Fr , mille tõttu mootori võimsus $N_m = \omega Fr$. Kasutegur on niisiis

$$\nu = \frac{N_l}{N_m} = \frac{Fv}{F\omega r} = \frac{v}{\omega r}.$$

L31 Vedru ★★

Autor: Aigar Vaigu, piirkonnavor, 2010, G 4

Hetkel, mil tellis vedrust eemalduma hakkab, liigub vedru ülemine ots koos tellisega kiirusega v ülesse. Tellise kiirus on piisav, et kerkida tagasi esialgsele kõrgusele $H \propto v^2$. Eeldame, et vedru on pikisuunas ühtlane, sellisel juhul liigub vedru massikese ülemise ja alumise otsa keskmise kiirusega ülesse. Niisiis, $v_{\text{vedru}} = v/2$. Seega tõuseb vedru massikese kõrgusele $h \propto v_{\text{vedru}}^2 = v^2/4$, ehk

$$h = \frac{H}{4}.$$

L32 Pendel ★★

Autor: Taavi Pungas, piirkonnavor, 2011, G 7

Esialgse hinnangu perioodile, $\tau = 2,425$ s, saame $\tau_1 = t_2 - t_1$ ja $\tau_2 = t_4 - t_3$ keskmisest. Seda kasutades näeme, et t_1 ja t_3 vahel pidi toimuma täpselt 24 võnget, samamoodi t_2 ja t_4 vahel. Saame kaks sõltumatut mõõtmist 24 võnke kestuse kohta: $\tau'_1 = (t_3 - t_1)/24 = 2,4146$ s ja $\tau'_2 = (t_4 - t_2)/24 = 2,4125$ s. Nende keskmine annab meie hinnangu pendli perioodi kohta, $\tau' = 2,4135$ s $\approx 2,414$ s.

L33 Alpinist ★★

Autor: Kaur Aare Saar, lahtine, 2013, G 3

Alpinist kukub $2L + x$ võrra, kus x on nööri pikenemine. Jõudes kukkumise kõige madalamasse punkti, kus kineetiline energia puudub, on gravitatsiooniline potentsiaalne energia $mg(2L + x)$ üle läinud vedru potentsiaalseks energiaks $kx^2/2$. Seega energia jäävuse seadus väljendub kujul

$$mg(2L + x) = \frac{kx^2}{2}.$$

Maksimaalse nööri pingest $T = kx = 25mg$ avaldame $x = 25mg/k$ ning asendades selle eelnevasse võrrandisse, saame

$$4mgL + \frac{50m^2g^2}{k} = \frac{25^2m^2g^2}{k}.$$

Lihtsustamiseks korrutame võrrandit k -ga ning jagame $4mgL$ -ga, saame

$$k = \frac{(25^2 - 50)mg}{4L} \approx 18 \text{ kN/m}.$$

(Huvitav on ka pikenemine x välja arvutada, saame $x \approx 1$ m.)

L34 Langevarjuhüpe ★★

Autor: Taavi Pungas, piirkonnavoore, 2014, G 5

Kui Juku kiirus oli konstantne (v), tasakaalustusid temale mõjuv raskusjõud ja õhu hõõrdejõud: $(m + m_v)g = kv^2$, kus k on mingi koefitsient. Ka Juhatile mõjuvad jõud olid konstantse kiirusega u langedes tasakaalus, $(M + m_v)g = ku^2$. Neist kahest võrrandist saame seose

$$\frac{m + m_v}{M + m_v} = \frac{v^2}{u^2}.$$

Teisalt $v = h/t$ ja $u = h/T$, seega $v/u = T/t$. Siit

$$\frac{T^2}{t^2} = \frac{m + m_v}{M + m_v},$$

$$T = t \cdot \sqrt{\frac{m + m_v}{M + m_v}} = 92 \text{ s.}$$

L35 Kelk ★★

Autor: Joonas Kalda, piirkonnavoore, 2016, G 4

Olgu jõe ületamiseks vajalik kõrgus h ja Juku mass koos kelguga m . Startides on Jukul potentsiaalne energia $E_{\text{pot}} = mgh$, mis muundub kelgu liikumisel soojuseks hõõrdejõu kaudu. Kaldal tuleb Jukul läbida distants $s = h/\sin(\alpha)$. Hõõrdejõu väärtus kaldpinnal on $F_h = \mu_1 mg \cos(\alpha)$. Hõõrdejõu poolt tehtud töö on $A_1 = F_h s = \mu_1 mgh/\tan(\alpha)$. Jää peal tuleb läbida distants l ja hõõrdejõu poolt tehtud töö on $A_2 = \mu_2 mgl$. Piirjuhul läheb kogu potentsiaalne energia soojusenergiaks:

$$E_{\text{pot}} = A_1 + A_2,$$

$$h = \frac{\mu_1 h}{\tan(\alpha)} + \mu_2 l,$$

$$h \cdot \left(1 - \frac{\mu_1}{\tan(\alpha)}\right) = \mu_2 l,$$

$$h = \frac{\mu_2 l \tan(\alpha)}{\tan(\alpha) - \mu_1} \approx 3,9 \text{ m.}$$

L36 Pidurdus ★★

Autor: Eero Vaher, lõppvoor, 2016, G 2

Olgu auto mass m ning pidurdusjõud F . Auto kineetiline energia kulub pidurdusjõu ületamiseks ning potentsiaalse energia muuduks. Ülesmäge sõites

$$\frac{mv^2}{2} = Fs_1 + mg\Delta h_1.$$

Kõrguse muut ning auto poolt läbitud teepikkus on omavahel seotud avaldisega $\Delta h_1 = ks_1$, seega

$$\frac{mv^2}{2} = (F + mgk) s_1.$$

Allamäge sõites kehtib analoogiliselt

$$\frac{mv^2}{2} = (F - mgk) s_2.$$

Vasakute poolte võrdsusest järeldub paremate poolte võrdsus

$$(F + mgk) s_1 = (F - mgk) s_2$$

ehk

$$F = \frac{s_2 + s_1}{s_2 - s_1} mgk.$$

Kiiruse jaoks saame energia jäävusest avaldised

$$v = \sqrt{2gk s_1 \left(\frac{s_2 + s_1}{s_2 - s_1} + 1 \right)}$$

või

$$v = \sqrt{2gk s_2 \left(\frac{s_2 + s_1}{s_2 - s_1} - 1 \right)}.$$

Mõlemad saab ümber kirjutada kujule

$$v = \sqrt{4gk \frac{s_1 s_2}{s_2 - s_1}} = 14 \text{ m/s} = 50,4 \text{ km/h}.$$

L37 Kahurikuul ★★

Autor: Hans Daniel Kaimre, lõppvoor, 2016, G 3

Lähtume sellest, et kehtima peab energia jäävuse seadus. Kui laskmise hetkel on kuuli kiirus v , siis on alghetkel energia $E_1 = mv^2/2 - GMm/R$, kus M on Maa mass ja m kuuli mass. Kõige kõrgemal olles on kuuli vertikaalne kiirus 0, seega energia avaldub kui $E_2 = -GMm/(R+h)$, kus h on kuuli kõrgus Maa pinnast. Energia jäävuse seadusest lähtuvalt peavad need energiad olema võrdsed:

$$E_1 = E_2 \quad \rightarrow \quad \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{R} = -\frac{GMm}{R+h}.$$

On öeldud, et juhul kui gravitatsioonivälja tugevus oleks igas punktis kuuli trajektoril võrdne raskuskiirendusega Maa pinnal, lendaks kuul kõrgusele H . Ehk $mv^2/2 = mgH$ ja asendades $g = GM/R^2$ saame $v^2/2 = GMH/R^2$. Asendades selle ülalpool olevasse võrduksesse, saame:

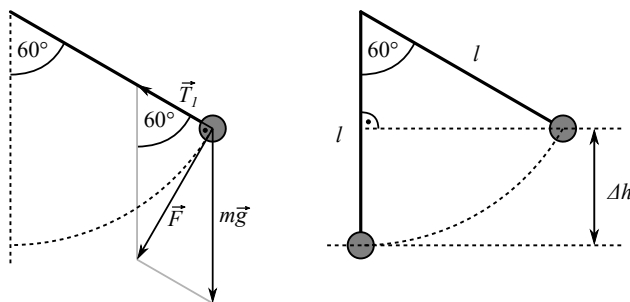
$$\frac{GMm}{R^2}H - \frac{GMm}{R} = -\frac{GMm}{R+h} \quad \rightarrow \quad \frac{H}{R^2} - \frac{1}{R} = -\frac{1}{R+h},$$

$$h = \frac{R^2}{R-H} - R = \frac{RH}{R-H} \approx 427 \text{ km}.$$

L38 Pendel ★★

Autor: Andreas Valdmann, piirkonnavor, 2017, G 3

Olgu pendli pikkus l ja koormise mass m . Amplituudiasendis (joonisel vasakul) on pendel paigal ja koormisele mõjuvad raskusjõud $m\vec{g}$ ning nööri pinged \vec{T} . Nende jõudude summa \vec{F} on suunatud piki koormise trajektoori ehk on risti nööriga (resultantjõul \vec{F} ei saa olla piki nööri suunatud komponenti, sest vastasel korral peaks koormise kiirendamisel nöör pikeneda või lüheneda). Täisnurksest kolmnurgast leiame, et amplituudiasendis on pinge nööris $T_1 = mg \cos(60^\circ) = mg/2$. Amplituudiasendist eemaldumisel toimub kaks muutust: nurk α väheneb ja koormisele hakkab mõjuma kesktõmbekiirendus, mis on nööri pingega vastassuunaline. Kuna mõlemad muutused suurendavad pinget nööris, siis on pinge vähim just amplituudiasendis.



Eelnevale argumendile toetudes on pinge nööris suurim pendli tasakaaluasendis: $T_2 = m(g + a)$, kus $a = v^2/l$ on koormisele mõjuv kesktõmbekiirendus ja v koormise kiirus. Kiiruse v leidmiseks kasutame energia jäävuse seadust, mille kohaselt on koormise potentsiaalse energia muut tasakaaluasendi ja amplituudiasendi vahel võrdne kineetilise energiaga tasakaaluasendis: $mg\Delta h = mv^2/2$. Parempoolselt jooniselt näeme, et kõrguste erinevus $\Delta h = l[1 - \cos(60^\circ)] = l/2$. Seega $a = 2g\Delta h/l = g$ ja $T_2 = 2mg$. Niisiis erinevad suurim ja vähim pinge nööris $T_2/T_1 = 4$ korda.

L39 Mäenõlv ★★

Autor: Jonatan Kalmus, lõppvoor, 2017, G 2

Vaatleme poole pedaalipöörde jooksul toimuvat protsessi. Selle käigus liigub vajuv pedaal ratturi taustsüsteemis $2r_1$ võrra allapoole, st ratturi poolt tehtud töö pooleperioodi jooksul on $A = 2mgr_1$. Teisest küljest peab ratturi poolt tehtud töö kompenseerima massikeskme potentsiaalse energia kasvu $\Delta E_P = (M + m)gh$, kus h on ratta vertikaalne nihe.

Poole pedaalipöörde jooksul liigub ratas pikki mäenõlva väntmehhanismi ülekannete tõttu vahemaa $l = \frac{\pi r_2 r_4}{r_3}$. Massikeskme vertikaalne nihe on seega $h = l \sin \alpha$. Niisiis, kriitilise kaldenurgaga kehtib $A = \Delta E_P$, ehk

$$2mgr_1 = (M + m)g \frac{\pi r_2 r_4}{r_3} \sin \alpha.$$

Seega

$$\alpha = \arcsin \left(\frac{2\pi m r_1 r_3}{(M + m) r_2 r_4} \right).$$

L40 Aerud ★★

Autor: Tundmatu autor, piirkonnavor, 2005, G 6

Jõumomentide tasakaalu tingimus aeru jaoks tullide suhtes annab aerulabadele mõjuva keskmise jõu: $F_l = Fa/b$.

Tasakaalutingimus süsteemi paat+aerutaja+aerud jaoks annab võrrandi:

$$\frac{2Fa}{b} = \alpha v^2,$$

millest

$$v = \sqrt{\frac{2Fa}{\alpha b}} = 2 \text{ m/s}.$$

Kui aerulabad püsiksid tõmbamise ajal vee suhtes paigal, siis oleks võimsus

$$P = \frac{2vFa}{b} = 160 \text{ W}.$$

Et aga aerulabad nihkuvad ilmselt veidi tagasi, siis on tegelik võimsus mõnevõrra suurem.

L41 Kivi ★★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2006, G 4

Kivile mõjuvaks kesktõmbejõuks on paela tõmbepinge T projektsioon tiirlemise tasapinnale $F = T \sin \varphi$ (vt joonist), kus φ on nurk paela ja vertikaalsihi vahel. Newtoni teine seadus kivi liikumise jaoks mööda ringjoont raadiusega R näeb välja:

$$m\omega^2 R = T \sin \varphi, \quad (1)$$

kus $\omega = 2\pi/\tau$ – kivi nurkkiirus ja m – kivi mass. Kuna vertikaalsuunas kivil kiirendus puudub, järelkult kivile mõjuvate jõudude projektsioonid vertikaalteljele annavad summas nulli:

$$T \cos \varphi = mg. \quad (2)$$

Jagades valemi (1) valemiga (2), saame

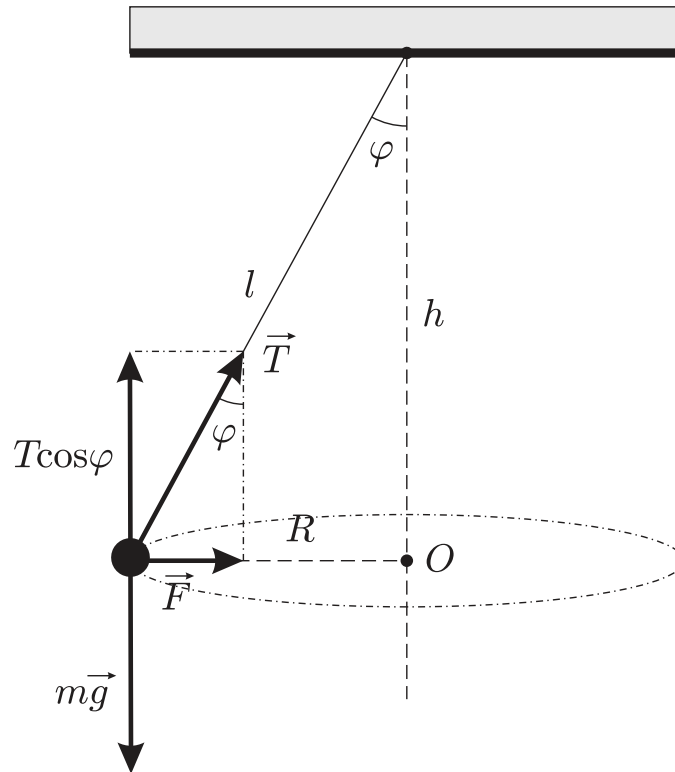
$$\tan \varphi = \frac{\omega^2 R}{g}.$$

Arvestades, et $\tan \varphi = R/h$, saame

$$\frac{\omega^2 R}{g} = \frac{R}{h} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{h}},$$

ehk

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{h}{g}} = 2 \cdot 3,14 \cdot \sqrt{\frac{1,25}{9,81}} \approx 2,24 \text{ s.}$$



L42 Kaldpind ★★

Autor: Mihkel Rähn, piirkonnavor, 2006, G 4

Esimeseks pörkeks kogub pall kiiruse $v = \sqrt{2gh}$. Valime x -telje pikki kaldpinda ja y -telje risti kaldpinnaga. Seega mõjub pallile x -suunaline kiirendus $a_x = g \sin \alpha$ ja y -suunaline kiirendus $a_y = -g \cos \alpha$. Märkame, et palli y -suunaline liikumine on efektiivselt sama nagu nõrgemas raskusväljas pörkumine, ehk pall hakkab kindla perioodiga üles-alla pörkuma. Pörgete vaheline aeg avaldub kui

$$\tau = \frac{2v_{0y}}{|a_y|} = \frac{2\sqrt{2gh} \cos \alpha}{g \cos \alpha} = \sqrt{8h/g},$$

kus $v_{0x} = \sin \alpha \sqrt{2gh}$ ja $v_{0y} = \cos \alpha \sqrt{2gh}$ on palli esimese pörke järgsed kiirusekomponendid.

x -telje suunaline liikumisvõrrand avaldub kui

$$x = v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}.$$

Peale viienda pörget, ajahetkel $t = 4\tau$, on palli x -koordinaat

$$x = \sin \alpha \sqrt{2gh} \cdot 4\sqrt{\frac{8h}{g}} + \frac{g \sin \alpha}{2} \cdot 16\frac{8h}{g} = 80h \sin \alpha.$$

L43 Kuulike ★★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2008, G 5

Olgu α nurk vertikaali ja varda vahel ning l niidi pikkus. Energia jäävuse seadusest $v^2 = 2gl \cos \alpha$, millest kiiruse vertikaalkomponendi ruut

$$v_y^2 = 2gl \cos \alpha \sin^2 \alpha = 2gl \cos \alpha (1 - \cos^2 \alpha).$$

Tähistades $\cos \alpha = y$, saame v_y^2 maksimumi tingimuse, kui võtame sellest tuletise y järgi:

$$\frac{dv_y^2}{dy} = 2gl (1 - 3y^2) = 0,$$

millest $y = 1/\sqrt{3}$ ja $\alpha = \arccos(1/\sqrt{3}) \approx 55^\circ$.

Alternatiivne lahendus

Ülesandes on öeldud, et kuulikese kiiruse vertikaalne komponent hakkab esialgu suurenema, kuid teatud hetkest alates vähenema. See tähendab seda, et kuulikese kiirenduse vertikaalne komponent oli alguses positiivne ning pärast muutus negatiivseks. Järelikult hetkel, kui kiiruse vertikaalne komponent on maksimaalne, on kiirenduse vertikaalne komponent null. Seega vaadeldaval hetkel võrdub kuulikese raskusjõu ju niidi tõmbejõu vertikaalsete projektsioonide summa nulliga, ehk siis

$$mg = T \cos \alpha. \quad (1)$$

Kuuli kesktõmbeikiirendus on $a_n = v^2/l$, kus l on niidi pikkus. Seega Newtoni II seaduse põhjal

$$m \frac{v^2}{l} = T - mg \cos \alpha. \quad (2)$$

Energia jäävuse seadusest

$$v^2 = 2gl \cos \alpha. \quad (3)$$

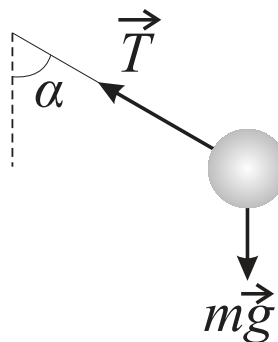
Asendades võrdusesse (2) avaldised T ja v^2 jaoks võrdustest (1) ja (3) saame

$$\frac{m \cdot 2gl \cos \alpha}{l} = \frac{mg}{\cos \alpha} - mg \cos \alpha,$$

millest

$$\frac{1}{\cos \alpha} - \cos \alpha = 2 \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Siit $\alpha = \arccos(1/\sqrt{3}) \approx 55^\circ$.



L44 Veerev silinder ★★

Autor: Andres Laan, lahtine, 2010, G 3

Eraldumiskõrgust on kõige lihtsam arvutada kasutades jõudude tasakaalu. Nii kaua kui veerev keha on alusega kontaktis, mõjub talle toereaktsioon. Pinnalt eraldumise punktis muutub toereaktsioon nulliks ja raskusjõu raadiusesihiline komponent saab võrdseks kesktõmbekiirendusega. Seega

$$\frac{mv^2}{R+r} = mg \cos \alpha,$$

kus α on pinna kaldenurk eraldumispunktis (mis asub kõrgusel $H = (r+R) \cos \alpha$). Vastav kiirus on leitav energia jäävuse seadusest, ehk võrdsustades gravitatsiooni-energia muudu kulg- ja pöördliikumise kineetilise energiaga:

$$mg(R+r-H) = mv^2.$$

Elimineerides eelnevaist võrrandeist $\cos \alpha$, saame tulemuseks $H = (r+R)/2$.

L45 Veoauto ★★

Autor: Kristian Kuppart, lahtine, 2011, G 3

Läheme veoautoga seotud taustsüsteemi, mis liigub kulgevast kiirendusega \vec{a} . Selles süsteemis mõjub kehadele lisaks raskusjõule veel inertsijõud $-m\vec{a}$, mis on olemuselt identne raskusjõuga. Seega võtab veepind asendi, mis on risti inertsijõu ja raskusjõu resultantiga, $m(\vec{g} - \vec{a})$. Olgu vedelikupinna algasendi keskpunkt O ja parempoolne otspunkt A ning uue asendi parempoolne otspunkt B . Sellisel juhul on kolmnurk OAB sarnane vektoritele $-\vec{a}$ ja \vec{g} ehitatud täisnurkse kolmnurgaga (nurkade võrdsuse tõttu): $|AB| = |OA| \cdot a/g$. Maksimaalse kiirenduse korral ühtib punkt B kasti ülemise servaga, st $|AB| = H - h$. Niisiis

$$a = g \frac{|AB|}{|OA|} = 2g \frac{H-h}{L}.$$

L46 Surmasõlm ★★

Autor: Andreas Valdmann, piirkonnavor, 2012, G 5

Autole mõjuvad raskusjõud ja tee toereaktsioon. Silmuses püsimiseks ei tohi toereaktsioon kaduda. Nende jõudude resultandi silmuse keskele suunatud komponent moodustab kesktõmbejõu. Selle suurus sõltub auto kiirusest:

$$F_c = m \frac{v^2}{R},$$

kus R on silmuse raadius. Kriitiline olukord tekib silmuse ülemises punktis, kus auto kiirus on vähim ja raskusjõud tõmbab autot risti teest eemale. Piirjuhul seal toereaktsioon puudub ning raskusjõud on ise kesktõmbejõud:

$$mg = \frac{mv^2}{d/2},$$

kus m on auto mass ja v kiirus. Energia jäävuse seaduse kohaselt on auto kõrgus ja kiirus otseselt seotud:

$$mgh' = \frac{mv^2}{2},$$

kus h' on algpunkti ja uuritava punkti kõrguste vahe. Saadud võrrandit eelmisega läbi jagades saame vajaliku kõrguste erinevuse algpunkti ja silmuse haripunkti vahel:

$$h' = \frac{d}{4}.$$

Otsitud kogukõrgus on silmuse läbimõõdu võrra suurem ja

$$h = h' + d = 1,25d.$$

L47 Veejuga ★★

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2012, G 2

Vaatleme torust väljuvat veeosakest kui vabalt langevat keha horisontaalsuunalise algiirusega v , mille horisontaalsuunaline kaugus kasvab ajas lineaarselt $s = vt$, vertikaalsuunaline aga kui $h = \frac{1}{2}gt^2$. Järelikult $h \sim s^2$ ning veejoa kuju on matemaatiliselt kirjeldatav parabooli võrrandiga $y = kx^2$, kus x ja y on veejoa koordinaadid joonisel toodud teljestiku ühikutes (nullpunktiks valime teljestiku ülemise vasakpoolse nurga, x -telg olgu suunatud paremale ning y -telg alla). Määramaks joonise abil võrdetegurit k , valime mõned täisarvuliste koordinaatiga punktid (x, y) , millest juga läbi läheb, näiteks $(19,5)$, $(24,8)$ ja $(34,16)$. Arvutades iga punkti jaoks suhte x^2/y , leiame et $k = 0,014$.

Arvestades järgnevalt, et teljestiku ühikule vastab füüsikaline pikkus d (veejoa läbimõõt, mille loeme võrdseks toru sisediaimeetriga), võime teisendada kaugused s ja h teljestiku ühikutesse:

$$x = \frac{s}{d} = \frac{vt}{d}, \quad \text{ja} \quad y = \frac{h}{d} = \frac{gt^2}{2d} = \frac{gd}{2v^2} \frac{v^2t^2}{d^2} = \frac{gd}{2v^2} x^2,$$

millest saame kiirust ja diameetrit omavahel siduva võrrandi

$$k = \frac{gd}{2v^2} \quad \text{ehk} \quad \frac{v^2}{d} = \frac{g}{2k}. \quad (1)$$

Nüüd arvestame aja t jooksul torust läbi voolanud vee ruumalaks Svt , kus S on toru sisepindala, millest saame teise kiirust ja diameetrit sisaldava võrrandi

$$V = \frac{\pi d^2}{4} vt \quad \text{ehk} \quad vd^2 = \frac{4V}{\pi t}. \quad (2)$$

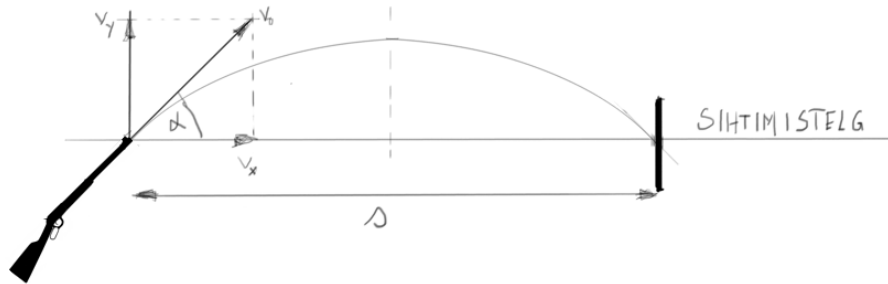
Võttes võrrandi (2) ruutu ning jagades läbi võrrandiga (1), taandub kiirus välja ning alles jääb

$$d^5 = \frac{16V^2}{\pi^2 t^2} \frac{2k}{g}, \quad \text{millest} \quad d = \left(\frac{32V^2 k}{\pi^2 t^2 g} \right)^{\frac{1}{5}} = 1 \text{ mm}.$$

L48 Lasketiir ★★

Autor: Aigar Vaigu, piirkonnavoore, 2016, G 6

Vastavalt ülesande tekstile ei arvesta me õhutakistust. Esmalt tuleb leida, missuguse nurga α all on relva vintraud suunatud ülespoole, et tabada märklaua keskmesse ehk "kümnesse" vintpüssi normaalse asendi korral. Kuuli trajektoori on sümmeetriline, seega kuuli kogu lennuaeg t on kaks korda suurem kui aeg t_{tipp} , mis kulub trajektoori kõrgeimasse punkti jõudmiseks (vt joonis).



Järgnevalt kirjeldame kuuli liikumist liikumisvõrranditega horisontaalse liikumise jaoks

$$s = v_x t$$

ja vertikaalse liikumise jaoks

$$v_y - g t_{\text{tipp}} = v_y - g \frac{t}{2} = 0,$$

kus g on raskuskiirendus $9,81 \text{ m/s}^2$, s märklaua kaugus 30 m ning v_x ja v_y vastavalt horisontaal- ja vertikaalsuunaline algkiirus.

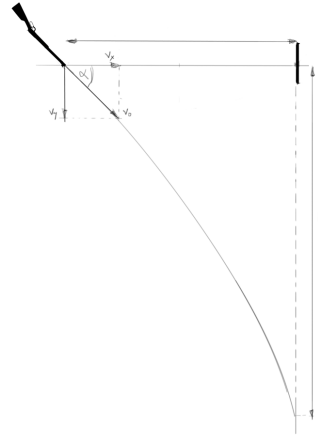
Neid kahte võrrandit kombineerides saame leida nurga α :

$$\begin{aligned} s = v_x t &\Rightarrow t = \frac{s}{v_x}, \\ v_y - g \frac{t}{2} &= 0, \\ v_y - g \frac{s}{2v_x} &= 0, \\ 2v_x v_y &= gs. \end{aligned}$$

Avaldame viimases reas v_x ja v_y algkiiruse v_0 ja trigonomeetriliste funktsioonide kaudu ning kasutame kahekordse nurga siinuse valemit $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$. Saame, et

$$\begin{aligned} 2v_x v_y &= gs, \\ 2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha &= gs, \\ v_0^2 \sin 2\alpha &= gs, \\ \sin 2\alpha &= \frac{gs}{v_0^2}. \end{aligned}$$

Kui nüüd keerata relva ümber sihtimistelje 180 kraadi, siis kui enne oli relvatoru nurga α võrra suunatud üles, on relvatoru nüüd sama nurga jagu suunatud alla (vt joonis), seega jäävad kuuli horisontaal- ja vertikaalsuunalised kiirused oma arvvaärtuselt samaks. Kuuli märklaua tabamise koha leiame kuuli vertikaalsuunalisest liikumisvõrrandist, arvestades et kuuli lastakse allapoole:



$$h = v_y t + \frac{gt^2}{2}.$$

Asendame liikumisvõrrandisse kuuli lennuaja t ja vertikaalsuunalise kiiruse v_y horisontaalsuunalise kiiruse v_x kaudu vastavalt $t = s/v_x$ ja $v_y = gs/2v_x$. Saame:

$$\begin{aligned} h &= v_y \frac{s}{v_x} + \frac{gs^2}{2v_x^2}, \\ h &= \frac{gs}{2v_x} \frac{s}{v_x} + \frac{g}{2} \left(\frac{s}{v_x} \right)^2, \\ h &= \frac{gs^2}{v_x^2}, \\ h &= \frac{gs^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha}. \end{aligned}$$

Kuna nurk α on meil teada, saame arvutada koha, kus kuul märklauda tabab. Võib aga kasutada trigonomeetria seoseid. Saame:

$$\begin{aligned} h &= \frac{gs^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} \\ &= \frac{gs^2}{v_0^2} \frac{2}{1 + \cos 2\alpha} \\ &= \frac{gs^2}{v_0^2} \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \sin^2 2\alpha}} \\ &= \frac{gs^2}{v_0^2} \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{gs}{v_0^2} \right)^2}} \\ &= \frac{2gs^2}{v_0^2 + \sqrt{v_0^4 - (gs)^2}}. \end{aligned}$$

Rehkendus annab tulemuseks:

$$h = \frac{2 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot (30 \text{ m})^2}{(320 \text{ m/s})^2 + \sqrt{(320 \text{ m/s})^4 - (9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 30 \text{ m})^2}} \approx 8,6 \text{ cm}.$$

L49 Silinder ★★

Autor: Kaur Aare Saar, lõppvoor, 2016, G 4

Silindri impulsimoment ei muutu telje suhtes, mis läbib silindri ja pinna kontaktpunkte, sest hõõrdejõul puudub moment selle telje suhtes. Olgu esialgne nurkkiirus ω . Esialgne impulsimoment on seega

$$h_1 = -mvR + I\omega = -mvR + mR^2\omega,$$

kus seest tühja silindri jaoks $I = mR^2$. Pärast libisemist on nurkkiirus $\frac{v}{R}$. Seega impulsimoment on

$$h_2 = mvR + I\frac{v}{R} = 2mvR.$$

Impulsimomendi jäävusest $h_1 = h_2$ saame, et $\omega = \frac{3v}{R}$.

Märkus. Võis lahendada ka seest täis silindri jaoks. Siis $I = \frac{mR^2}{2}$ ja saame $\omega = \frac{5v}{R}$.

L50 Veok ringteel ★★

Autor: Jonatan Kalmus, piirkonnavor, 2018, G 5

Kui veok libisema ei hakka, piirab tema maksimaalset kiirust tsentrifugaaljõud, mis võib veoki külili lükata. Veoki masskeskmele mõjub horisontaalselt raskusjõud $F_R = mg$ ning vertikaalselt tsentrifugaaljõud $F_T = m\frac{v^2}{R}$. Vaatleme veoki projektsiooni vertikaalsele lausega paralleelsele tasandile. Saame kirja panna kangireegli veoki väliskurvis oleva alumise nurga jaoks (väliskurvis oleva ratta välimise punkti ja maa kontakt), mille ümber tsentrifugaaljõu jõumoment veokit keerama hakkab. Ümber selle punkti keerab veokit ühtpidi raskusjõu jõumoment $\tau_R = F_R\frac{l}{2}$ ning teistpidi tsentrifugaaljõu jõumoment $\tau_T = F_T h$. Piirjuhul on need jõumendid võrdsed ning saame võrrandi

$$mg\frac{l}{2} = \frac{mv^2}{R}h,$$

kust saame avaldada maksimaalse kiiruse:

$$v = \sqrt{\frac{Rgl}{2h}}.$$

L51 Sfäär ★★★

Autor: Andre Säask, lahtine, 2005, G 6

Kuna küsitakse ainult minimaalset vajalikku kiirust (arvväärtust), siis ei pea me leidma ei viske nurka ega viske kohta. Vertikaalsuunalise kiiruse komponendi viske hetkel leiame energia jäävuse seadusest:

$$\frac{mv_{y0}^2}{2} = mg\Delta h = mg(2R - h) \Rightarrow v_{y0} = \sqrt{2g(2R - h)}.$$

Horisontaalsuunalise kiiruse komponendi leiame tingimusest, et sfääri ülemises punktis peab olema pallile mõjuv kesktõmbe kiirendus v^2/R võrdne pallile mõjuva raskuskiirendusega. Kuna sfääri ülemises punktis on $v_y = 0$, siis $v = v_x$. Kuna õhu

takistust me ei arvesta, siis $v_x = v_{x0}$ (kiiruse horisontaalsuunaline komponent ei muutu lennu ajal). Seega

$$\frac{v_{x0}^2}{R} = g \Rightarrow v_{x0} = \sqrt{gR}.$$

Teades kahte kiiruse komponenti, on lihtne leida kogu kiiruse viske hetkel:

$$v = \sqrt{v_{x0}^2 + v_{y0}^2} = \sqrt{gR + 2g(2R - h)} = \sqrt{g(5R - 2h)} \approx 29 \text{ m/s}.$$

Alternatiivne lahendus

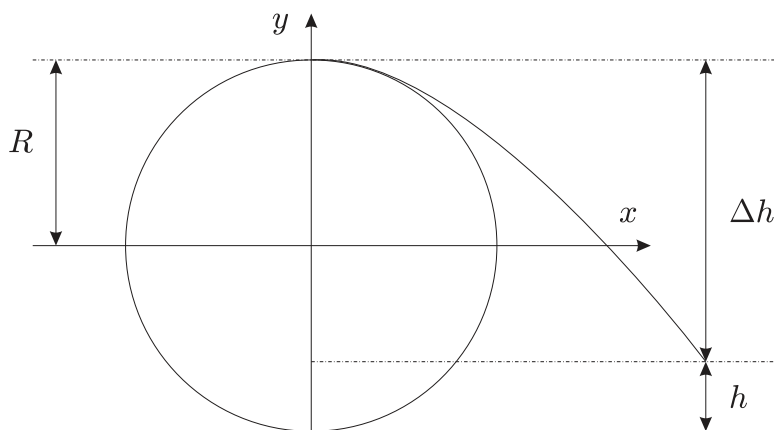
Lähene me ülesandele matemaatiliselt. Meil on ringjoon, parabool ning nende puutepunkt. Lahendades nende võrrandid puutepunkti leidmiseks peame saama ainult ühe lahendi, sest visatud pall ei tohi läbida kuplit. Koordinaatide alguspunkti paneme kera keskpunkti, y -telg on suunatud vertikaalselt üles, x -telg — horisontaalselt viske suunas.

Ringjoone võrrand

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Parabooli võrrand

$$y = ax^2 + bx + c.$$



Sümmeetriast y -telje suhtes on $b = 0$, palli ja kupli kokkupuutepunkti teades on $x = 0$ puhul $y = R$ (vt joonist). Seega $c = R$ ja parabooli võrrand omandab kuju:

$$y = ax^2 + R.$$

Nüüd tuleb ühest võrrandist tundmatu asendada teise. Olgu selleks parabooli võrrandi y , mille asendame ringjoone võrrandisse:

$$x^2 + (ax^2 + R)^2 = R^2,$$

$$x^2 + a^2x^4 + 2aRx^2 + R^2 = R^2,$$

$$x^4 + \left(\frac{2aR+1}{a^2}\right)x^2 = 0.$$

Lahendades selle võrrandi, saame kolm lahendit:

$$x = 0, \quad x = \pm\sqrt{-\frac{2aR+1}{a^2}}.$$

Meile sobib ainult esimene lahend, sest teised kaks on imaginaarsed. Seega

$$2aR+1=0 \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{1}{2R}.$$

Nüüd on paras aeg analüüsida kiiruse komponente. Vaatleme kõigepealt kiiruse vertikaalset komponenti. Energia jäävuse seadusest teame, et palli kineetiline energia viske alguses muundub palli potentsiaalseks energiaks trajektoori tippunktis:

$$\frac{mv_{0y}^2}{2} = mg\Delta h = mg(2R-h) \quad \Rightarrow \quad v_{0y} = \sqrt{2g(2R-h)}.$$

Teisest küljest, kiiruse võrrandist teame, et

$$v_{0y} = g\Delta t \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{\sqrt{2g(2R-h)}}{g}.$$

Seega lennuaeg on paika pandud viskekohta arvestamata. Analüüsime parabooli võrrandit viskekohas

$$-R+h = ax^2 + R \Rightarrow x^2 = \frac{h-2R}{a}.$$

Lennuaeg on juba määratud, seega mida väiksem on x , seda väiksema kiirusega võib pall läbida vahemaad viskekohast nullpunkti vaadelduna x -teljel. Seega peab a olema võimalikult suur. Asendades suurima a saab

$$x = \sqrt{\frac{h-2R}{-1/2R}} = \sqrt{2R(2R-h)}.$$

Kiiruse x -teljeline komponent teepikkuse ja aja suhtena on

$$v_{0x} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{g\sqrt{2R(2R-h)}}{\sqrt{2g(2R-h)}} = \sqrt{\frac{g^2R}{g}} = \sqrt{gR}.$$

Liites komponendid saame minimaalse viske kiiruse:

$$v = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} = \sqrt{gR + 2g(2R-h)} = \sqrt{g(5R-2h)} \approx 29 \text{ m/s}.$$

Antud lahendus on hea näide sellest, kui pikk ja keeruline võib olla ülesande matemaatiline lahendus võrreldes füüsikaliselega.

L52 Anum ★★★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2005, G 7

Vaatame algul liikuva anumaga seotud taustsüsteemi. Kui põrnikas (massiga ρV) roomab mööda anuma põhja, siis selle peale liigub ka põrnikat ümbritsev vedelik. Põrnika liikumist võib mugavuse mõttes ette kujutada virtuaalse põrnika liikumisega, mille tihedus on $\rho - \rho_0$. Sellisel juhul liigub virtuaalne põrnikas vedelikku tõrjumata ning ülesanne taandub mugavamale dünaamika ülesandele.

Liigume nüüd põrandaga seotud taustsüsteemi. Vastavalt impulsi jäävuse seadusele on põrnika ja anuma koguiimpulss kogu aeg konstantne (sest põrnika+anuma süsteemile ei mõju väliseid jõude). Kuna see oli alguses 0, on põrnika ja anuma impulsid vastassuunalised ning absoluutväärtuse poolest võrdsed. Olgu anuma kiirus põranda suhtes v . Siis põrnika kiirus põranda suhtes on $u - v$. Impulsi jäävuse seadusest tulenevalt

$$\rho_0(V_0 + V)v = (\rho - \rho_0)V(u - v),$$

ehk

$$v = \frac{V(\rho_0 - \rho)}{\rho V + \rho_0 V_0} u.$$

L53 Mullitaja ★★★

Autor: Jaak Kikas, lõppvoor, 2005, G 7

Arvestades mullide arvu jäävust on ruumiline vahemaa nende vahel võrdeline mullikeste kiirusega. Viimase leiame võrdsustades takistus- ja üleslükkejõu ning arvestades mullikese ruumala muutust rõhu muutumisel sügavuse vähenemisel. Mullikesele mõjuvad vee takistusjõud F ja üleslükkejõud F_A . Nende võrdusest

$$6\pi\eta Rv = g(\rho - \rho_{hk})V,$$

kus V on mullikese ruumala. Kuna ülesande tingimuste kohaselt $\rho \ll \rho_{hk}$ ja tähistades indeksitega "H" ja "0" vastavalt situatsioone veekogu põhjas ja pinna lähedal, saame

$$6\pi\eta R_H v_H = g\rho V_H, \quad (1)$$

$$6\pi\eta R_0 v_0 = g\rho V_0. \quad (2)$$

Võrrandeid 1 ja 2 omavahel jagades ning kasutades seost $V_i = (4/3)\pi R_i^3$, saame mullikeste vahekauguse suhte

$$\frac{L_0}{L_H} = \frac{v_0}{v_H} = \frac{V_0 R_H}{V_H R_0} = \left(\frac{V_0}{V_H}\right)^{2/3}.$$

Kuna $V_0 p_0 = V_H p_H$ ja $p_H = p_0 + g\rho H$, siis

$$\frac{L_0}{L_H} = \left(1 + \frac{\rho g H}{p_0}\right)^{2/3} = 2,4,$$

st mullikeste vahemaa suureneb 2,4 korda.

L54 Plokk ★★★

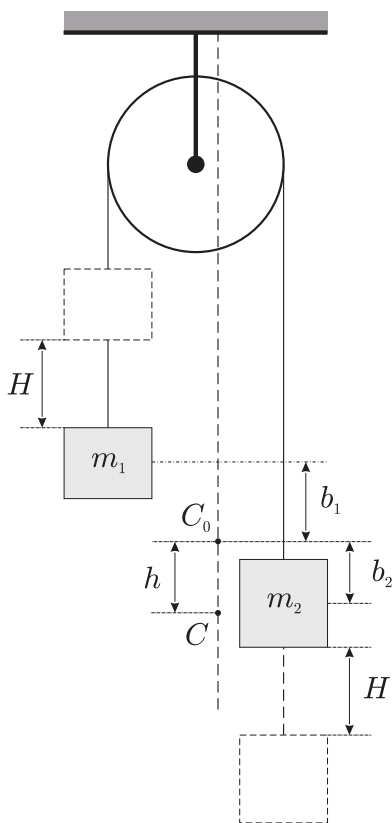
Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2006, G 5

Kuna raskem keha hakkab liikuma allapoole ja kergem ülespoole, siis on selge, et süsteemi massikese hakkab liikuma allapoole.

Olgu süsteemi massikese alghetkel punktis C_0 (vt joonist). Kehade massikeskmete kaugused süsteemi massikeskmest leiame tingimusest:

$$m_1 b_1 = m_2 b_2. \quad (1)$$

Aja t jooksul raskem keha liigub allapoole ja kergem liigub ülespoole kauguse H võrra:



$$H = at^2/2, \quad (2)$$

kus a on kehade kiirendus. Süsteemi masskese liigub sama aja jooksul kauguse h võrra, mille määrab tingimus:

$$m_2(H + b_2 - h) = m_1(H + b_1 + h).$$

Siit, arvestades valemeid (1) ja (2), leiame, et:

$$h = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} H = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} \frac{at^2}{2}. \quad (3)$$

Kiirenduse a leiame võrrandisüsteemist:

$$m_2 a = m_2 g - T, \quad m_1 a = T - m_1 g,$$

kus T on niidi tõmbepinge. Avaldades a võrrandisüsteemist, saame

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g.$$

Asendades leitud väärtuse valemisse (3), saame:

$$\begin{aligned} h &= \left(\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} \right)^2 \frac{gt^2}{2} = \frac{a_k t^2}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow a_k &= \left(\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} \right)^2 g. \end{aligned}$$

L55 Kada ★★★

Autor: Oleg Košik, lõppvoor, 2006, G 3

Olgu kivi kiirus lasu järel v . Kiiruse horisontaalsuunaline komponent on $v_x = v \cos \alpha$ ja vertikaalsuunaline komponent $v_y = v \sin \alpha$. Kivi lennuaeg on

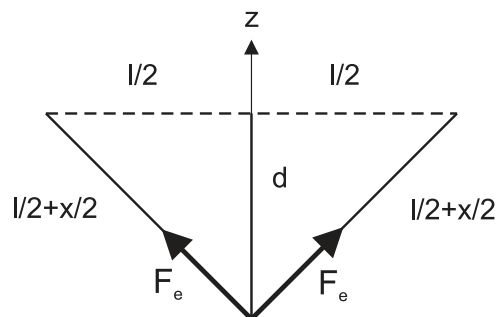
$$t = 2 \frac{v_y}{g} = 2 \frac{v \sin \alpha}{g}$$

ja lennukaugus

$$L = v_x t = \frac{2v^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Siit

$$v^2 = \frac{gL}{\sin 2\alpha}.$$



Kivi saavutab algkiiruse tänu kumminööri elastsele energiale. Kui nööri pikene-
mine võrreldes algolekuga on x , siis energia jäävuse seadusest saame

$$\frac{kx^2}{2} = \frac{mv^2}{2},$$

kust

$$x^2 = \frac{mv^2}{k} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{mgL}{k \sin 2\alpha}} = 53,6 \text{ cm.}$$

Uurides ragulka geomeetriat näeme, et moodustuva täisnurkse kolmnurga hüpo-
tenuus on $l/2 + x/2$. Otsitav kaugus, millele tuleb nööri tõmmata, on seega

$$d = \sqrt{(l/2 + x/2)^2 - (l/2)^2} = 48,2 \text{ cm.}$$

Kumminööris tekib elastsusjõud $F_e = kx$. Jõud, millega tuleb nööri tõmmata, võr-
dub selle jõu kahekordse projektsiooniga z -teljele:

$$F = 2kx \frac{d}{l/2 + x/2} \approx 46 \text{ N.}$$

L56 Hooratas ★★★

Autor: Valter Kiisk, lõppvoor, 2007, G 4

a) Hooratta kineetiline energia on $K = \frac{1}{2}M\omega^2 R^2$, seega energia salvestustihedus
 $w = E/M = \frac{1}{2}\omega^2 R^2$.

b) Olgu rõnga raadius r ja mass m . Mehaaniline pinge rõngas (σ) on määratud
tsentrifugaaljõuga, millega kahte rõnga poolt üksteisest eemale tõugatakse. Vaat-
leme ühe rõnga poole väikest lõiku pikkusega Δl . Selle mass on $\Delta m = (\Delta l/2\pi r)m$
ja sellele mõjub tsentrifugaaljõud suurusega $\Delta F = \Delta m\omega^2 r$, kus ω on pöörlemise
nurkkiirus. Selle jõu projektsioon vertikaalsihile on (vt joonist)

$$\Delta F_{\parallel} = \Delta F \cos \alpha = \frac{m\omega^2}{2\pi} \Delta l \cos \alpha.$$

Ent $\Delta l \cos \alpha$ on lõigu Δl projektsioon horisontaalsihile. Järelikult summaarne jõud,
mis mõjub ühele rõnga poolele, avaldub kui

$$F = \sum \Delta F_{\parallel} = \frac{m\omega^2}{2\pi} 2r = \frac{m\omega^2 r}{\pi}.$$

Teiselt poolt, $F = 2\sigma S$, kus S on rõnga ristlõige. Viimase asendame seosest

$$m = \rho V = \rho(2\pi r S) \Rightarrow S = \frac{m}{2\pi r \rho}.$$

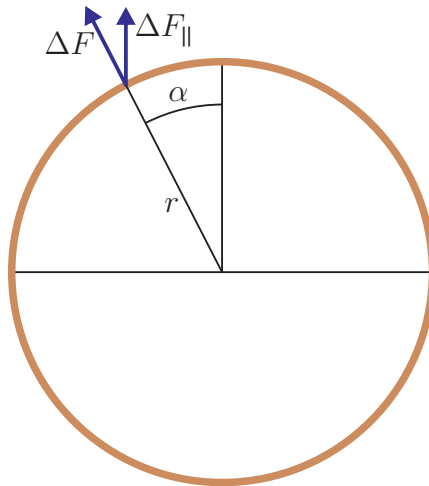
Kokkuvõttes saame

$$\sigma = \frac{F}{2S} = \omega^2 r^2 \rho.$$

Rõnga kineetiline energia

$$E = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\omega^2 r^2}{2} = \frac{m\sigma}{2\rho},$$

millest $E/m = \sigma/2\rho$. Võttes $\sigma = \sigma_{\max}$, saame $E/m = 800 \text{ kJ/kg}$.



L57 Maaler ★★★

Autor: Valter Kiisk, lahtine, 2010, G 5

Selgitame välja kummal juhul on maaga kokku puutudes inimese kiirus väiksem. Lihtsuse huvides vaatleme redelit ühtlase homogeenise vardana (pikkus L , mass M) ning inimest punktmassina m , mis on kinnitunud redeli ülemise otsa külge. Kui maaler laseks kohe redelist lahti, oleks tema kiirus maaga kokkupuute hetkel $\sqrt{2Lg}$. Kui aga maaler klammerdub redeli külge, tuleb lõppkiiruse v arvutamisel arvesse võtta ka redeli pöördliikumise tekitamiseks kuluvat energiat. Pikka ühtlast redelit võib esimeses lähenduses vaadelda kui homogeenset varrast, mis pöörleb ümber alumise otsa. Selleks hetkeks kui redel on jõudnud horisontaalasendisse, on tema nurkkiirus $\omega = v/L$. Niisiis redeli pöördliikumise energia sel hetkel avaldub $ML^2\omega^2/6 = Mv^2/6$. Nüüd energia jäävuse seadus annab

$$mgL + Mg\frac{L}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{Mv^2}{6},$$

millest

$$v = \sqrt{\frac{3Lg(2m + M)}{3m + M}} = \sqrt{gL} \sqrt{2 + \frac{M}{3m + M}}.$$

Saadud tulemus ei ole ühelgi tingimusel väiksem kui $\sqrt{2Lg}$, nii et selles mõttes on kasulikum kohe redelist lahti lasta.

L58 Benji-hüpe ★★★

Autor: Andreas Valdmann, piirkonnavor, 2010, G 6

Hüppe madalaimas punktis on hüppaja kiirus ja seetõttu ka kineetiline energia võrdne nulliga. Gravitatsioonivälja potentsiaalse energia muutus torni tipust selle punktini on võrdne köies tekkinud elastsusjõu energiaga:

$$mg(l + \Delta l_1) = \frac{k\Delta l_1^2}{2},$$

kus Δl_1 on köie pikene mine. Lahendades ruutvõrrandi Δl_1 suhtes ja ignoreerides negatiivset lahendit, saame

$$\Delta l_1 = \frac{mg + \sqrt{m^2g^2 + 2mgkl}}{k}.$$

Platvormi kõrgus on $h_1 = l + \Delta l_1 + h$. Arvuliselt, $h_1 \approx 86$ m. Suurima kiiruse leidmisel lisandub energia võrrandisse kineetiline energia:

$$mg(l + \Delta l_2) = \frac{k\Delta l_2^2}{2} + \frac{mv^2}{2}.$$

Kiirendus muudab märki, kui elastsusjõud saab võrdseks gravitatsioonijõuga. Seetõttu on suurima kiiruse tingimuseks

$$mg = k\Delta l_2 \quad \Rightarrow \quad \Delta l_2 = \frac{mg}{k}.$$

Asetades antud tingimuse energia võrrandisse ja lahendades selle v suhtes, saame

$$v = \sqrt{\frac{g(gm + 2kl)}{k}} \approx 29 \text{ m/s}.$$

L59 Kloori molekul ★★★

Autor: Ants Remm, lahtine, 2012, G 6

Siin ülesandes saab lähtuda energia jäävusest: kloori molekuli seoseenergia E_s on võrdne vahega, kus footoni energiast $\frac{hc}{\lambda}$ ja esialgselt mehaanilisest energiast $E_0 = 2m_{\text{Cl}}\frac{v^2}{2}$ on maha lahutatud kloori aatomite mehaaniline energia pärast jagunemist

$$E_1 = m_{\text{Cl}}\frac{v_1^2}{2} + m_{\text{Cl}}\frac{v_2^2}{2}.$$

Olgu x -telg paralleelne molekuli esialgse liikumisega. Teame, et üks aatomitest liikus pärast jagunemist risti x -teljega. See tähendab, et $v_{1x} = 0$ ning $v_{1y} = u$. Impulsi jäävuse seadusest saame ka teise aatomi kiiruse komponendid $v_{2x} = 2v$ ja $v_{2y} = -u$. Nüüd saab panna kirja energia jäävuse:

$$\frac{hc}{\lambda} + m_{\text{Cl}}v^2 = E_s + m_{\text{Cl}}\frac{u^2}{2} + m_{\text{Cl}}\frac{4v^2 + u^2}{2} = E_s + 2m_{\text{Cl}}v^2 + m_{\text{Cl}}u^2.$$

Sealt saab avaldada E_s , arvestades, et $m_{\text{Cl}} = \frac{\mu_{\text{Cl}}}{N_A}$, kus $\mu_{\text{Cl}} = 35 \cdot 10^{-3}$ kg/mol.

$$E_s = \frac{hc}{\lambda} - m_{\text{Cl}}v^2 - m_{\text{Cl}}u^2 = \frac{hc}{\lambda} - \frac{\mu_{\text{Cl}}}{N_A}(v^2 + u^2) = 4,0 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 2,5 \text{ eV}.$$

L60 Kiik ★★★

Autor: Andres Põldaru, lahtine, 2014, G 5

Massi m_2 kiirus kokkupõrkehetkel on $v_0 = \sqrt{2gh}$. Kokkupõrke ajal avaldab pealekukkuv mass jõudu kiigele ning kiik omakorda esimesele massile. Nende jõudude jaoks kehtib kangireegel: $F_1 l_1 = F_2 l_2$. Lisaks kehtib Newtoni teine seadus $F_1 = m_1 a_1$ ja $F_2 = m_2 a_2$. Kokku saame $m_1 a_1 l_1 = m_2 a_2 l_2$. Kuna kiirendus on kiiruse muutus, siis $m_1 l_1 \Delta v_1 = m_2 l_2 \Delta v_2$. Mitteelastne kokkupõrge kestab seni, kuni massid pöörlevad ümber kiige telje sama nurkkiirusega (kui pealekukkuv mass liiguks suurema nurkkiirusega, painutaks ta kiike ja kiirendaks esimest massi kuni nurkkiirused on ühtlustunud) ehk $\frac{v_1}{l_1} = \frac{v_2}{l_2}$, millest saame $\frac{\Delta v_1}{l_1} = \frac{v_0 - \Delta v_2}{l_2}$. Asendades Δv_2 eelnevalt saadud võrrandist ja arvestades, et esimene mass oli alguses paigal ehk kiiruse muut võrdub lõppkiirusega, saame

$$v_1 = \frac{l_1 l_2 m_2 v_0}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2} = \frac{l_1 l_2 m_2 \sqrt{2gh}}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}.$$

Teine lahenduskäik kasutab impulsi jäävust pöörlemistelje suhtes. Kuna kiige ja masside süsteem saab vabalt ümber telje pöörelda ja väliseid jõumomente selle punkti suhtes pole, on impulsimoment jääv. Kui valiksime mingi muu punkti, peaksime arvestama maapinna ja kiige vahelisi jõude. Nurkkiiruste võrdsuse tingimus jääb samaks, mis eelmise lahenduse puhul. Saame võrrandisüsteemi, mille lahend on ülalt juba tuttav.

$$m_2 v_0 l_2 = m_1 v_1 l_1 + m_2 v_2 l_2,$$

$$\frac{v_1}{l_1} = \frac{v_2}{l_2}.$$

L61 Vesiniku ioniseerimine ★★★

Autor: Jaan Toots, lahtine, 2015, G 6

Käsitleme prootoni ja elektroni interaktsiooni elastse kokkupõrkena. Olgu prootoni algkiirus \vec{u} , lõppkiirus \vec{v} ning elektroni kiirus vahetult pärast põrget \vec{w} . Esialgu võime eirata elektroni kuulumist vesiniku aatomisse. Energia jäävusest

$$\frac{1}{2} m_p u^2 = \frac{1}{2} m_p v^2 + \frac{1}{2} m_e w^2$$

ning impulsi jäävusest

$$m_p \vec{u} = m_p \vec{v} + m_e \vec{w}.$$

Viimase võrrandi mõlema poole skalaarkorrutisest iseendaga saame

$$m_p^2 u^2 = m_p^2 v^2 + m_e^2 w^2 + 2m_p m_e \vec{v} \cdot \vec{w}.$$

Asendame u energia jäävusest.

$$m_p(m_p v^2 + m_e w^2) = m_p^2 v^2 + m_e^2 w^2 + 2m_p m_e \vec{v} \cdot \vec{w},$$

järelikult

$$(m_p - m_e)w^2 = 2m_p \vec{v} \cdot \vec{w} = 2m_p v w \cos \theta,$$

kus θ on vektorite \vec{v} ja \vec{w} vaheline nurk. Elektroni eemaldamine vesiniku aatomist on võimalik, kui elektroni koguenergia $E > 0$. Seega üritame maksimeerida elektroni kineetilist energiat ning ühtlasi ka kiirust w kokkupõrke tagajärjel.

$$W = \max \left(\frac{2m_p v}{m_p - m_e} \cos \theta \right) = \frac{2m_p v}{m_p - m_e}.$$

Energia võrrandist saame

$$K_0 = \frac{1}{2} m_p u^2 = \frac{1}{2} m_p \left(\frac{(m_p - m_e)W}{2m_p} \right)^2 + \frac{1}{2} m_e W^2 = \frac{(m_p + m_e)^2}{8m_p} W^2.$$

Ioniseerimiseks $K_e = \frac{1}{2} m_e W^2 > E_0$ ehk

$$K_0 > \frac{E_0(m_p + m_e)^2}{4m_p m_e} = 6,25 \text{ keV}.$$

L62 Veetoru ★★★

Autor: Kristian Kuppert, piirkonnavor, 2015, G 5

Kui toru otsast voolab välja vesi kiirusega v , siis ajaühikus torust väljunud vee hulk on $\frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho S v$. Paneme kirja Newtoni II seaduse torust väljunud veehulga jaoks:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\Delta(mv)}{\Delta t} = v \frac{\Delta m}{\Delta t}.$$

Kuna vesi saab ajaühikus sellise impulsi, peab järelikult Newtoni III seaduse tõttu mõjuma torule sama suur ja vastassuunaline jõud. Paneme kirja jõumomentide tasakaalu võrrandi toru kinnituskoha suhtes:

$$\frac{MgL \sin \alpha}{2} = FL.$$

Asendades sisse $\frac{\Delta m}{\Delta t}$ ning avaldades α , saame

$$\alpha = \arcsin \left(\frac{2\rho v^2 S}{Mg} \right).$$

L63 Põrge ★★★

Autor: Mihkel Kree, piirkonnavaor, 2015, G 6

Elastse põrke korral säilib kineetiline energia. Teisalt ei saa me aga rääkida impulsi jäävusest, sest põrke ajal mõjuvad ka kinnituspunkti suured jõud. Küll aga säilib süsteemi summaarne impulsimoment kinnituspunkti suhtes, sest põrke ajal kinnituspunkti mõjuvate jõudude õlad on siis nullid ning põrge toimub nii kiiresti, et raskusjõuga pole vaja arvestada.

Paneme esmalt kirja energia jäävuse seaduse. Algselt on kuulil kineetiline energia $E_k = m_1 v^2/2$. Pärast põrget on vardal kineetiline energia $E_v = I\omega^2/2$, kus ω on lati pöörlemise nurkkiirus. Niisiis,

$$\frac{m_1 v^2}{2} = \frac{I\omega^2}{2}.$$

Asume nüüd impulsimomendi seadust avaldama. Enne põrget on liikuva kuuli impulsimoment kinnituspunkti suhtes $L_k = m_1 v h$ ning vahetult pärast põrget on pöörleva varda impulsimoment $L_v = I\omega$. Niisiis,

$$m_1 v h = I\omega.$$

Nüüd on jäänud veel lahendada neist kahest võrrandist koosnev süsteem ning avaldada otsitav kõrgus h . Võib lahendada asendusvõttega, aga võime ka näiteks võtta teise võrrandi mõlemad pooled ruutu ning jagada läbi esimese võrrandiga, saades

$$m_1 h^2 = I, \quad \text{millest} \quad h = \sqrt{\frac{I}{m_1}} = \sqrt{\frac{M}{3m_1}} L.$$

L64 Rattur ★★★

Autor: Ardi Loot, lahtine, 2016, G 6

Ratturile mõjuvad laskumisel kolm jõudu: mäest allaviiv raskusjõud ($F_a = mg \sin(\theta)$) ning takistavad hõõrdejõud ($F_h \cos(\theta)$, väikese nurga tõttu võib $\cos(\theta)$ ära jätta) ja tuuletakistus ($F_t = cv^2$, kus c on kordaja). Rattur on saavutanud lõppkiiruse, kui need jõud on tasakaalustunud. Kuna lõppkiirus on teada kahe eri langemisnurga korral, on võimalik kirja panna võrrandisüsteem hõõrdejõu F_h ja tuuletakistus-kordaja c leidmiseks ($v_2 = v_1 - \Delta v$)

$$\begin{cases} mg \sin(\theta_1) &= F_h \cos(\theta_1) + cv_1^2 \\ mg \sin(\theta_2) &= F_h \cos(\theta_2) + cv_2^2. \end{cases}$$

Lahendades süsteemi saab avaldada:

$$F_h = mg \cdot \frac{v_1^2 \sin(\theta_2) - v_2^2 \sin(\theta_1)}{v_1^2 \cos(\theta_2) - v_2^2 \cos(\theta_1)} \approx 1,7 \text{ N},$$

$$c = mg \cdot \frac{\sin(\theta_1) \cos(\theta_2) - \sin(\theta_2) \cos(\theta_1)}{v_1^2 \cos(\theta_2) - v_2^2 \cos(\theta_1)} \approx 0,42 \text{ kg/m}.$$

Kasutades saadud tulemusi on lihtne arvutada ratturile mõjuvad takistusjõud ja sellele ületamiseks kuluv võimsus horisontaalsel teel kiirusega v :

$$F = F_h + cv^2 \approx 14,5 \text{ N},$$

$$P = Fv = mgv \cdot \frac{\sin(\theta_1)(v^2 \cos(\theta_2) - v_2^2) - \sin(\theta_2)(v^2 \cos(\theta_1) - v_1^2)}{v_1^2 \cos(\theta_2) - v_2^2 \cos(\theta_1)},$$

$$P \approx 80,8 \text{ W}.$$

Tuuletakistuse ületamiseks kulub $cv^2/F = 88,5\%$ koguvõimsusest.

L65 Kaks kuuli ja vedru ★★★

Autor: Rasmus Kisel, piirkonnavor, 2017, G 7

Olgu tundmatu mass m , vedru algne pikkus l ning vedru pikkus pöörlemise ajal d . Ülesandes oli antud, et massi m kaugus pöörlemiskeskmele on pöörlemise ajal l . Massi M kaugus pöörlemiskeskmele on seega $d - l$. Kuna vedru pikenes $d - l$ jagu, siis tekib vedrus pinget $F = k(d - l)$. Selle pinget peab vedru mõlemas otsas tasakaalustama vastava kuuli tsentrifugaaljõud. Vaatleme jõudude tasakaalu tuntud massil M :

$$M\omega^2(d - l) = k(d - l),$$

kus $M\omega^2(d - l)$ on massile M mõjuv tsentrifugaaljõud. Siit järeldame, et $\omega^2 = \frac{k}{M}$. Seega on pöörlemise periood:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}.$$

L66 Reisirong ★★★

Autor: Moorits Mihkel Muru, lõppvoor, 2017, G 5

Reisijale mõjub kolm omavahel ristiolevat kiirendust: raskuskiirendus, kesktõmbekiirendus ja joonkiirendus. Leiame kõigepealt, kui suur on rongi liikumissuunaline kiirendus. Olgu rongi algkiirus v_a ja lõppkiirus v_l . Sellisel juhul kehtib seos $v_a/v_l = \alpha \Rightarrow v_a = \alpha v_l$. Kuna kiirus muutub ühtlaselt (lineaarselt), siis avaldub keskmine kiirus koguteepikkuse ja aja jagatisena ning samuti alg- ja lõppkiiruse keskmisena.

$$\frac{v_a + v_l}{2} = \frac{(\alpha + 1)v_l}{2} = \frac{s}{t} \Rightarrow v_l = \frac{2s}{(\alpha + 1)t}.$$

Liikumissuunaline kiirendus on

$$a_t = \frac{v_a - v_l}{t} = \frac{(\alpha - 1)v_l}{t} = \frac{2(\alpha - 1)s}{(\alpha + 1)t^2}.$$

Järgmiseks uurime kesktõmbekiirendust. Selle jaoks on vaja leida trajektoori raadius, mis ringi korral on $r = s/\varphi$, sest liikumissuuna muutus on võrdne ringjoonel

läbitud nurgaga. Leiame kiiruse v_k trajektoori keskpunktis. Selleks kasutame üldist ühtlaselt kiireneval/aeglustuval liikumisel kehtivat valemit $d = (v_2^2 - v_1^2)/(2a)$, mis meie uuritava juhul tuleb

$$\frac{s}{2} = \frac{v_k^2 - v_a^2}{2a_t}.$$

Sellest avaldame

$$\begin{aligned} v_k &= \sqrt{v_a^2 + a_t s} = \sqrt{\left(\frac{2\alpha s}{(\alpha+1)t}\right)^2 + \frac{2(\alpha-1)s^2}{(\alpha+1)t^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{4\alpha^2 s^2 + 2(\alpha-1)(\alpha+1)s^2}{(\alpha+1)^2 t^2}} = \\ &= \frac{s}{(\alpha+1)t} \sqrt{6\alpha^2 - 2}. \end{aligned}$$

Seega kesktõmbekiirendus on

$$a_r = \frac{v_k^2}{r} = v_k^2 \frac{\varphi}{s} = \frac{2s\varphi}{(\alpha+1)^2 t^2} [3\alpha^2 - 1].$$

Viimane kiirendus on raskuskiirendus ja selle tähistame g -ga. Kuna kõik kiirendused on risti, siis resultantkiirenduse leidmiseks tuleb liita kiirenduste ruudud ja võtta sellest ruutjuur.

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{g^2 + a_t^2 + a_r^2} = \\ &= \sqrt{g^2 + \left(\frac{2(\alpha-1)s}{(\alpha+1)t^2}\right)^2 + \left(\frac{2s\varphi}{(\alpha+1)^2 t^2} [3\alpha^2 - 1]\right)^2}. \end{aligned}$$

Kaalu ja massi vahel kehtib seos

$$P = ma \Rightarrow m = \frac{P}{a}.$$

Kui sisestame antud väärtused valemisse, saame reisija kiirenduseks $a \approx 9,83 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ ja massiks $m \approx 85,4 \text{ kg}$.

L67 Kaheosaline pendel ★★★

Autor: Hans Daniel Kaimre, lõppvoor, 2018, G 4

Niidis kaob tõmbejõud, kui raskusjõu niidisuunaline komponent saab võrdseks tsentrifugaaljõuga. Märgistame nurga niidi ning horisontaaljoone vahel θ -ga. Tsentrifugaaljõud avaldub kui $F_t = mv^2/r = 2mv^2/l$ ning raskusjõu niidisuunaline komponent $F_{r,n} = mg \sin \theta$. Need peavad võrduma, seega:

$$\frac{2mv^2}{l} = mg \sin \theta \Rightarrow v^2 = \frac{gl \sin \theta}{2}.$$

Võttes potentsiaalse energia nivoo nullpunktiks asendi 2, saame et kuuli energia asendis 1 on $E_1 = mgl$. Asendis 3 on aga kuulikese energia $E_3 = mv^2/2 + mg(1 + \sin \theta)l/2$. Kuna kehtib energia jäävuse seadus, peab kehtima $E_1 = E_3$:

$$mgl = \frac{mv^2}{2} + mg(1 + \sin \theta)\frac{l}{2} \Rightarrow v^2 = gl(1 - \sin \theta).$$

Pannes kaks avaldist v^2 jaoks omavahel võrduma, saame:

$$\frac{gl \sin \theta}{2} = gl(1 - \sin \theta) \Rightarrow \frac{3}{2} \sin \theta = \frac{3}{2} \cos \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \arccos \frac{2}{3}.$$

L68 Veerev pall ★★★

Autor: Hans Daniel Kaimre, piirkonnavor, 2016, G 8

Olgu x -suunaline kiirus pallil v_{x1} ning klotsil vastassuunas v_{x2} . Kuna hõõrdejõud pinnaga puudub, siis süsteemile horisontaalseid jõude ei mõju ja kehtib horisontaalse impulsi jäävuse seadus $mv_{x1} = Mv_{x2}$, kust $\frac{v_{x1}}{v_{x2}} = \frac{M}{m}$. Kuna see peab kehtima igal ajahetkel, siis järelikult kehtib ka $\frac{s_{x1}}{s_{x2}} = \frac{M}{m}$, kus s_{x1} ja s_{x2} on vastavalt palli ja aluse horisontaalsuunas läbitud vahemaad. Kui pall on jõudnud teise otsa, siis palli nihe klotsi suhtes on $2(R - r)$ (vahemaa palli keskmest punktis A palli keskmene punktis B), seega

$$s_{x1} + s_{x2} = 2(R - r).$$

Avaldades $s_{x1} = s_{x2} \frac{M}{m}$ ja asendades eelmisesse võrrandisse, saame

$$s_{x2} = 2(R - r) \frac{m}{M + m}.$$

L69 Vai ★★★★★

Autor: Jaak Kikas, piirkonnavor, 2006, G 10

Olgu raskuse kiirus enne lööki vaia pihta v ja raskuse ning vaia kiirus vahetult pärast lööki v' . Löögi jooksul säilib impulss (aga mitte energia)

$$p = mv = (m + M)v'$$

Kiiruse v või impulsi p saame energia jäävuse seadusest, näiteks kujul

$$\frac{p^2}{2m} = mgH.$$

Niisiis on peale lööki süsteem vai+raskus omandanud kiiruse v' . Hõõrdejõudude toimel peatuvad need teatava teepikkuse x jooksul, kusjuures tingimuste kohaselt löökide arv $N \gg 1$ ning seega $x \ll L$. Hõõrdejõudude töö on seejuures võrdne energia muuduga.

Eelpooltoodu võib kirja panna kujul

$$(F_0 + kl)x = (M + m)gx + \frac{p^2}{2(m + M)},$$

kuid lõppvastuse leidmise seisukohast on meil lihtsam võrrutada summaarne hõõrdejõudude töö (mis on leitav nt graafiku $F(l)$ aluse pindalana),

$$A_h = F_0L + \frac{kL^2}{2}.$$

summaarse dissipeeruva energiaga

$$E = \frac{Np^2}{2(m + M)} + (M + m)gL.$$

Võrdusest $A_h = E$ saame (arvestades eelpooltoodud avaldise A_h , E ja $p^2/2m$ jaoks)

$$N = \left(F_0 + \frac{kL}{2} - Mg - mg \right) \frac{(m + M)L}{m^2gH}.$$

L70 Pidurdamine ★★★★★

Autor: Tanel Kiis, lahtine, 2012, G 7

Kaks naaberkuulikest lendavad üksteisest kaugusel ut . Hetkest, mil neist esimene põrkab suure kehaga, kulub teise kuulikese põrkeni aega $T = \frac{ut}{u+v}$. Liikudes suure massi süsteemi, näeme et enne kokkupõrget läheneb väike kuul kiirusega $v + u$. Pärast kokkupõrget lahkub väike kuul vastassuunas samasuguse kiirusega. Seega on kokkupõrke jooksul üle kantud impulss $\Delta p = 2m(v + u)$. Antud impulss peab tasakaalustama langevat keha kiirendava raskusjõu:

$$F = \frac{\Delta p}{T} = \frac{2m(v + u)}{T} = \frac{2m(v + u)^2}{ut} = Mg.$$

Lihtsustame antud avaldist ning leiame u :

$$u^2 + u \left(2v - \frac{Mgt}{2m} \right) + v^2 = 0,$$

$$u = \frac{Mgt}{4m} - v \pm \sqrt{\frac{Mgt}{4m} \left(2v - \frac{Mgt}{4m} \right)}.$$

Näeme, et u jaoks on kaks lahendit. Seega ongi u jaoks kaks võimalikku väärtust.

L71 Robin Hood ★★★★★

Autor: Madis Ollikainen, piirkonnavor, 2012, G 9

Kõigepealt leiame noole algkiiruse. Selle leiame noolele antud kineetilise energia kaudu.

$$E_K = \frac{mv^2}{2},$$

$$E_K = \eta A \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{\frac{2\eta A}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,17 \cdot 500}{0,054}} \approx 56,1 \text{ m/s}.$$

Paneme tähele, et noole kiiruse horisontaalne komponent on

$$v_{\text{horisontaal}} = v \cdot \cos \alpha.$$

ja vertikaalne komponent on

$$v_{\text{vertikaal}} = v \cdot \sin \alpha.$$

Kui nool lendab aja t , siis

$$v \cos \alpha \cdot t = L,$$

$$v \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} = -h.$$

(Kuna nool lastakse lendu märklaua keskpunktist h võrra kõrgemalt.)

Nüüd avaldame ülemisest võrrandist $\sin \alpha$:

$$\cos \alpha = \frac{L}{vt} \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{L}{vt} \right)^2} = \sqrt{\frac{v^2 t^2 - L^2}{v^2 t^2}}.$$

Asendame selle alumisse võrrandisse

$$vt \cdot \sqrt{\frac{v^2 t^2 - L^2}{v^2 t^2}} = \frac{gt^2}{2} - h \Rightarrow$$

$$v^2 t^2 - L^2 = h^2 - hgt^2 + \frac{g^2 t^4}{4} \Rightarrow$$

$$\frac{g^2}{4} \cdot t^4 - (hg + v^2) \cdot t^2 + (h^2 + L^2) = 0.$$

Lahendame ruutvõrrandi t^2 suhtes:

$$t_{1,2}^2 = \frac{(hg + v^2) \pm \sqrt{(hg + v^2)^2 - 4 \cdot \frac{g^2}{4} (h^2 + L^2)}}{2 \cdot \frac{g^2}{4}} \Rightarrow$$

$$t_1^2 = 117 \text{ s}^2 \Rightarrow t_1 = \pm \sqrt{116} = \pm 10,8 \text{ s},$$

$$t_2^2 = 14,3 \text{ s}^2 \Rightarrow t_2 = \pm \sqrt{14,3} = \pm 3,77 \text{ s}.$$

On selge, et negatiivne aeg ei oma antud juhul füüsikalist tähendust. Tuleb välja, et Robin võib noolt lasta kahe erineva nurga, α_1 ja α_2 all:

$$\alpha_1 = \arccos \frac{L}{vt_1} = \arccos \frac{200}{56 \cdot 10,8} \approx 71^\circ,$$

$$\alpha_2 = \arccos \frac{L}{vt_2} = \arccos \frac{200}{56 \cdot 3,78} \approx 19^\circ.$$

L72 Sportauto ★★★★★

Autor: Mihkel Rähn, lõppvoor, 2014, G 7

Minnes üle autoga seotud mitteinertsiaalsesse taustsüsteemi, tuleb lisada veojõule F_v vastassuunaline arväärtuselt võrdne inertsiaaljõud F_i , mis rakendub masskeskmele. Olgu toereaktsioonid esiteljel N_1 ja tagateljel N_2 . Jõudude võrrandid:

$$F_v = \mu N_1,$$

$$F_v = F_i,$$

$$N_1 + N_2 = mg,$$

$$ma = F_v.$$

Saame kirja panna ka jõumomentide võrrandi tagatelje jaoks

$$F_i h + N_1 b - mgs = 0.$$

Lahendades võrrandisüsteemi, saame

$$a = \frac{gs}{h + \frac{b}{\mu}}.$$

L73 Latt ★★★★★

Autor: Kaur Aare Saar, lahtine, 2015, G 8

Olgu lati mass m , raskuskiirendus g ning hõõretegur μ . Latile mõjub igas punktis hõõrdejõud, mis on vastupidine selle punkti liikumissuunale. Kogu mingile osale mõjuv hõõrdejõud on seega võrdeline selle osa pikkusega. Lati lükatavast otsast kaugemale osale mõjuv hõõrdejõud mõjub siis samas suunas rakendatavale jõule ning lati lähemas otsas mõjub hõõrdejõud sellele vastu. Hõõrdejõud üritavad takistada nii lati kulgliikumist kui ka selle pöörlemist. Kui latti pidevalt otsast lükatakse, peab tekkima olukord, kus lisaks lükkava jõu ning hõõrdejõudude tasakaalule kehtib ka nende jõudude momentide tasakaal. Need momendid peavad olema tasakaalus suvalise punkti suhtes. Otstarbekas on vaadelda jõumomente lati lükatava otsa suhtes, sest seal on lükkava jõu moment null. Olgu lati pöörlemistelje kaugus lükatavast otsast x . Saame

$$\mu mg \cdot \frac{x}{L} \cdot \frac{x}{2} = \mu mg \cdot \frac{L-x}{L} \cdot \left(x + \frac{L-x}{2} \right)$$

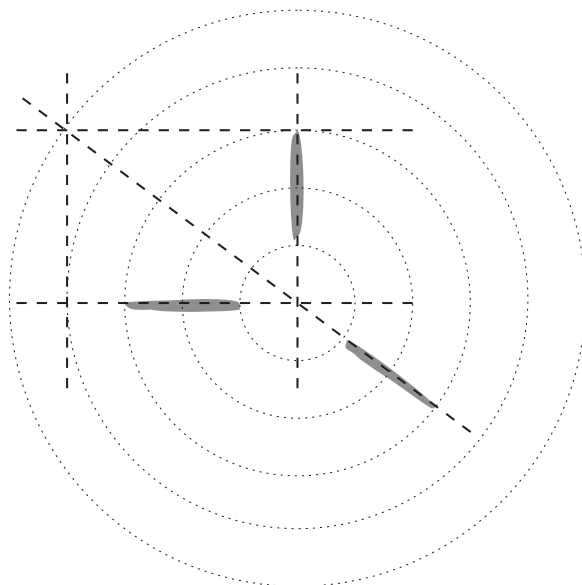
ning

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} L.$$

L74 Klaaskuul ★★★★★

Autor: Aigar Vaigu, piirkonnavor, 2008, G 6

Tükikeste trajektooride järgi saab võrrelda kiiruste suundasid ja suuruseid, sest $s = vt_s$, kus t_s on säriaeg (alternatiivselt võib kasutada kaugust kukkumispunktist $S = vt_S$, kus t_S on ajavahemik mahakukkumishetkest säriaja lõpuni). Seega on jälgede pikkuste suhe (või jälgede lõpp-punktide kauguste suhe kukkumispunktist) võrdne kiiruste suhtega. Fotolt saame, et $s_1 \approx s_2 \approx s_3$, st $v_1 \approx v_2 \approx v_3$. Kuna kiiruste suunad on teada, siis on teada ka impulsside $\vec{p}_1 = m_1\vec{v}_1$, $\vec{p}_2 = m_2\vec{v}_2$ ja $\vec{p}_3 = m_3\vec{v}_3$ suunad. Kuna $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 = 0$, siis moodustavad need vektorid kolmnurga. Et selle kolmnurga külgede suunad on teada, siis on teada selle kolmnurga nurkade suurused ning kolmnurk määratud sarnasusteguri täpsusega (et meid huvitavad külgede pikkuste suhted, siis sellest täpsusest piisab). Niisiis konstrueerime fotole kolmurga, mille küljed on vastavalt paralleelsed kolme kuulikillu jäljega. Jooniselt leiame, et $p_1 : p_2 : p_3$ suhtuvad kui 3 : 4 : 5. Kombineerides seda nüüd eelmise tulemusega $v_1 \approx v_2 \approx v_3$ saame, et $m_1 : m_2 : m_3$ suhtuvad kui 3 : 4 : 5.



L75 Plokid ★★★★★

Autor: Mihkel Kree, piirkonnavor, 2008, G 9

Rakendades Newtoni II seadust näeme, et kõik kolm keskmist koormist hakkavad liikuma võrdse kiirendusega a_0 :

$$Ma_0 = 2T - Mg,$$

kus T on niidi pinge. Rakendades Newtoni II seaduste äärmiste koormiste jaoks saame

$$\gamma Ma_1 = T - \gamma Mg,$$

kus a_1 on äärmiste koormiste kiirendus. Elimineerides niidi pinge T saame

$$2\gamma a_1 - a_0 = g - 2\gamma g.$$

Nööri venimatus avaldub kujul $a_1 = -3a_0$, millest tulenevalt

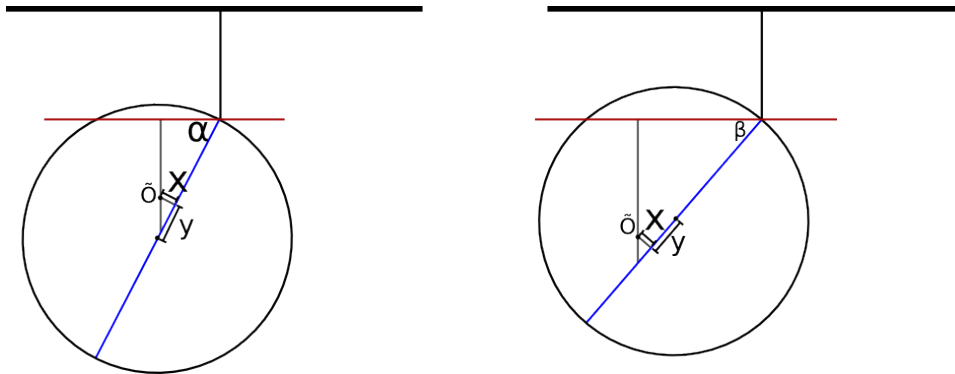
$$-2\gamma a_1 - \frac{a_1}{3} = (2\gamma - 1)g \Rightarrow a_1 = \frac{1 - 2\gamma}{2\gamma + 1/3}g.$$

Äärmised koormised hakkavad langema, kui a_1 on negatiivne. Selle jaoks peab kehtima

$$1 - 2\gamma < 0 \Rightarrow \gamma > \frac{1}{2}.$$

L76 Õõnes kera ★★★★★

Autor: Tanel Kiis, piirkonnavor, 2013, G 9



Kui tegemist poleks õõnsa keraga, oleks selle mass $M = \frac{4}{3}\pi r^3 = 33$ kg. Mudeldame õõnsusega kera kui tervet kera, mille sees on negatiivse massiga $m' = 3$ kg kera. Kera pöörab ennast nii, et tema massikeske jääks kinnituspunkti alla. Olge õõnsuse keskpunkti (\tilde{O}) asukoha koordinaadid kera keskpunkti suhtes x ja y . Nende leidmiseks kasutame jõumomentide tasakaalu nööri kinnituspunkti suhtes. Saame võrrandisüsteemi:

$$Mr \cos \alpha = m'(r - y + x \tan \alpha) \cos \alpha,$$

$$Mr \cos \beta = m'(r + y + x \tan \beta) \cos \beta.$$

Õõnsuse ja kera keskpunktide vaheline kaugus on $d = \sqrt{x^2 + y^2}$,

$$d = \frac{2r(\frac{M}{m'} - 1)}{\tan \alpha + \tan \beta} \sqrt{1 + \frac{1}{4}(\tan \alpha - \tan \beta)^2} = 0,8 \text{ cm}.$$

L77 Jalgpallurid ★★★★★

Autor: Andreas Valdmann, lõppvoor, 2013, G 9

Vaatame pallide algkiiruse komponentide kaupa. Olgu 1. palli algkiiruse vertikaalkomponent $v_{1\text{vert}}$ ning horisontaalkomponent pikki jalgpallureid ühendavat sirget $v_{1\text{piki}}$ ja risti selle sirgega $v_{1\text{risti}}$. Teise palli jaoks on vastavad komponendid $v_{2\text{vert}}$, $v_{2\text{piki}}$ ja $v_{2\text{risti}}$. Kokkupõrke hetkel peavad mõlemad pallid olema läbinud ristsuunas võrdse vahemaa. Kuna pallide ristsuunaline kiirus ei muutu, siis peab kehtima $v_{1\text{risti}} = v_{2\text{risti}}$.

Kokkupõrkeks peavad pallid olema jõudnud ka samale kõrgusele. See tingimus on ilmselt täidetud, kui pallide algseid vertikaalkiirused on võrdsed, mille korral on pallid igal ajahetkel samal kõrgusel. Oletame, et pallid võiksid teatud hetkel samale kõrgusele jõuda ka juhul, kui näiteks esimese palli algne vertikaalkiirus on väiksem. Pallide tõusuaeg on arvatav valemist $t = v_{\text{vert}}/g$. Seega pöördub esimene väiksema vertikaalsuunalise algkiirusega pall varem tagasi. Kui teine pall lõpuks laskuma hakkab, siis liigub esimene pall juba maa poole. Kuna mõlemad pallid kiirenevad võrdselt raskuskiirendusega, siis on laskumisel esimese palli kiirus alati suurem ja teine pall ei jõua selle pallide õhusoleku ajal järele. Seega pole kokkupõrge erinevate vertikaalkiiruste korral võimalik ja peab kehtima $v_{1\text{vert}} = v_{2\text{vert}}$. Kuna algkiirused olid moodulilt võrdsed ja $v^2 = v_{\text{vert}}^2 + v_{\text{piki}}^2 + v_{\text{risti}}^2$, siis peavad ka algkiiruste pikikomponendid olema absoluutväärtuselt võrdsed. Võimalikud kokkupõrkekohad on mõlemast jalgpallurist võrdsel kaugusel ja nende punktihulk moodustab maapinna tasandile projekteerituna sirge, mille otspunktide kaugus mõlemast jalgpallurist on määratud palli maksimaalse lennukaugusega. Selle leidmiseks avaldame näiteks lennuaja, mis on võrdne kahekordse ajaga, mis kulub raskusjõu mõjul vertikaalkiiruse kahanemiseks nullini

$$t = 2 \frac{v_{\text{vert}}}{g}.$$

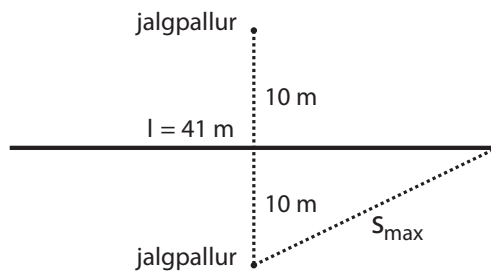
Selle ajaga liigutakse horisontaalsihis vahemaa

$$s = v_{\text{hor}} t = 2 \frac{v_{\text{hor}} v_{\text{vert}}}{g}.$$

Suurim lennukaugus saavutatakse, kui $v_{\text{vert}} = v_{\text{hor}} = v/\sqrt{2}$ ja seega $s_{\text{max}} = v^2/g$. Täisnurksest kolmnurgast leiame kokkupõrkepunktide piirkonna pikkuse

$$l = 2\sqrt{s_{\text{max}}^2 - (d/2)^2} = 2\sqrt{\frac{v^4}{g^2} - \frac{d^2}{4}},$$

mille arvvärtus on 41 m.



L78 Mutrivõti ★★★★★

Autor: Andres Põldaru, lahtine, 2015, G 9

Kui keermed on liikunud piki regulaatori telje teepikkuse x võrra, on need pöördu-
 nud nurga $\varphi = 2\pi n x$ võrra ning liikunud teljega risti teepikkuse $y = \varphi r = 2\pi n x r$
 võrra. Olgu α nurk pinnanormaali ja pöörlemistelje vahel. Saame

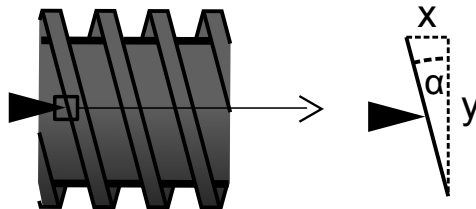
$$\tan(\alpha) = \frac{x}{y} = \frac{x}{2\pi n x r} = \frac{1}{2\pi r n}.$$

Mõjugu keermetele regulaatori telje suunaline jõud F . Keermete suunas mõjuv jõu
 komponent on $F \sin \alpha$, mille peab tasakaalustama hõõrdejõud suurima võimaliku
 väärtusega $\mu F \cos \alpha$. Saame

$$\mu \geq \tan \alpha = \frac{1}{2\pi r n}$$

ehk

$$n \geq \frac{1}{2\pi r \mu}.$$



L79 Plokid ★★★★★

Autor: Taavet Kalda, lahtine, 2017, G 8

Olgu ülemisele ja alumisele plokile toetuvate nööri pinged vastavalt T_1 ja T_2 ning raskuste m_1 , m_2 ja M kiirendused vastavalt a_1 , a_2 ja a (gravitatsiooniga samasuunalised). Kuna raskus M peab alguses paigal olema, st $a = 0$. Nööri venimatus annab kaks lisatingimust. Esiteks, ülemise nööri venimatusest peab alumise ploki kiirendus olema $-a_1$. Teiseks, alumise nööri venimatusest saab järeldada, et alumine plokk liigub kiirendusega $\frac{a_2+a}{2} = \frac{a_2}{2} = -a_1$, sest m_2 ja M liiguvad keskmiselt sama palju kui alumine plokk. Kuna nöörid on kaalutud, on nende pinge igas punktis sama. Paneme alumise ploki ja iga raskuse jaoks Newtoni 2. seaduse kirja:

$$0 = 2T_2 - T_1, \quad \text{- alumine plokk} \quad (1)$$

$$m_1 a_1 = m_1 g - T_1, \quad \text{- esimene raskus} \quad (2)$$

$$m_2 a_2 = m_2 g - T_2, \quad \text{- teine raskus} \quad (3)$$

$$0 = Mg - T_2, \quad \text{- uuritav raskus} \quad (4)$$

$$\frac{a_2}{2} = -a_1. \quad \text{- nööride venimatus} \quad (5)$$

Tekkinud võrrandisüsteemis on 5 võrrandit ja 5 tundmatut. Seega on M üheselt määratud.

(1) ja (4) annavad $T_2 = Mg$ ja $T_1 = 2Mg$. Asendame (5) ja saadud seosed võrranditesse (2) ja (3):

$$m_1 a_1 = m_1 g - 2Mg, \quad (6)$$

$$-2m_2 a_1 = m_2 g - Mg. \quad (7)$$

Liidame (6) ja (7) kokku kaaludega $\frac{2}{m_1}$ ja $\frac{1}{m_2}$:

$$0 = 2g - 4\frac{Mg}{m_1} + g - \frac{Mg}{m_2},$$

ehk

$$M = \frac{3}{\frac{4}{m_1} + \frac{1}{m_2}} = \frac{3m_1 m_2}{4m_2 + m_1}.$$

L80 Mänguauto ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2017, G 9

Vaatleme auto taustsüsteemis tasakaalutingimusi: tagumiste rataste ja maapinna suhtes välja kirjutatud jõumomentide tasakaalu tingimus:

$$\frac{MgL}{2} = N_e L \pm Mah,$$

millest

$$N_e = \frac{M}{2}g \pm Ma\frac{h}{L}.$$

Seega hõõrdejõud

$$F_h = (Mg - N_e)\mu = \left(\frac{M}{2}g \mp Ma\frac{h}{L}\right)\mu = Ma,$$

kusjuures pluss ja miinus vahelduvad üle poolperioodi. Siit saame avaldada

$$a = \frac{\mu g}{2(1 \pm \mu h/L)}.$$

Seega keskmine kiirendus

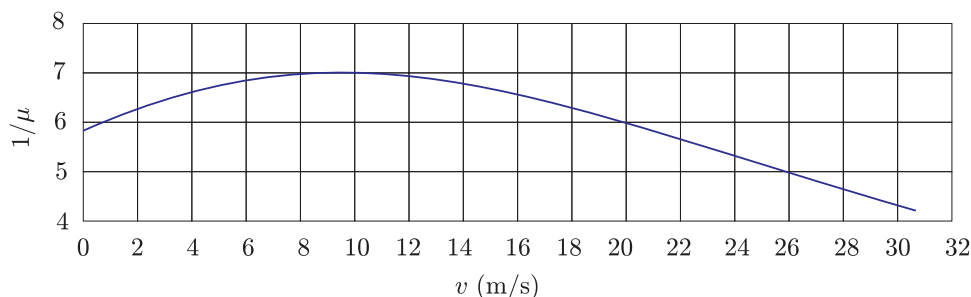
$$\langle a \rangle = \frac{g\mu^2 h}{2L(1 - \mu^2 h^2/L^2)}.$$

L81 Rong ★★★★★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2006, G 10

a) Vaatame väikest kiiruste vahemikku Δv , mille sees võib kiirust v ja järelikult ka hõõrdetegurit $\mu(v)$ lugeda konstantseks. Kiirendus on selle liikumisfaasi jooksul siis $a = \mu(v)g$ ning kiiruse vähenemiseks kuuluv aeg

$$\Delta t = \frac{\Delta v}{a} = \frac{\Delta v}{\mu(v)g}.$$



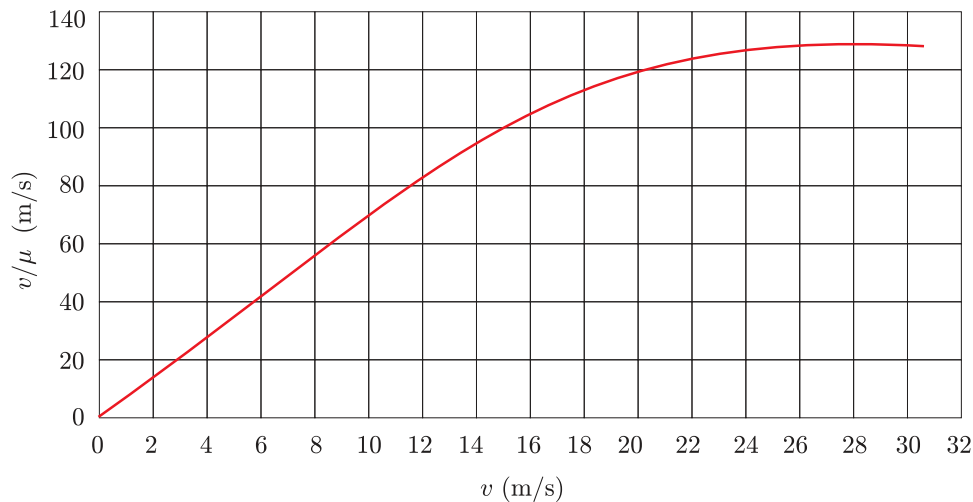
Summaarne aeg oleks summa üle kõigi selliste väikeste kiirusemuutuste. Konstrueerime esialgsest graafikust lähtudes suuruse $1/\mu(v)$ sõltuvuse kiirusest v (vt joonist). Siis pidurdamiseks kuuluv aeg on selle sõltuvuse graafikualune pindala (kiirusest 0 kuni 100 km/h), jagatud g -ga. Seejuures peame silmas, et kiirus x -teljel peab olema meetrites sekundis (m/s). Vastuseks saame ligikaudselt 18 s.

b) Vaatame samasugust kiiruste vahemikku Δv , nagu esimeses osas. Ajaga Δt mille jooksul kiirus selle võrra väheneb, läbib rong teepikkuse

$$\Delta s = v\Delta t = \frac{v\Delta v}{\mu(v)g}.$$

Summaarne pidurdusmaa oleks summa üle kõigi selliste väikeste teepikkuste. Konstrueerime esialgsest graafikust lähtudes suuruse $v/\mu(v)$ sõltuvuse kiirusest v (vt

joonist). Siis pidurdusmaa on selle sõltuvuse graafikualune pindala (kiirusest 0 kuni 100 km/h), jagatud g -ga. Kiirus x -teljel on samuti meetrites sekundis (m/s). Vastuseks saame ligikaudselt 235 m.



Märkus. Integraalne avaldis pidurdusaja jaoks on kujul

$$t = \int_0^{v_0} \frac{dv}{\mu(v)g} = \frac{1}{g} \int_0^{v_0} \frac{dv}{\mu(v)},$$

kus v_0 on rongi algiirus. Pidurdusmaa pikkuse jaoks vastav avaldis on aga

$$s = \int_0^{v_0} \frac{v dv}{\mu(v)g} = \frac{1}{g} \int_0^{v_0} \frac{v dv}{\mu(v)}.$$

L82 Värinaalarm ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2011, G 9

Kuivõrd väike keha liigub alla hetkeliselt, siis süsteemi mobiil+keha masskese püsisib paigal, mistõttu mobiil kerkib lauapinnast kõrgusele $h = x \frac{m}{M}$. Edasi hakkab mobiil raskusjõu toimele langema; lauapinnale jõudmiseks kuluv aeg $t = \sqrt{2h/g}$. Hõõrdejõud peatab mobiili ilma libisemata, kui $\mu > \tan \alpha$; et $\alpha \ll 1$, siis võime eeldada, et see nii ka juhtub. Kui $t = \sqrt{2h/g} < \tau$, siis jõuab mobiil liikuda langemise jooksul lauapinna sihis vahemaa $\delta = h \sin \alpha \approx h\alpha$, mis annab keskmiseks kiiruseks

$$u = \frac{xm\alpha}{2\tau M}.$$

Kui $\sqrt{2h/g} < \tau$, siis ei jõua mobiil lõpuni langeda, vaid väikese keha kerkimine surub mobiili ennatlikult vastu lauda tagasi. Mobiil jõuab langeda vahemaa $H = g\tau^2/2$ võrra, mis annab keskmiseks kiiruseks

$$u = \frac{H\alpha}{2\tau} = \frac{1}{4}g\tau\alpha.$$

Kokkuvõtlikult võib vastuse anda kujul

$$u = \min \left(\frac{xm\alpha}{2\tau M}, \frac{1}{4}g\tau\alpha \right).$$

L83 Killud ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2012, G 10

Kildude kogumimpulss on null, seega moodustavad impulsivektorid kolmnurga, mille saame sarnasusteguri täpsusega taastada kildude liikumissuundade abil. Sellest kolmnurgast saame küljepikkuste suhete mõõtmise abil teada algimpulsside suhted $p_1 : p_2 : p_3 = 72 : 24 : 59$ (need numbrid on kolmnurga külgede pikkused millimeetrites). Kildude libisemiskaugused suhtuvad kui algkiiruste ruudud – mõõtmiste abil saame teada

$$v_1^2 : v_2^2 : v_3^2 = 72 : 30 : 21$$

ning ruutjuure võtmise järel ka kiiruste suhted

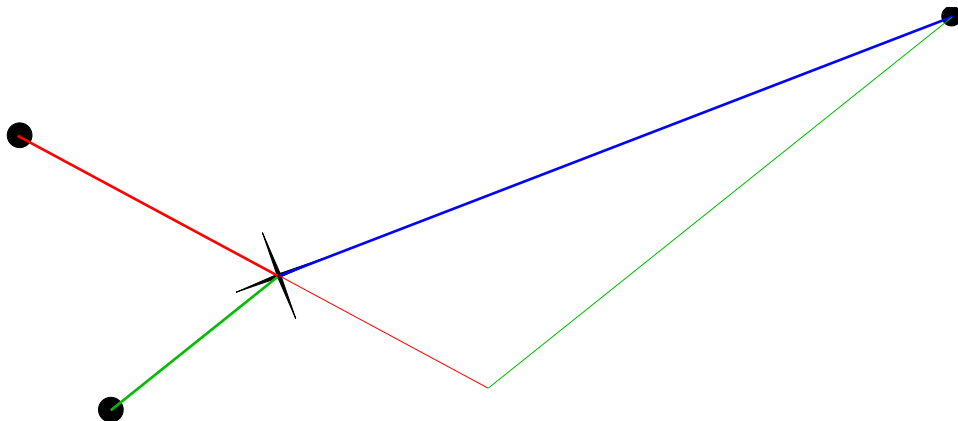
$$v_1 : v_2 : v_3 = 8,5 : 5,5 : 4,6.$$

Jagades impulsside suhted kiiruste suhtega, saame teada masside suhted

$$m_1 : m_2 : m_3 = 8,5 : 4,4 : 12,8$$

ning teades kogumassi ka massid eraldi võetuna,

$$m_1 = 10 \text{ g} \cdot \frac{8,5}{8,5 + 4,4 + 12,8} = 3,3 \text{ g}, m_2 = 10 \text{ g} \cdot \frac{4,4}{25,7} = 1,7 \text{ g}, m_3 = 10 \text{ g} \cdot \frac{12,8}{25,7} = 5,0 \text{ g}.$$



L84 Liivakell ★★★★★

Autor: Roland Matt, lõppvoor, 2012, G 8

Olgu kogu liivahulga kõrgus H ja liiva kõrgus alumises anumask h . Alumisse anumasse voolab liiv massikiirusega w .

Paneme kirja liivakella masskeskme koordinaadi:

$$x = \frac{\frac{h}{2}hS\rho + (\frac{L}{2} + \frac{H-h}{2})(H-h)S\rho}{HS\rho} = \frac{2h^2 + LH - Lh + H^2 - 2Hh}{2H}.$$

Kui liivakella masskeske omab kiirendust, peab masskeskme koordinaadi teine tuletis aja järgi olema nullist erinev. Järeldusena Newtoni II seadusest võib öelda, et liivakellale peab mõjuma masskeskme kiirendusele vastav lisajõud – see ongi kaalu näidu muutus, mida otsime. Võtame nüüd masskeskme koordinaadist kaks korda järjest ajalisi tuletisi, pidades meeles, et liivatase kõrguse h tuletis aja järgi (muutumiskiirus) on seotud otseselt liiva voolu massikiirusega v järgnevalt:

$$w = S\rho\dot{h}.$$

Täpiga suuruse peal tähistame vastavat ajalisi tuletisi. Peame meeles, et h muutumise kiirendus (teine tuletis aja järgi) peab võrduma nulliga ning et L ja H on konstantsed suurused, mistõttu nende tuletised on nullid.

$$\dot{x} = \frac{4h\dot{h} - L\dot{h} - 2H\dot{h}}{2H}.$$

Võtame veelkord tuletisi:

$$a = \ddot{x} = \frac{4h\ddot{h} + 4\dot{h}^2 - L\ddot{h} - 2H\ddot{h}}{2H} = \frac{2\dot{h}^2}{H} = \frac{2w^2}{HS^2\rho^2}.$$

Kogu liivakellas oleva liiva mass on $m = SH\rho$. Liivakellale mõjuv täiendav jõud (kaalu näidu muutus):

$$F = ma = \frac{2w^2}{S\rho}.$$

L85 Silindrilised anumad ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2014, G 8

Kui tühi anum kerkib vahemaa x võrra, siis tema all vabaneb ruumala $\pi r^2 x$, mille täidab silindritevahelisest ruumist pärit vesi. Vajugu nivoo vahemaa y võrra; ruumalade võrdsuse tõttu $\pi r^2 x = \pi(R^2 - r^2)y$, seega

$$y = x \frac{r^2}{R^2 - r^2}.$$

Kui $x \ll L$, siis süsteemi potentsiaalne energia väheneb vee ülevalt alla ümberpaigutumise tõttu suuruse

$$E_p = g\rho\pi r^2 xL$$

võrra. Energia balansis võime ignoreerida sisemise silindri otsa juures toimuva vee liikumise kineetilist energiat, kuna selles osaleva vee hulk on väga väike võrreldes langeva vee hulgaga. Seetõttu vee kineetiline energia

$$E_k = \frac{1}{2} \rho \pi (R^2 - r^2) L \dot{y}^2,$$

kus \dot{y} tähistab y tuletist aja järgi. Võttes energia jäävuse seadusest $gr^2 \dot{x} = \frac{1}{2} (R^2 - r^2) \dot{y}^2$ tuletise aja järgi, leiame

$$gr^2 \dot{x} = (R^2 - r^2) \dot{y} \dot{y}.$$

x ja y vahelise seose tõttu kehtib võrdus $r^2 \dot{x} = (R^2 - r^2) \dot{y}$, mistõttu

$$\dot{y} = g \Rightarrow \ddot{x} = g \frac{R^2 - r^2}{r^2} \approx 4,3 \text{ m/s}^2.$$

L86 Vedru ★★★★★

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2015, G 8

a) Hetkeks, mil kast maapinnale jõuab, on koormis omandanud kiiruse $v_i = \sqrt{2gh}$. Seejärel hakkab vedru võnkuma ümber uue tasakaaluasendi ehk ümber punkti, kus vedru pinge tasakaalustab koormisele mõjuva raskusjõu: $ky_0 = mg$. Tasakaaluasendisse jõudmiseks peab koormis veel täiendavalt läbima kauguse $y_0 = \frac{mg}{k}$. Olgu vedru võnkumise amplituud A . Kõige ülemises punktis jääb koormis hetkeks seisma ning kokkusurutud vedru avaldab nii koormisele kui kastile jõudu $k(A - y_0)$. Kast hüppab üles tingimusel $mg = k(A - y_0)$, millest

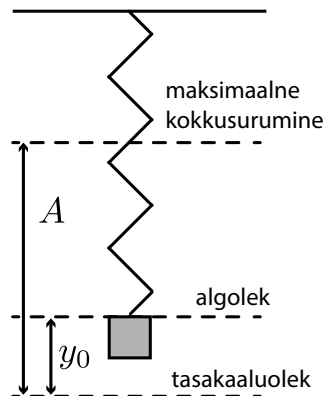
$$A = \frac{mg}{k} + y_0 = 2y_0.$$

Rakendame nüüd energia jäävust. Võnkumise ülemises punktis on kineetiline energia muutunud gravitatsiooni ja vedru potentsiaalseks energiaks.

$$mgh = \frac{mv_i^2}{2} = mg(A - y_0) + \frac{1}{2} k(A - y_0)^2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right) mgy_0 = \frac{3}{2} mgy_0,$$

millest saame otsitavaks kõrguseks

$$h_{\min} = \frac{3}{2} y_0 = \frac{3mg}{2k} = \frac{3g}{2\omega^2}.$$



b) Teisele küsimusele vastates lähtume harmoonilise võnkumise omadustest. Veendume esmalt, et konstantse jõu mg lisamine nihutab tasakaaluasendit, kuid jätab võnkumist kirjeldava võrrandi samaks. Tõepoolest, lugedes koordinaadi y alguspunktiks uue tasakaaluasendi, on meie vedru võnkumine kirjeldatav võrrandiga

$$ma = m\ddot{y} = -k(y - y_0) - mg = -ky.$$

Sellise võnkumise nurksagedus on muidugi $\omega = \sqrt{k/m}$ ning periood $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Kui hakkaksime aega lugema hetkest, mil koormis läbib tasakaaluasendit, siis kuluks vedru maksimaalselt kokku surumiseks kolm veerandperioodi ($\frac{3}{4}T$: kast liigub alla, tagasi tasakaaluasendisse ja üles), sest langemiskõrguse $h = h_{\min}$ korral saab kast hüpata vaid koormise kõige ülemises asendis. Paraku ei alusta me aja arvestamist mitte tasakaaluasendist, vaid hetkest, mil vedru on välja venitamata. Peame seega arvesse võtma lisaega Δt , mis kulub koormisel vahemaa y_0 läbimiseks. Kuna koormis ei liigu konstantse kiirendusega, siis seos $s = at^2/2$ siin ei kehti. Δt leidmiseks lähtume harmoonilise võnkumise faasist φ , mis kulub algasendist tasakaaluasendisse jõudmiseks. Seda faasi on lihtne avaldada koordinaatide abil, pidades silmas, et amplituud A vastab koordinaadi faasinihkele $\pi/2$ tasakaaluasendi suhtes. Nimelt $y_0 = A \sin \varphi$, millest

$$\varphi = \arcsin(y_0/A) = \arcsin(1/2) = \frac{\pi}{6}.$$

Faasi φ läbimiseks kuluv aeg on

$$\Delta t = \frac{\varphi}{\omega} = \frac{1}{12}T.$$

Järelikult veedab kast maapinnal kuni üles kerkimiseni aja

$$t = \frac{3}{4}T + \Delta t = \frac{5}{6}T = \frac{5\pi}{3\omega}.$$

L87 Vardad ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2017, G 10

Vaadeldaval hetkel on kiirusvektori ja AC vahelise nurga siinus $\frac{1}{2}$, st nurk ise on 30° ja seetõttu AB on risti kiirusvektoriga. Järelikult on punkti B kiirusvektori suund sama, mis \vec{v} . Varda BC venimatusse tõttu peavad otspunktide kiirusvektorite projektsioonid varda sihile olema võrdsed. Et nurgad nende kiirusvektorite ja varda sihiga on võrdsed, siis peavad ka kiiruste moodulid olema võrdsed. Niisiis punkti B kiirus on \vec{v} . Seetõttu on punkti B kesktõmbekiirendus $v^2/2l$. Punktil B võib olla veel mingi tangentsiaalkiirendus, hetkel me teame vaid kogukiirenduse projektsiooni AB sihile. Läheme nüüd kiirusega \vec{v} liikuvasse taustsüsteemi, kus punkt C on kogu aeg paigal ja punkt B on hetkeliselt paigal. Et B on hetkeliselt paigal, siis selle kesktõmbekiirendus pöörlemisel ümber C on antud hetkel null, st B kiirenduse vektor on risti BC -ga. Seega me teame kiirenduse suunda ja projektsiooni $v^2/2l$ sihile AB (mis moodustab vektori suunaga nurga 30°). Selle põhjal saame avaldada kiirenduse mooduli

$$a = \frac{v^2}{2l \cos 30^\circ} = \frac{v^2}{\sqrt{3}l}.$$

L88 Kuulid ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2006, G 10

Teisest ja kolmandast kuulist koosnevale süsteemile mõjus sel ajal, kui esimest kuuli lükati, esimese varda sihiline jõud, sest teatavasti mõjuvad kergetele varrastele vaid varda sihilised pinged. Seega nihkus šarniirne ühenduspunkt esimese varda sihiliselt ning teine ja kolmas kuul omandasid sümmeetria tõttu ühesugused kiirused. Šarniirse ühenduspunkti kiirus on $v_s = v_0 \cos 30^\circ$, sest esimese varda pikkus ei muutu. Et nii teisele kui kolmandale kuulile mõjub ainult varda sihiline jõud, siis nende kiirus on ka varda sihiline; varda venimatusse juhtivalt $v_2 = v_3 = v_s \cos 60^\circ = v_0 \sqrt{3}/4$.

Pinged varrastes on võrdsed, sest šarniirse ühenduspunkti massi võime lugeda nulliks ning talle mõjuv resultantjõud peab olema 0 ja jõudude tasakaalust tuginevalt peab varraste pingetest moodustuma võrdkülgne kolmnurk. Olgu varraste pinge T . Seega on kõigi kuulikeste kiirendused võrdsed, $a_k = T/m$. Läheme šarniirse ühenduspunktiga seotud kulgevast liikuvasse taustsüsteemi, mis liigub kiirendusega \vec{a} . Selles süsteemis on esimese kuuli kiirus $u_1 = v_0/2$ ning teiste kiirus $u_2 = v_s \sin 60^\circ = \frac{3}{4}v_0$. Selles süsteemis liiguvad kuulid ringjoont mööda. Iga kuuli jaoks saame välja kirjutada jõudude tasakaalu tingimuse projekteerituna vastava varda sihile (siis kaob vajadus teada kuulikese ringliikumise tangetsiaalkiirendust, sest see on teljega risti). Teise ja kolmanda kuuli tasakaalutingimusi võrreldes selgub, et inertsijõu $-m\vec{a}$ projektsioon kummalegi teljele peab olema üks ja sama, st \vec{a} peab olema esimese varda sihiline. Seega saame kaks võrrandit:

$$\begin{aligned} mu_1^2/l + a &= T, \\ mu_2^2/l - a/2 &= T. \end{aligned}$$

Elimineerides neist võrrandeist a , saame

$$T = \frac{1}{3} \frac{m}{l} (u_1^2 + 2u_2^2)$$

ning otsitava kiirenduse

$$a_k = T/m = (u_1^2 + 2u_2^2) \frac{3l}{m} = \frac{11}{24} v_0^2/l.$$

L89 Mõõteriistad ★

Autor: Koit Timpmann, lõppvoor, 2006, G 1

Olgu alguses ampermeetri ja voltmeetri pinged vastavalt U_A ja U_V . Jadaühenduse korral kehtib

$$U_A + U_V = 9 \text{ V}.$$

Peale takisti lisamist suurenes ampermeetrit läbiv vool ja seega ka pinged kaks korda. Teisisõnu ampermeetri uus pinge oli $2U_A$. Pinge voltmeetril aga vähenes kaks korda ja oli $0,5U_V$. Kirchhoffi pingeseaduse kohaselt

$$2U_A + 0,5U_V = 9 \text{ V}.$$

Lahendades kahest võrrandist koosneva võrrandisüsteemi, saame $U_A = 3 \text{ V}$ ja $U_V = 6 \text{ V}$. Seega voltmeetril pinge oli alguses 6 V ning lõpus 3 V .

L90 Voltmeetrid ★

Autor: Eero Vaher, piirkonnavor, 2016, G 1

Voltmeetrid mõõdavad alati pingelangu enda klemmidel, kusjuures pingelangud on määratud voltmeetrite takistustega. Olgu iga voltmeetri takistus R . Kogu skeemi takistus on

$$R_k = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{2R} \right)^{-1} + R = \frac{5}{3}R.$$

Pingelang esimesel voltmeetril on

$$U_1 = \frac{R}{R_k} U_0 = 18 \text{ V}.$$

Pingelang neljandal voltmeetril on $U_4 = U_0 - U_1 = 12 \text{ V}$ ning pingelangud teisel ja kolmandal voltmeetril on

$$U_2 = U_3 = \frac{U_4}{2} = 6 \text{ V}.$$

L91 Voltmeeter ★

Autor: Erkki Tempel, piirkonnavor, 2017, G 1

Jooniselt näeme, et äärmised takistid on lühistatud, mistõttu need mõõteriistade näitu ei mõjuta. Ampermeeter on jadamisi kahe takistiga, mistõttu on ampermeetriga harus kogutakistus $2R$. Seega on kogupinge selles harus võrdne patarei pingega

$$U = I \cdot 2R.$$

Asendades ampermeetri voltmeetriga, näitab voltmeeter patarei pinget, kuna tegemist on ideaalse voltmeetriga, mille takistus on lõpmatu. Sellest tulenevalt voltmeetriga haru vool ei läbi ja temaga jadamisi ühendatud takistid voltmeetri näitu ei mõjuta.

$$U_{\text{voltmeeter}} = 2RI.$$

L92 Elektriküünlad ★

Autor: Valter Kiisk, piirkonnavor, 2009, G 4

a) Lambi nimivool on $0,6 \text{ W} / 3 \text{ V} = 0,2 \text{ A}$. 10 lampi tarbivad voolu $10 \times 0,2 \text{ A} = 2 \text{ A}$. Pingelang takistil on $5 \text{ V} - 3 \text{ V} = 2 \text{ V}$. Järelikult vajalik takistus on $2 \text{ V} / 2 \text{ A} = 1 \Omega$.

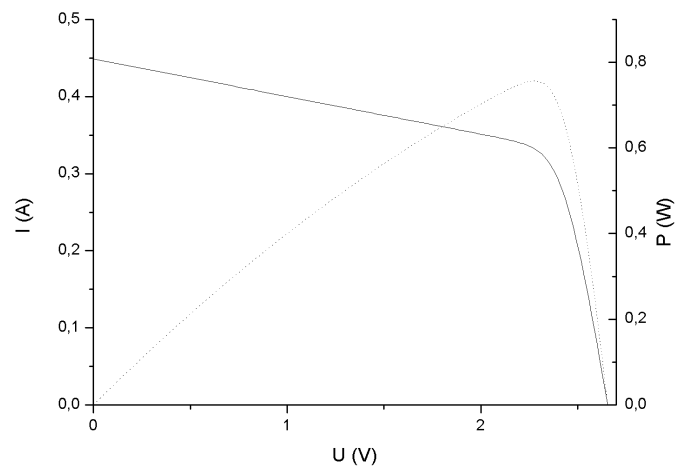
b) 1Ω -st takistit kasutades oli voolutugevus ahelas $(4 \text{ V} - 2,3 \text{ V}) / 1 \Omega = 1,7 \text{ A}$. Sellise koormuse tulemusel langes pinge vooluallika klemmidel 1 V võrra, seega alaldi sisetakistus on $1 \text{ V} / 1,7 \text{ A} = 0,59 \Omega$. Järelikult takisti R takistuse sobilik väärtus oleks $1 \Omega - 0,59 \Omega = 0,41 \Omega$.

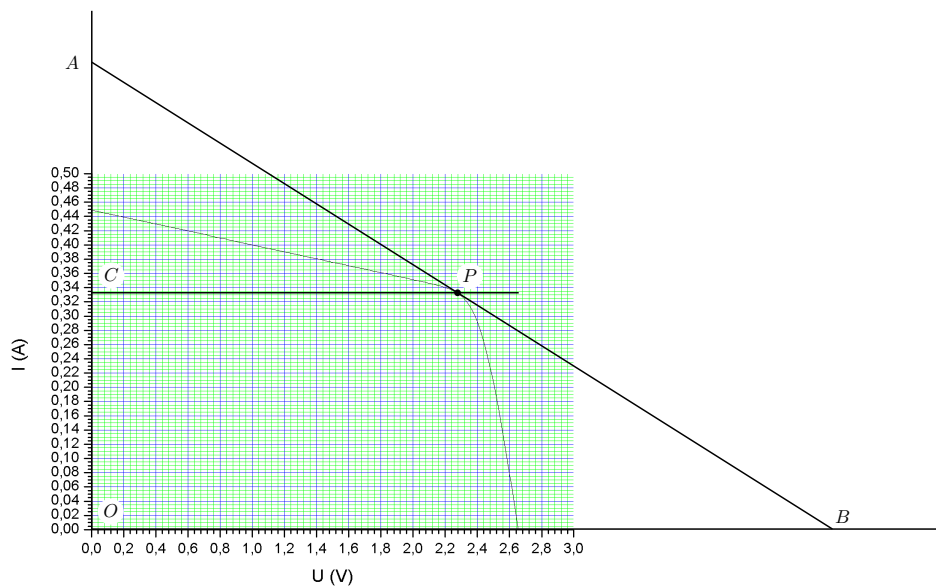
L93 Päikesepaneel ★

Autor: Mihkel Pajusalu, lõppvoor, 2010, G 3

Koormisel eralduv võimsus avaldub kui UI . Peame leidma punkti graafikul, mil antud avaldis on maksimaalne. Toore jõuga lähenedes saab graafikult erinevate punktide jaoks võimsuse välja arvutada ja ligikaudu maksimaalse võimsuse määrata. Saame $U_{\max} \approx 2,28 \text{ V}$, $I_{\max} \approx 0,33 \text{ A}$. Seega vastav koormise takistus on

$$R = \frac{U_{\max}}{I_{\max}} \approx 6,9 \Omega$$

*Alternatiivne lahendus*



Võimsus $N = UI$ on maksimaalne, kui võimsuse tuletis pinge järgi on null. Seega,

$$dN = d(UI) = dUI + UdI = 0,$$

ehk

$$I + U \frac{dI}{dU} = 0,$$

kus dI/dU on graafiku tõus. Vaatleme vastavaid suurusid graafiku punktis P . Joonise tähistustes, $|OC| = I$, $|CP| = U$ ja

$$\frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|CA|}{|CP|} = -\frac{dI}{dU}.$$

Järelikult, kui me tahame, et P oleks otsitav võimsuse maksimumi punkt, peab kehtima

$$|OC| - |CP| \frac{|CA|}{|CP|} = 0 \implies |OC| = |CA| \implies |AP| = |PB|.$$

Joonlauaga veidi otsides pole sellist punkti P raske leida. Vastus on muidugi sama, mis esimeses lahenduses.

L94 Lambid ★

Autor: Mihkel Kree, piirkonnavor, 2015, G 2

Olgu pingeallika pinge U . Paralleelühenduse korral langeb kummalegi lambile samuti pinge U . Olgu lampide takistused R_1 ja R_2 , neil eralduvad võimsused on siis $P_1 = U^2/R_1$ ja $P_2 = U^2/R_2$. Et ülesande tingimuste kohaselt on nende võimsuste suhe k , saame avaldada seose takistute vahel:

$$P_1 = kP_2, \quad \text{millest} \quad R_1 = R_2/k \quad \text{ehk} \quad R_2 = kR_1. \quad (1)$$

Märkus. üldisust kitsendamata võinuksime samaväärselt öelda ka: $P_1 = P_2/k$. Ühendades need lambid nüüd jadamisi, on ahela kogutakistuseks $R_1 + R_2$ ning kummaski lambis võrdne voolutugevus $I = U/(R_1 + R_2)$. Lampidel eralduvad võimsused on nüüd vastavalt $P'_1 = I^2 R_1$ ja $P'_2 = I^2 R_2$. Koguvõimsuste suhe kahel juhul on seega

$$\gamma = \frac{P'_1 + P'_2}{P_1 + P_2} = \frac{I^2(R_1 + R_2)}{U^2(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})} = \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2}.$$

Et saada avaldises lahti tundmatutest takistustest, peame ühe neist asendama teise kaudu seose (1) abil, saades otsitavaks koguvõimsuste suhteks

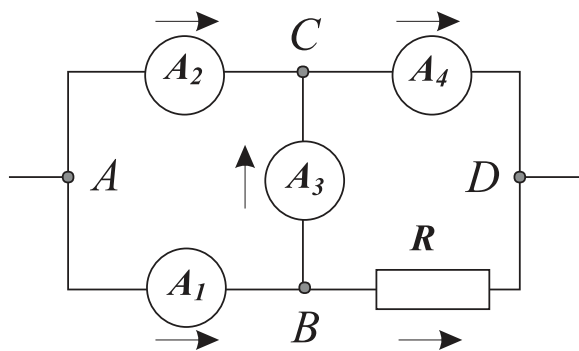
$$\gamma = \frac{R_1^2 k}{R_1^2(1+k)^2} = \frac{k}{(1+k)^2}.$$

Vastates lisaküsimusele, näeme et $\gamma < 1$ ehk jadaühenduses koguvõimsus väheneb.

L95 Ampermeetrid ★★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2008, G 4

Märgime skeemil voolude oletatavad suunad ning valime kontuurides ACB ja CDB liikumise suunaks päripäeva.



Kirchhoffi 2. seaduse põhjal kontuuris ACB

$$I_2 r - I_3 r - I_1 r = 0 \quad \Rightarrow \quad I_3 = I_2 - I_1 = 2 \text{ A}.$$

Kirchhoffi 1. seaduse põhjal punktis B

$$I_1 = I_3 + I_R \Rightarrow I_R = I_1 - I_3 = 1 \text{ A.}$$

Kirchhoffi 1. seaduse põhjal punktis C

$$I_4 = I_2 + I_3 = 7 \text{ A.}$$

Ning lõpuks Kirchhoffi 2. seaduse põhjal kontuuris CDB

$$I_4 r - I_R R + I_3 r = 0 \Rightarrow 9r - R = 0 \Rightarrow R/r = 9.$$

L96 Patarei ★★

Autor: Taavi Pungas, piirkonnavor, 2011, G 6

Olgu patarei sisetakistus r . Mõlemas olukorras on patarei elektromotoorjõud sama, st $I_1(R+r) = I_2(2R+r)$. Seega,

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{R+r}{2R+r} = \frac{2R+r-R}{2R+r} = 1 - \frac{R}{2R+r} = 1 - \frac{1}{2 + \frac{r}{R}}. \quad (1)$$

a) r on väiksem kui R , aga samas peab r olema suurem kui 0. Seega $0 \leq \frac{r}{R} < 1$ ja $1 - \frac{1}{2+0} \leq I_2/I_1 < 1 - \frac{1}{2+1}$, ehk $1/2 \leq I_2/I_1 < 2/3$.

b) Nüüd kehtib $R < r$, ehk $I_2/I_1 > 2/3$. Valemist (1) on näha, et I_2/I_1 ülempiir on 1, seega $2/3 < I_2/I_1 < 1$

L97 Elektriskeem ★★

Autor: Oleg Košik, piirkonnavor, 2013, G 5

a) Tekib kaks kontuuri, milles igaühes on üks vooluallikas ning kaks ampermeetrit. Voolud ampermeetritel 1 ja 3 leiame Ohmi seadusest: $I_1 = \frac{3\varepsilon}{r}$, $I_3 = \frac{\varepsilon}{r}$, voolu ampermeetril 2 aga Kirchhoffi I seadusest:

$$I_2 = I_1 + I_3 = \frac{4\varepsilon}{r}.$$

b) Ilmselt $I_2 = 0$. Tekib üks kontuur, mis sisaldab kahte vooluallikat. Voolutugevuse kontuuris leiame Kirchhoffi II seadusest:

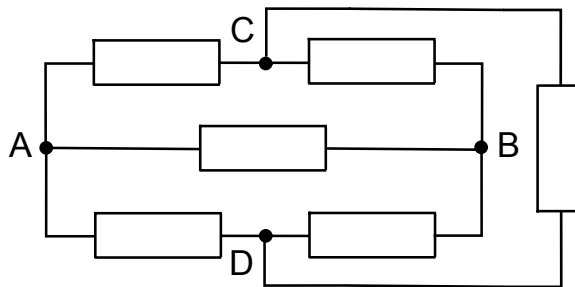
$$I_1 = I_3 = \frac{3\varepsilon - \varepsilon}{r + r} = \frac{\varepsilon}{r}.$$

L98 Tetraeeder ★★

Autor: Eero Vaher, lahtine, 2014, G 4

Alloleval joonisel on toodud tetraeedri ekvivalentskeem. Sümmeetriakaalutlustel ei saa tippude C ja D vaheline takisti mõjutada tippude A ja B vahelist takistust, järelikult võib selle skeemilt eemaldada. Allesjääva skeemi takistust on lihtne leida.

$$R_{AB} = \left(\frac{1}{R+R} + \frac{1}{R+R} + \frac{1}{R} \right)^{-1} = \frac{R}{2}.$$



L99 Ruudustik ★★

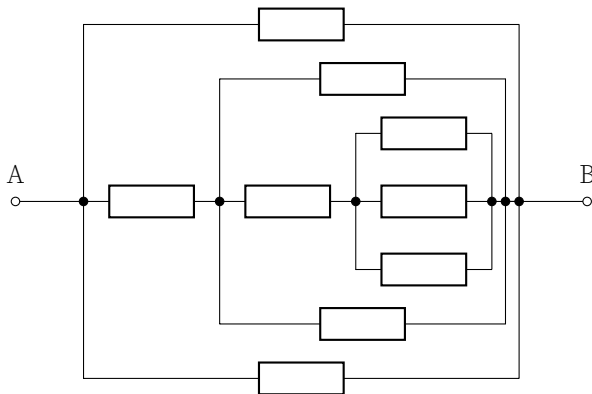
Autor: Taavi Pungas, lõppvoor, 2014, G 1

Sümmeetria tõttu on ruudustiku kaks tähistamata nurka ja keskpunkt sama potentsiaaliga, mistõttu võid need kolm punkti kokku ühendada. Saadud skeem jaotub ilusti rööp- ja jadaühendusteks, nende abil saame punktide A ja B vaheliseks takistuseks $R = 1,5 \Omega$.

L100 Takistid ★★

Autor: Hans Daniel Kaimre, lahtine, 2015, G 2

Teades, et ühesuguse potentsiaaliga punkte võib ahelas vabalt lahti ja kokku ühendada, saame ülesandes esitatud elektriskeemi viia allolevale kujule.



$$R_{AB} = (2R^{-1} + (R + (2R^{-1} + (R + (3R^{-1})^{-1})^{-1})^{-1})^{-1})^{-1} = \frac{15}{41}R.$$

L101 Elektriskeem ★★

Autor: Kristian Kuppart, lahtine, 2016, G 3

Vahetult pärast lüliti sulgemist ei ole parempoolsele kondensaatorile laengut jõudnud koguneda, mis tähendab, et pinge tema klemmidel $U = \frac{q}{C} = 0$. Parempoolsest ülemisest takistist esimesel hetkel voolu läbi ei lähe. Sama mõttekäik kehtib vasakpoolse kondensaator kohta, niisiis voolutugevus $I = \frac{2U}{R}$. Pika aja möödumisel on mõlemad kondensaatorid efektiivselt lahti ühendatud, kogu vool läheb läbi keskmise haru: $I = \frac{U}{2R}$

L102 Vooluring ★★

Autor: Valter Kiisk, piirkonnavor, 2005, G 4

Teisest skeemist näeme, et vooluallika elektromotoorjõud \mathcal{E} võrdub voltmeetri näiduga,

$$\mathcal{E} = U_2.$$

Seega esimese skeemi jaoks

$$U_1 + I_1 r_a = \mathcal{E} = U_2,$$

teise skeemi jaoks

$$I_2 R + I_2 r_a = U_2,$$

kus r_a on ampermeetri sisetakistus. Viimase elimineerimisel saame

$$R = \frac{I_1 U_2 + I_2 U_1 - I_2 U_2}{I_1 I_2} = \frac{U_2}{I_2} + \frac{U_1}{I_1} - \frac{U_2}{I_1}.$$

L103 Takistid ★★

Autor: Aigar Vaigu, lõppvoor, 2005, G 4

Paneme tähele, et pinge absoluutväärtus ahela otstele U ei muutu. Arvestades, et päripidise voolu korral võib diodi klemmid lugeda lühistatuks ning vastuvoolu korral isoleerituks, saame kummagi polaarsuse jaoks koostada algse ahela (joonis 1) asemele ekvivalentseid ahelad (joonised 2 ja 3).

Leiame takistil A eralduva võimsuse päripinge puhul.

Takistil A eralduv võimsus on $P_1 = I_1^2 R$, kus

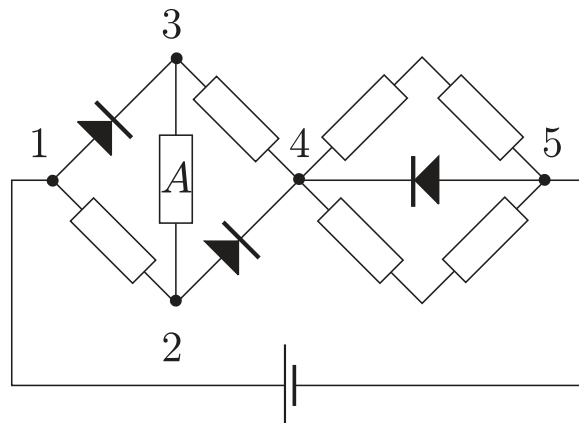
$$I_1 = \frac{I}{3} = \frac{1}{3} \frac{U}{r_1}$$

on vaadeldavat takistit läbiva voolu tugevus ning

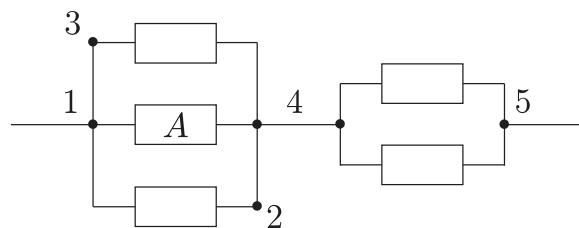
$$r_1 = \frac{R}{3} + R = \frac{4}{3} R$$

on kogu ahela takistus. Seega

$$P_1 = \frac{R U^2}{9 r_1^2} = \frac{U^2}{R} \frac{1}{9} \frac{9}{16} = \frac{1}{16} \frac{U^2}{R}.$$



Joonis 1: Esialgne skeem



Joonis 2: Ekvivalentne skeem ühe polaarsuse puhul

Nüüd määrame takistil A eralduva võimsuse vastupidise polaarsusega. Takistil A läbib vool $I_2 = U/3R$. Seega võimsus on

$$P_2 = \left(\frac{U}{3R}\right)^2 R = \frac{1}{9} \frac{U^2}{R}.$$

Võimsuste suhe

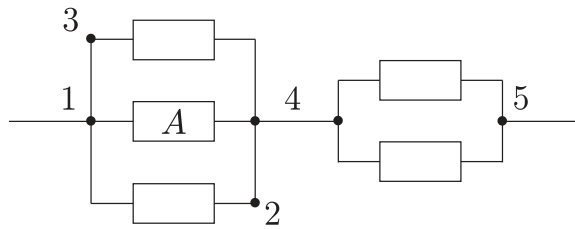
$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{9}{16},$$

seega polaarsuse muutmisel muutub takistil A eralduv võimsus 9/16 korda.

L104 Elektriskeem ★★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2006, G 2

Kondensaatori C_1 plaadid on ühendatud läbi takistite R_1 ja R_2 . Seepärast laeng selle kondensaatori plaatidel on $q_1 = 0$ (pärast seda, kui on lõppenud kondensaatrite C_2 ja C_3 laadimine). Kuna pärast kondensaatrite laadimist volud skeemis ei kulge, pinged kondensaatritel C_2 ja C_3 on võrdsed \mathcal{E} . Järelikult, $q_2 = C_2\mathcal{E}$ ja $q_3 = C_3\mathcal{E}$.



Joonis 3: Ekvivalentne skeem teise polaarsuse puhul

L105 Skeem ★★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2009, G 3

Süsteem saab töötada kolmes režiimis:

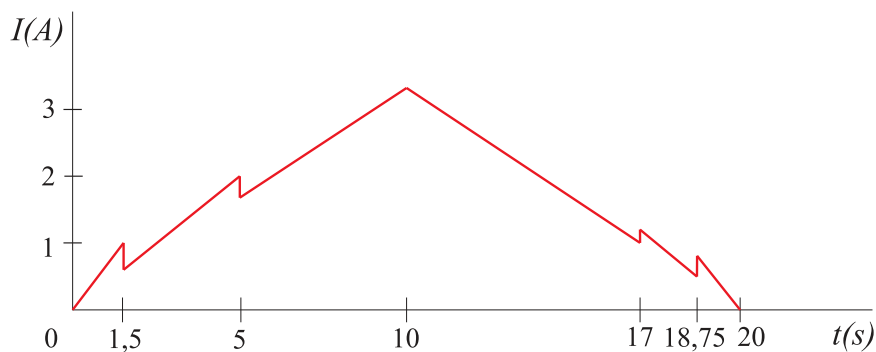
(I) Kõigi elementide takistus on $1\ \Omega$. Siis süsteemi kogutakistus on $R_I = 1,5\ \Omega$, vool $I_I = \frac{U}{1,5}\text{ (A)}$ ning pinge skeemi vasakpoolsel elemendil $\frac{2}{3}U$ ja parempoolsetel elementidel $\frac{1}{3}U$.

(II) Vasakpoolse elemendi takistus on $2\ \Omega$, parempoolsemate elementide takistus on $1\ \Omega$. Siis süsteemi kogutakistus on $R_I = 2,5\ \Omega$, vool $I_I = \frac{U}{2,5}\text{ (A)}$ ning pinge vasakpoolsel elemendil $\frac{4}{5}U$ ja parempoolsetel elementidel $\frac{1}{5}U$.

(III) Kõigi elementide takistus on $2\ \Omega$. Siis süsteemi kogutakistus on $R_I = 3\ \Omega$, vool $I_I = \frac{U}{3}\text{ (A)}$ ning pinge skeemi vasakpoolsel elemendil $\frac{2}{3}U$ ja parempoolsetel elementidel $\frac{1}{3}U$.

Vaatame süsteemi käitumist, kui klemmipinget kasvab. Alguses töötab süsteem režiimis I kuni hetkeni, mil klemmipinget kasvab väärtuseni $U = 1,5\text{ V}$. Siis muutub vasakpoolse elemendi takistuse väärtus $R_2 = 2\ \Omega$ -ks ning süsteem jätkab tööd režiimis II. Hetkel, mil klemmipinget kasvab väärtuseni $U = 5\text{ V}$, muutub ka parempoolsete elementide takistus R_2 -ks ning süsteem jätkab tööd režiimis III.

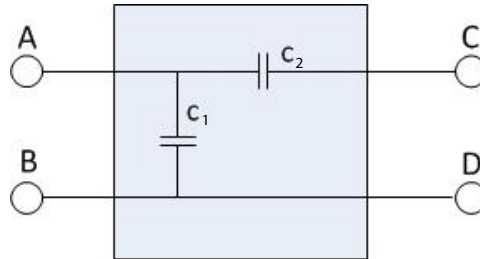
Vaatame süsteemi käitumist, kui klemmipinget kahaneb. Alguses töötab süsteem režiimis III kuni hetkeni, mil klemmipinget langeb väärtuseni $U = 3\text{ V}$. Siis muutub parempoolsete elementide takistuse väärtus tagasi $R_1 = 1\ \Omega$ -ks ning süsteem jätkab tööd režiimis II. Hetkel, mil klemmipinget langeb väärtuseni $U = 1,25\text{ V}$, muutub ka vasakpoolse elemendi takistus tagasi R_1 -ks ning süsteem jätkab tööd režiimis I. Voolutugevuse käitumine on esitatud graafikul.



L106 Must kast ★★

Autor: Kristian Kuppert, lõppvoor, 2013, G 4

Sobiv skeem on näiteks selline:



Kui klemmide A ja B külge ühendada patarei ja klemmide C ja D külge voltmeeter, siis läbi kondensaatori C_2 vool ei lähe ning ta ei laadu. Pinge temal on 0 ning voltmeeter näitab U .

Kui aga patarei ühendada klemmide C ja D külge ja voltmeeter klemmide A ja B külge, laaduvad mõlemad kondensaatorid üheaegselt ning pinge U jaotub nende vahel võrdselt. Voltmeeter näitab $\frac{U}{2}$.

L107 Elektroonikaskeem ★★

Autor: Sandra Schumann, lahtine, 2017, G 4

Vaatame vooluallika polaarsuse vahetamist olukorras, kus seade vahepeal välja lülitatakse.

Kondensaatoril olevaks pingeks saab pärast mõne aja möödumist 0 V. Kui seade uuesti sisse lülitada, siis läheb aega, enne kui kondensaatoril olev pinge suureneb, ja takistil R on seetõttu vähemalt hetkeliselt pinge 9 V. Selles olukorras ei tohi takistil eralduv võimsus ületada maksimaalset väärtust $P_{\max} = 0,25 \text{ W}$.

$$P_{\max} > \frac{U^2}{R},$$

$$R > \frac{U^2}{P_{\max}} = \frac{(9 \text{ V})^2}{0,25 \text{ W}} = 324 \Omega.$$

Kui seadet mitte välja lülitada, jääb vooluallika eemaldamisel kondensaatorile pinge 9 V. Pärast vooluallika polaarsuse vahetamist saab takisti endale vähemalt hetkeliselt patarei ja kondensaatori liitunud pinge $9 \text{ V} + 9 \text{ V} = 18 \text{ V}$. Selles olukorras ületab takistil eralduv võimsus väärtuse $P_{\max} = 0,25 \text{ W}$.

$$P_{\max} < \frac{U_2^2}{R},$$

$$R < \frac{U_2^2}{P_{\max}} = \frac{(18 \text{ V})^2}{0,25 \text{ W}} = 1296 \Omega.$$

Märkus. Tegelikuses ei põle reaalsed takistid kohe läbi maksimaalse võimsuse hetkelisel kergel ületamisel, seega on takisti maksimaalne võimalik väärtus märkimisväärselt väiksem ja kondensaatori mahtuvuse väärtus peab sellise olukorra tekitamise jaoks olema väga suur. Täpsed piirid aga sõltuvad konkreetsest takistist ja selle kvaliteedist.

L108 Takisti ★★★

Autor: Jaan Kalda, piirkonnavor, 2007, G 7

Traadi ja pulga takistused pikkusühiku kohta on vastavalt $r_r = \rho_r/s = 3,2 \Omega/\text{m}$ ja $r_g = \rho_g/S = 10 \Omega/\text{m}$. Olgu traadi ja pulga pikkused vastavalt l_r ja l_g . Arvestades temperatuurisõltuvusega, on takistused vastavalt

$$R_r = l_r r_r (1 + \alpha_r \Delta T) \text{ ja } R_g = l_g r_g (1 + \alpha_g \Delta T).$$

Järjestikühenduse korral on summaarne takistus

$$R = (l_r r_r + l_g r_g) + (l_r r_r \alpha_r + l_g r_g \alpha_g) \Delta T.$$

Temperatuurisõltuvus on minimaalne (lineaarses lähenduses olematu), kui

$$l_r r_r \alpha_r + l_g r_g \alpha_g = 0.$$

Sellisel juhul on takistus

$$R = l_r r_r + l_g r_g.$$

Nendest kahest võrrandist saame avaldada l_r ja l_g : esimesest võrrandist leiame $l_r r_r = -l_g r_g \alpha_g / \alpha_r$, mille asendamisel teise saame

$$R = l_g r_g \left(1 - \frac{\alpha_g}{\alpha_r}\right) \Rightarrow l_g = \frac{R \alpha_r}{r_g (\alpha_r - \alpha_g)} \approx 5,6 \text{ cm.}$$

Analoogselt

$$l_r = \frac{R \alpha_g}{r_r (\alpha_g - \alpha_r)} \approx 13,6 \text{ cm.}$$

L109 Kondensaatoriredel ★★★

Autor: Siim Ainsaar, piirkonnavor, 2007, G 8

Lõpmatust ahelast ühe lüli eemaldamisega mahtuvus ei muutu. Seetõttu võime tervet ahelat vaadelda kui jadaühendust C -st ning C ja C_k paralleelühendusest. Seega saame, kasutades veel asjaolu, et jadaühenduses liituvad mahtuvuse pöördeväärtused ning rööpühenduses mahtuvused ise, võrrandi:

$$C_k = \frac{1}{1/C + 1/(C + C_k)}.$$

Teisendades, jõuame ruutvõrrandini:

$$C_k^2 + C C_k - C^2 = 0.$$

Seda lahendades, saame:

$$C_k = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} C \approx 0,6 C.$$

Negatiivse lahendi heitsime kõrvale.

L110 Traat ★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2008, G 7

Traadijupp pikkusega δ omab ristlõikepindala $s = S \cdot 1 \text{ mm}/\Delta$ ning takistust $r = \rho\delta/s = \rho\delta\Delta \cdot 1 \text{ mm}^{-3}$. Liites kokku kõikide väikeste juppide takistused näeme, et kogutakistus $R = \rho A \cdot 1 \text{ mm}^{-3}$, kus A on graafiku alune pindala (liita tuleb ka joonest $\Delta = 1 \text{ mm}$ allapoole jääv osa). Joonise abil leiame $A \approx 14 \text{ mm} \cdot \text{m}$ ning seega $R \approx 14 \Omega$.

L111 Kondensaator ★★★

Autor: Aigar Vaigu, piirkonnavor, 2010, G 7

Patarei pinge on $U = \text{const}$ ja vool ahelas, vastavalt ülesande tingimustele, on $I = \text{const}$. Patarei võimsus on

$$P_p = UI.$$

Energia kondensaatoris on

$$E = \frac{CU^2}{2},$$

kus kondensaatori mahtuvus on $C = q/U$ ja laeng kondensaatoris q . Kondensaatorisse energia salvestamise kiirus on energia muutumise kiirus kondensaatoris ehk energia tuletis aja järgi,

$$P_C = \frac{dE}{dt} = \frac{dC}{dt} \frac{U^2}{2} = \frac{d(CU)}{dt} \frac{U}{2} = \frac{dq}{dt} \frac{U}{2}.$$

Arvestades, et laengu muutumise kiirus dq/dt on vool I , saame energia salvestumise kiiruseks kondensaatorisse

$$P_C = \frac{UI}{2}.$$

Näeme, et patareist “väljub” energiat kaks korda kiiremini, kui seda salvestub kondensaatorisse. Energia, mis ajaühikus kondensaatorisse ei jõua läheb välisjõududele, mis muudavad kondensaatori mahtuvust selliselt, et $I = \text{const}$, vastu töö tegemiseks.

L112 Elektriline sild ★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2012, G 3

Sümmeetria tõttu ülemises ja alumises takistis (R_2 ja R_4) vool puudub. Tõepoolest, oletagem et ühes neist (nt R_2 -s) läheb vool vasakult paremale. Peegeledame joonist vertikaaltelje suhtes: R_1 ja R_3 ning \mathcal{E}_1 ja \mathcal{E}_2 vahetavad kohad, kuid takistite ning elektromotoorjõudude võrdsuse tõttu skeem ei muutu. Peegelduse käigus peaks nüüd vool muutma suuna vastupidiseks ning minema paremalt vasakule; esialgse ja peegelduse tulemusel saadud skeemi ekvivalentsuse tõttu peaks aga vool olema endiselt vasakult paremale, mis viib vastuoluni. Järelikult on vool R_2 -s ja R_4 -s null ning skeemilt võib vastavad juhtmed kõrvaldada. Järele jääb R_1 , \mathcal{E}_2 , R_4 ja \mathcal{E}_1 jadaühendus, mistõttu on voolutugevus ahelas, sh R_1 -s ja R_3 -s leitav kui $I = 2\mathcal{E}/2R = \mathcal{E}/R$.

L113 Must kast ★★★

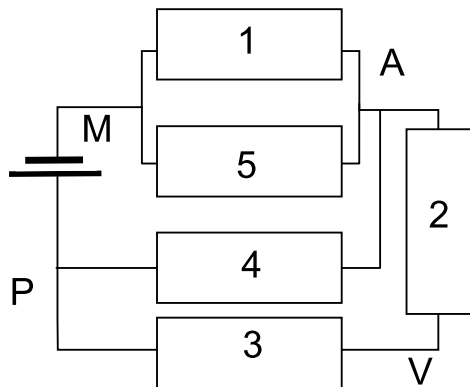
Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2015, G 4

Takistid saavad omavahel olla kas kolmnurk- või tähtühenduses. Ampermeeter ei saa olla otse väljundklemmide vahele lülitatud, sest siis põleks see vastavale klemmipaarile pinge rakendamisel läbi. Samuti ei saa see olla ühegi takistiga rööbiti lülitatud, sest siis ei läbiks vastavat takistit kunagi vool ning sisuliselt tähendaks see takisti asendamist null-takistusega. Sildühendus vajaks viit elementi, meil on aga vaid neli. Niisiis peab ampermeeter olema ühendatud järjestikku ühe takistusega. Tähtühenduse korral ei näitaks ampermeeter voolu, kui pinge on rakendatud vastasklemmidele. Seega saab mustas kastis olla vaid kolmnurkühendus. Kui pinge rakendada nende klemmide vahele, mille vaheline kolmnurga külg ei sisalda ampermeetri, siis on ampermeetri ahelas kaks järjestikust takistit, järelikult on takistus suurem ja vool väiksem. Ampermeeter peab seega olema sellel kolmnurga küljel, mis ühendab klemme B ja C , sest siis on voolutugevus suurim. Nüüd on lihtne leida kolmnurkühenduse küljel BC oleva takistuse väärtus: $R_{BC} = U/I_{BC} = 2\ \Omega$. Kui pinge rakendada klemmidele A ja B , siis moodustavad kolmnurga küljed AC ja CB ampermeetri sisaldava järjestikühenduse, $R_{AC} + R_{BC} = U/I_{AB} = 6\ \Omega$ ning $R_{AC} = 6\ \Omega - 2\ \Omega = 4\ \Omega$. Analoogselt leiame, et $R_{AB} + R_{BC} = U/I_{AC} = 3\ \Omega$ ning $R_{AB} = 3\ \Omega - 2\ \Omega = 1\ \Omega$.

L114 Viisnurk ★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2017, G 6

Joonistame lihtsustatud skeemi, arvestades et ampermeeter ja voltmeeter on ideaalsed. See tähendab, et ampermeetri võib asendada juhtmega ja voltmeetri lihtsalt kõrvaldada. Tähistame uue skeemi sõlmpunktid tähtedega P – patarei plussklemm; M – patarei miinus klemm; A – ampermeetri asukoht; V – voltmeetri alumine klemm. Takistid tähistame numbritega ühest viieni, liikudes päripäeva ja alustades viisnurga ülemisest tipust paremale jäävast takistist. Tulemus on toodud joonisel oleva skeemil.



Kirchoffi vooluseaduse tõttu on ampermeetri vool võrdne takistite 4 ja 5 voolude vahega, sest see osa voolust, mis läks läbi takisti 4, aga ei läinud läbi takisti 5, pidi järelikult läbi ampermeetri minema. Voltmeetri näit on võrdne klemmide M ja V

vahelise pingega. Skeemis on takistid 1 ja 5 paralleelselt, seega on nende takistus kokku $\frac{1}{2}\Omega$. Takisti 4 on paralleelselt takistite 2 ja 3 jadaühendusega, seega on nende takistus

$$\frac{1}{\frac{1}{\Omega} + \frac{1}{2\Omega}} = \frac{2}{3}\Omega.$$

Terve skeemi kogutakistus on seega

$$R_K = \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right)\Omega = \frac{7}{6}\Omega,$$

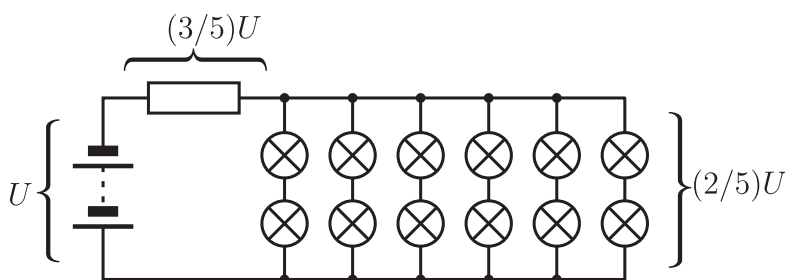
koguvool seega $I = \mathcal{E}/R_K = 6\text{ A}$. Takistitest 1 ja 5 läheb sama palju voolu läbi, mistõttu takisti 5 vool on $I_5 = \frac{1}{2}I = 3\text{ A}$ ja pingelang sellel takistil on 3 V. Seega on punktide A ja P vahel pinge 4 V ja vool läbi takisti 4 on $I_4 = \frac{4\text{ V}}{1\Omega} = 4\text{ A}$. Ampermeetri näit on seega $I_4 - I_5 = 1\text{ A}$.

Pinge M ja V vahel on patarei pingest väiksem takisti 3 pinge võrra. Kuna punktide A ja P vahel oli pinge 4 V, siis arvestades, et takistid 2 ja 3 on samasugused ning jadamisi ühendatud, on takistil 3 pinge 2 V. See annab voltmeetri pingeks $7\text{ V} - 2\text{ V} = 5\text{ V}$.

L115 12 lampi ★★★

Autor: Valter Kiisk, piirkonnavor, 2018, G 8

a) Ilmselt tuleb takisti voolu piiramiseks ühendada järjestikku vooluallikaga (ükski teine kombinatsioon, sh takisti ärajätmine, ei võimalda kõiki 12 lampi lülitada nominaalpingele). Lambid saab põhimõtteliselt ahelasse ühendada 1-, 2-, 3-, 4-, 6- või 12-kaupa jadamisi ja seejärel rööbiti (st kõik lambid on ahelasse lülitatud ühetaoliselt). Iga kombinatsiooni korral arvutame esmalt ahela erinevate osade takistuse (ühikutes R , mis on üksiku lambi takistus) ja seejärel arvestame pinge jagunemist elementidel proportsionaalselt takistusega. Erinevate variantide kontrollimine näitab, et lambile langeb nominaalpinge näiteks juhul, kui ühendada lambid kahekaupa jadamisi ja seejärel 6 sellist ahelat rööbiti. Seega, õige skeem on selline, nagu kujutatud joonisel.



Kuni kõik lambid põlevad, langeb igale lambile pinge $U/5$, kus U on pingeallika klemmpinge. Koguvõimsus on vastavalt

$$P_1 = 12 \times \frac{U^2}{25R} = \frac{12U^2}{25R},$$

kus R on üksiku lambi takistus. Kui üks lampidest põleb läbi, siis ka sellega järjestikku ühendatud pirn lõpetab töötamise. Järele jääb vaid 5 rööbiti ühendatud ahelat ja seega lampide kogutakistus on $2R/5$. Võttes nüüd arvesse pinge jagunemist ahelas, saab pinget igal lambil olema

$$U \times \frac{2R/5}{2R/5 + R/2} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{9}U$$

ja lampide koguvõimsus vastavalt

$$P_2 = 10 \times \frac{4U^2}{81R} = \frac{40U^2}{81R}.$$

Seega koguvõimsus kasvab $P_2/P_1 = 250/243 \approx 1,029$ korda.

Märkus. Leidub veel mitu sobivat skeemi. Toome mõned neist.

- Ühendame lambid kolmekaupajadamisi ja seejärel 4 sellist ahelat rööbiti. Sel juhul osas *b*) kahaneb lampide koguvõimsus 1,080 korda.
- Ühendame lambid neljakauparööbiti ja seejärel 3 sellist plokki jadamisi takistiga. Sel juhul osas *b*) kahaneb lampide koguvõimsus 1,024 korda.

Töötavaid skeeme leidub rohkemgi.

L116 Kondensaatorid ★★★

Autor: Mihkel Rähn, piirkonnavaor, 2006, G 7

a) Vooluallikas laeb mõlemad kondensaatorid elektromotoorjõuga võrdse pingeni, seega on $q_{a1} = C_1\mathcal{E}$ ja $q_{a2} = C_2\mathcal{E}$.

b) Leiame, kui suure pingeni kondensaatorid laaduvad. Voolutugevus ahelas on

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2 + R_3 + r}.$$

Kondensaatoril C_1 on laeng $q_{b1} = C_1I(R_1 + R_2)$ ja kondensaatoril C_2 on laeng $q_{b2} = C_2IR_2$.

c) Kehtib laengu jäävus, paralleelses ühenduses on pinged kondensaatoritel võrdsed. Summaarne laeng $q = q_{b1} + q_{b2}$ ning mahtuvus $C = C_1 + C_2$. Pinget kondensaatoril on $U = q/C$. Laengud kondensaatoritel on $q_{c1} = C_1U$ ja $q_{c2} = C_2U$.

L117 Kondensaatorid ★★★

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2009, G 3

Kogunegu keskmisele kondensaatorile (mahtuvusega $3C$) laeng a ning nurgas paiknevatele kondensaatoritele (mahtuvusega $3C$) laeng b . Vaatleme ülemist vasakpoolset kondensaatorit: selle negatiivsel plaadil on nüüd laeng $-q + a + b$ ning positiivsel plaadil $q + b$. Saame võrrandi:

$$-(-q + a + b) = q + b \implies q - a - b = q + b \implies b = -a/2.$$

Lisaks saame pingete võrdsusest

$$\frac{a}{3C} = \frac{q + b}{C} + \frac{b}{3C} \implies a = 3q + 4b \implies a + 2a = 3q,$$

millest $a = q$.

L118 Elektriahela energia ★★★

Autor: Eero Vaher, piirkonnavor, 2014, G 8

Kuna tegemist on jadaühendusega, on ka voolutugevus läbi takisti ning pooli 300 mA. Poolis oli seega hetkel t_0 energia

$$E_L = \frac{LI^2}{2} = 0,45 \text{ mJ}.$$

Summaarne pingelang takistil ning poolil peab olema võrdne kondensaatori pingega. Antud pooli pinge suuna korral saame kondensaatori pingeks $U_C = IR + U$. Kondensaatori energia on hetkel t_0

$$E_C = \frac{CU_C^2}{2} = 0,64 \text{ mJ},$$

seega oli hetkel t_0 rohkem energiat kondensaatoril.

L119 Vooluallikad ★★★

Autor: Sandra Schumann, lõppvoor, 2016, G 7

a) Kui lüliti on suletud, siis vooluallika vool saab läbi lüliti ringi käia ja ei mõjuta midagi. Võime selle asendada juhtmega. Lisaks paneme tähele, et $5 \text{ k}\Omega$ takisti ei mõjuta kuidagi pinget $10 \text{ k}\Omega$ takisti otstel. Liikudes $10 \text{ k}\Omega$ takisti vasakult poolt vastupäeva mööda skeemi edasi, saame, et potentsiaalide erinevus (pinge) sellel takistil on

$$U = -1 \text{ V} + 3 \text{ V} - 2 \text{ V} = 0 \text{ V}.$$

Selle abil saame leida voolutugevuse läbi takisti:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{0 \text{ V}}{10 \text{ k}\Omega} = 0 \text{ mA}.$$

Pinge U on lihtsalt patarei pinge $U = 1 \text{ V}$.

b) Lüliti on avatud. Alustame seekord voolutugevusest. Me teame, et tänu konstantse voolu allikale läbib $10 \text{ k}\Omega$ takistit vool tugevusega $I = 2 \text{ mA}$. Selle abil saame leida pinge takisti otstel:

$$U_R = IR = 2 \text{ mA} \cdot 10 \text{ k}\Omega = 20 \text{ V}.$$

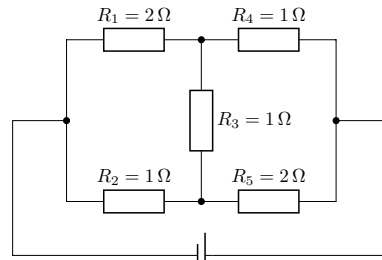
Liites takistil olevale pingele kahe patarei pinged otsa, saame märke jälgides leida pinge

$$U = 20 \text{ V} - 2 \text{ V} + 3 \text{ V} = 21 \text{ V}.$$

L120 Takistuste tuvastamine ★★★

Autor: Eero Vaher, lõppvoor, 2018, G 7

Elektrivoolul on võimalik ahelat läbida kolmel moel: läbi ülemise haru (takistid R_1 ja R_4), läbi keskmise haru (takistid R_2 , R_3 ja R_4) ning läbi alumise haru (takistid R_2 ja R_5). Pingelang igal takistil on võrdne selle takistuse ning seda läbiva voolutugevuse korrutisega ning pingelangude summa kõigil kolmel teekonnal peab olema võrdne pingega vooluallikal. Niisiis $I_1 R_1 + I_4 R_4 = I_2 R_2 + I_3 R_3 + I_4 R_4 = I_2 R_2 + I_5 R_5 = U_0$. Neist võrranditest saab tuletada avaldised $I_1 R_1 = I_2 R_2 + I_3 R_3$ ning $I_3 R_3 + I_4 R_4 = I_5 R_5$, mis kirjeldavad pingelange skeemi vasakul ning paremal poolel. Lisaks saame panna kirja võrrandid voolutugevuste jaoks: $I_1 = I_0 - I_2$, $I_4 = I_1 + I_3$ ning $I_5 = I_2 - I_3$.



Paneme tähele, et kui $R_1 = R_2$ ja $R_4 = R_5$, siis sümmeetriakaalutlustel peaks kehtima $R_3 = 0$.

On ilmne, et $R_3 = 1 \Omega$. Oletame esmalt, et $R_1 = R_4 = R_3$. Sellisel juhul avaldub pingelang ülemises harus kujul $(2I_1 + I_3)R_3 = U_0$, millest järeldub $I_1 = 6 \text{ A}$ ning $I_2 = 4 \text{ A}$. Vaadeldes voolu teekonda läbi keskmise haru, saame kirjutada $I_2 R_2 + U_3 + (I_1 + I_3)R_3 = U_0$, millest saab järeldada $R_2 = R_5 = 1 \Omega$. Selline skeem rahuldab eespool mainitud sümmeetriat, seega tehtud eeldus pole tõene.

Oletame nüüd, et $R_2 = R_5 = R_3$. Skeemi alumise haru jaoks saame kirjutada $(2I_2 - I_3)R_3 = U_0$ ehk $I_2 = 8 \text{ A}$ ning $I_1 = 2 \text{ A}$. Pingelangud skeemi vasakus pooles peavad rahuldama võrrandit $I_1 R_1 = (I_2 + I_3)R_3$, millest järeldub $R_1 = 5 \Omega$. Sellisel juhul on aga pingelang skeemi ülemisel harul $(2I_1 + I_3)R_1 = 30 \text{ V} \neq U_0$.

Oletame nüüd, et $R_1 = R_5 = R_3$. Pingelang skeemi keskmisel harul on $I_2 R_2 + U_3 + (I_0 - I_2 + I_3)R_2 = U_3 + (I_0 + I_3)R_2 = U_0$ ehk $R_2 = R_4 = 1 \Omega$. Tegemist on juba vaadeldud juhuga.

Ainus järelejäänud võimalus on $R_2 = R_4 = R_3$. Skeemi vasakust poolest saame $(I_0 - I_2)R_1 = I_2 R_3 + U_3$, paremast $(I_2 - I_3)R_1 = U_3 + (I_0 - I_2 + I_3)R_3$. Nende põhjal $(I_0 - I_3)R_1 = 2U_3 + (I_0 + I_3)R_3$ ehk $R_1 = 2 \Omega$. On lihtne veenduda, et leitud väärtused rahuldavad kõiki võrrandeid pingelangude jaoks.

L121 Aku laadimine ★★★★★

Autor: Valter Kiisk, piirkonnavor, 2008, G 8

Olgu aku klemmide pinge U ning voolutugevus I . Voolutugevus takistis R_2 on seega U/R_2 ja voolutugevus takistis R_1 avaldub kui $U/R_2 + I$. Teise Kirchhoffi seaduse kohaselt

$$U + \left(\frac{U}{R_2} + I \right) R_1 = U_0 \Rightarrow UR_1 - (U_0 - U) R_2 + IR_1 R_2 = 0,$$

kus $U_0 = 6 \text{ V}$. Laadimisgraafikult leiame, et maksimaalne vool $I = 0,1 \text{ A}$ vastab pingele $U = 1,2 \text{ V}$, kui aga $U = 1,5 \text{ V}$ siis peab olema $I = 0$. Seega R_1 ja R_2 määramiseks saame võrrandisüsteemi

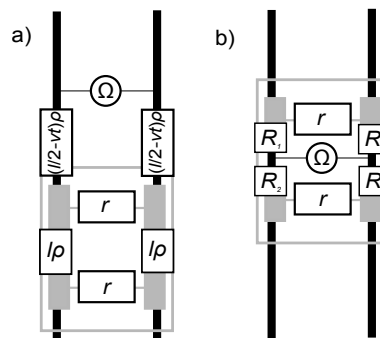
$$1,2R_1 - 4,8R_2 + 0,1R_1R_2 = 0, \quad 1,5R_1 - 4,5R_2 = 0.$$

Selle lahend on $R_1 = 12 \Omega$, $R_2 = 4 \Omega$.

L122 Raudtee ★★★★★

Autor: Mihkel Pajusalu, piirkonnavor, 2012, G 8

Ülesandes peab käsitlema kahte juhtu: a) kui mõõtepunkt ei asu vaguni rataste vahel ja b) kui mõõtepunkt asub vaguni rataste vahel. On ka näha, et ülesanne on sümmeetriline mõõtepunkti suhtes, st takistuse käitumine enne seda, kui vaguni keskpunkt möödub mõõtepunkti ja pärast seda, on üksteise peegelpildid. Vaatleme alguses juhtu a). On näha, et sellel juhul on vagunil fikseeritud takistus, millele liitub vaguni ja mõõtepunkti vahele jäävate rööbastekistis.

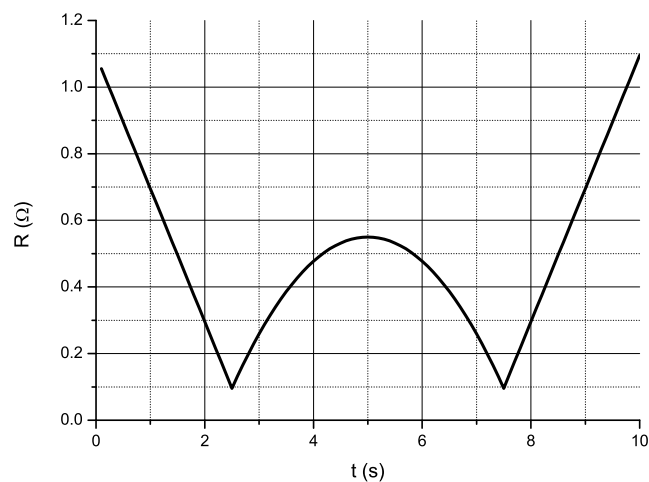


$$R = 2(l/2 - vt)\rho + \frac{1}{\frac{1}{r} + \frac{1}{r+2l\rho}}.$$

Seejärel vaatleme juhtu b). Sellel juhul moodustub takistus kahest rööpühenduses olevast osast, mille takistus muutub vaguni liikumise käigus. $R_1 = (l - vt')\rho$ ja $R_2 = vt'\rho$, kus $t' = t - s/v$ on aeg, mis on möödunud hetkest, kui esimene rattapaar möödus mõõtepunkti. Seega saab takistuse käitumise leida valemist:

$$R = \frac{1}{\frac{1}{r+2R_1} + \frac{1}{r+2R_2}} = \frac{1}{\frac{1}{r+2(l-vt')\rho} + \frac{1}{r+2vt'\rho}}.$$

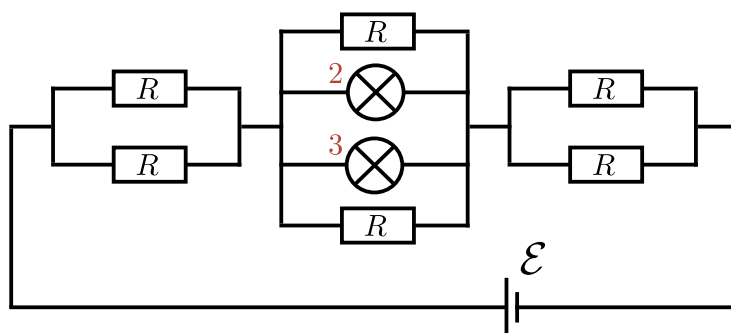
Tulemuseks on graafik:



L123 Lambid ★★☆☆

Autor: Mihkel Kree, lahtine, 2013, G 9

Paneme tähele, et skeemi sümmeetria tõttu ei läbi vool lampi 1, sest selle otstel on võrdsed potentsiaalid. Sama kehtib lampi 4 kohta. Joonistame skeemi ümber, ühendades lampi 1 otspunktid omavahel kokku, sama teeme ka lampi 4 otspunktidega. Saame võrdlemisi lihtsa skeemi, mis koosneb kolmest jadamisi ühendatud paralleelühendusest, nagu joonisel näidatud.



Arvutame ahela kogutakistuse

$$R_t = \frac{R}{2} + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} + \frac{1}{R}} + \frac{R}{2} = \frac{4}{3}R,$$

kus arvestasime, et $r = 2R$, kusjuures keskmise paralleelühenduse takistuseks tuli $R_k = R/3$, mis moodustab $1/4$ osa kogutakistusest, seega langeb keskmisele osale

ka $1/4$ osa patarei pingest ehk $V_k = \mathcal{E}/4 = 5/4 \text{ V}$. Nüüd on juba lihtne avaldada lampides 2 ja 3 eralduv võimsus

$$P_2 = P_3 = \frac{V_k^2}{r} = \frac{25}{16 \cdot 20} \text{ W} \approx 0,08 \text{ W}.$$

Lampides 1 ja 4 mõistagi võimsust ei eraldu.

L124 Jõulukaunistus ★★★★★

Autor: Valter Kiisk, lõppvoor, 2010, G 8

Maksimaalne pinge, milleni kondensaator laadub, võrdub võrgupinge amplituudväärtusega 311 V . Sellest takistile langeb pinge $311 \text{ V} - 50 \times 3 \text{ V} = 161 \text{ V}$. Seega takistuse väärtus peab olema $161 \text{ V}/20 \text{ mA} \approx 8 \text{ k}\Omega$ ja sellel eraldub võimsus $161 \text{ V} \times 20 \text{ mA} \approx 3,2 \text{ W}$. Peale pinge amplituudväärtuse saavutamist peab kondensaator olema suuteline vahelduvvoolu ühe perioodi (20 ms) jooksul valgusdiiodide ahelat toitma nii, et pingelang takistil (ja seega ka kondensaatoril endal) kukub mitte rohkem kui $0,05 \times 161 \text{ V} = 8 \text{ V}$ võrra. Samas kondensaatorilt võetakse sama aja jooksul elektrilaeng $20 \text{ mA} \times 20 \text{ ms} = 0,0004 \text{ C}$. Seega nõutav mahtuvus on $0,0004 \text{ C}/8 \text{ V} = 50 \mu\text{F}$.

L125 Diodid ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2012, G 8

Esimesele diodile (D_1) ei saa langeda üle ühe voldi, mistõttu järgnevatele (D_2 ja D_3) peab langema alla ühe voldi (takisti võtab ka endale teatud pinge). Seetõttu on ülejäänud diodid suletud, st nullvooluga ning need võib skeemilt "välja lõigata". Selle tulemusel moodustub esimese diodi taha jada- ja rööpühenduste kombinatsioon kogutakistusega $4 \text{ k}\Omega$, millele langeb diodipinge 1 V ning mida läbib vool $1 \text{ V}/4 \text{ k}\Omega = 0,25 \text{ mA}$. Esimesele kahe kilo-oomisele takistile langeb pinge $3 \text{ V} - 1 \text{ V} = 2 \text{ V}$, mistõttu selle vool on $2 \text{ V}/2 \text{ k}\Omega = 1 \text{ mA}$. Järelikult on esimese diodi vool $1 \text{ mA} - 0,25 \text{ mA} = 0,75 \text{ mA}$ ning võimsus $0,75 \text{ mA} \cdot 1 \text{ V} = 0,75 \text{ mW}$. Suletud diodidel võimsust loomulikult ei eraldu.

L126 Oktaeder ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2016, G 8

Et ampermeetrise sisetakistus on 0, võime need lühistada: kõigis nendes tippudes, kuhu viivad ampermeetrid, on potentsiaalid võrdsed. Sümmeetria tõttu peab see potentsiaal jääma täpselt patareiklemmide potentsiaalide vahepeale, seega on igale takistile rakendatud pinge 3 V . Niisiis on 1-oomistes takistites vool 3 A ja 2-oomistes $1,5 \text{ A}$. Sümmeetria tõttu jaguneb see voolude vahe igas tipus võrdselt kahe naaber-ampermeetri vahel, st kõikide ampermeetrise näidud on $0,75 \text{ A}$.

L127 Kondensaator ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2018, G 9

Teises staadiumis eralduv soojus on võrdne kondensaatori energiaga lüliti avamise hetkel, $Q_2 = q_C^2/2C$, kus q_C on kondensaatori laeng sel hetkel. Kogu vabanev soojusenergia on võrdne patarei kogutööga

$$A = (q_C + q_R)\mathcal{E} = Q_1 + Q_2,$$

kus q_R on otsitav lampi läbiv laeng. Seega

$$q_R = \frac{Q_1 + Q_2}{\mathcal{E}} - \sqrt{2CQ_2}.$$

L128 Närvirakk ★★★★★

Autor: Andres Laan, lõppvoor, 2011, G 9

Kuna laengud saavad voolata üle membraani kolme eri teed mööda ja kondensaatorile kogunev laeng põhjustab kõigile kolmele teele ühiselt mõjuva elektrostaatilise pinge U , siis on meil närviraku mudeldamiseks sobiv skeem, kus meil on rööbiti kolm vooluteed: kondensaatori voolutee, kaaliumi voolutee ja naatriumi voolutee. Kui saabub tasakaal, ei lähe voolu läbi kondensaatori. Selleks peab kaaliumi ja naatriumi voolu summa olema elektriliselt neutraalne. Kaaliumi vool on $(\mathcal{E}_K - U)/R_K$. Naatriumi vool on $(\mathcal{E}_{Na} - U)/R_{Na}$. Võrrutades nende voolude summa nulliga saame pinge avaldiseks

$$U = \frac{R_K \mathcal{E}_{Na} + R_{Na} \mathcal{E}_K}{R_{Na} + R_K}.$$

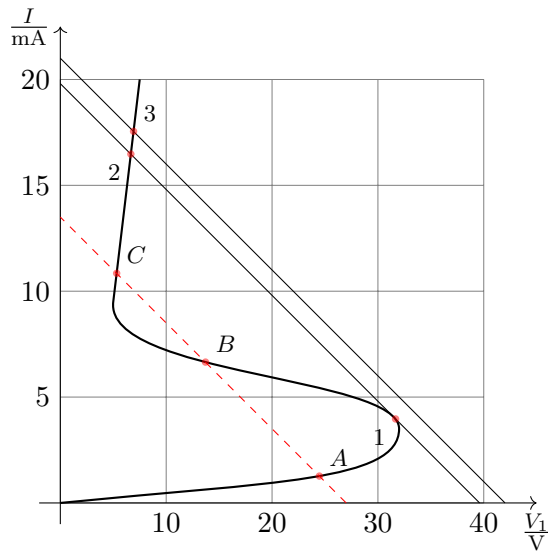
Membraani kogulaeng on siis

$$q = CU = C \frac{R_K \mathcal{E}_{Na} + R_{Na} \mathcal{E}_K}{R_{Na} + R_K}.$$

L129 Türistor ★★★★★

Autor: Jaan Toots, lõppvoor, 2015, G 10

Kirchhoffi esimese seaduse põhjal peab suvalise pinge ja voolutugevuse korral kehtima $V_1 = U - IR$, kus V_1 on pinge türistoril T_1 . Füüsikaliselt reaalsed on sellised olukorrad, kus V_1 ja I on türistori volt-amperkarakteristiku poolt lubatud. Üldjuhul on mingi pinge U korral kuni kolm lahendit (punane sirge graafikul); punkt B ei ole stabiilne, kuna vastaks negatiivsele takistusele, ning punktid A ja C on lubatud, kuid vastavad erinevatele režiimidele, mis sõltuvad sellest, kuidas punkti ni jõutud on. Ülaltoodu põhjal on võimalik skitseerida voolutugevuse graafik. Alguses suureneb voolutugevus ligikaudu lineaarselt, sest türistor käitub sarnaselt lineaarsele takistile takistusega $r_1 = 20 \text{ k}\Omega$, mistõttu on voolutugevuse graafiku algne tõus $\frac{1}{R+r_1} = \frac{1}{22 \text{ k}\Omega}$. Punkti 1 (pinge 39,6 V, voolutugevus 4,1 mA) läheduses hakkab voolutugevus kiiresti kasvama ning hüppab punkti 2 (pinge 39,6 V, voolutugevus 16,5 mA). Edasi käitub türistor taas lineaarselt takistusega $r_2 = 0,24 \text{ k}\Omega$



kuni lõpp-punktini 3 (pinge 42 V, voolutugevus 17,5 mA). Voolutugevuse I_a saab täpsemalt leida, kasutades Kirchhoffi seaduseid ja türistori takistust lineaarselt lähendades. Siis saame $I_a = 17,54$ mA.

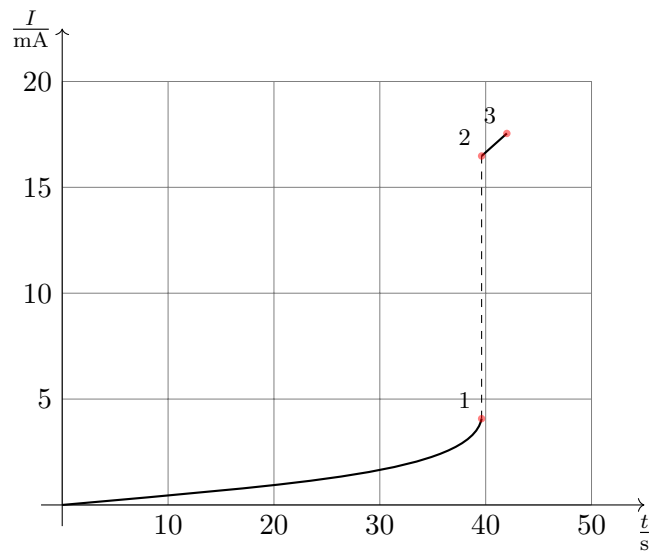
Pärast lüliti sulgemist lahendame vooluringi lähtuvalt Kirchhoffi seadustest. $U = IR + V_1 = IR + V_2$, $I = I_1 + I_2$, kus $I_1^0 = -11,5$ mA on türistori volt-amperkarakteristiku teise lineaarse osa algordinaat. Lahendamiseks eeldame, et T_2 on lineaarses režiimis enne hüpet (sarnaselt punktile A) ning T_1 pärast hüpet (sarnaselt punktile C). Saame $I_1 = I_1^0 + \frac{V_1}{r_2}$ ja $I_2 = V_2/r_1$. Lahendades saame türistoride pingeteks $V_1 = V_2$, voolutugevuseks läbi takisti $I = I_1^0 + V_1/r_1 + V_1/r_2$, pingeks vooluallikal

$$U = I_1^0 R + V_1 R/r_2 + V_1 R/r_1 + V_1$$

ning pingeteks türistoridel

$$V_1 = V_2 = \frac{U - I_1^0 R}{R/r_1 + R/r_2 + 1} = 6,84 \text{ V.}$$

Seega $I_1 = 17,2$ mA ja $I_2 = 0,34$ mA, mis õigustab tehtud eelduseid.



L130 Kondensaator ★

Autor: Madis Ollikainen, lahtine, 2012, G 3

Kuulikesele mõjub nii raskusjõud mg kui ka elektrostaatiline jõud $QE = QU/d$. Nendest leiame kiirenduse a :

$$F = QE - mg \Rightarrow a = \frac{F}{m} = \frac{U Q}{d m} - g.$$

Konstantse kiirendusega liikudes on plaatidevahelise kauguse ja selle läbimiseks kuluva aja seos $d = \frac{at^2}{2}$. Niisiis

$$d = \frac{\left(\frac{U Q}{d m} - g\right) t^2}{2} \Rightarrow \frac{2d}{t^2} = \frac{U Q}{d m} - g.$$

Siit saame massi ja laengu suhteks

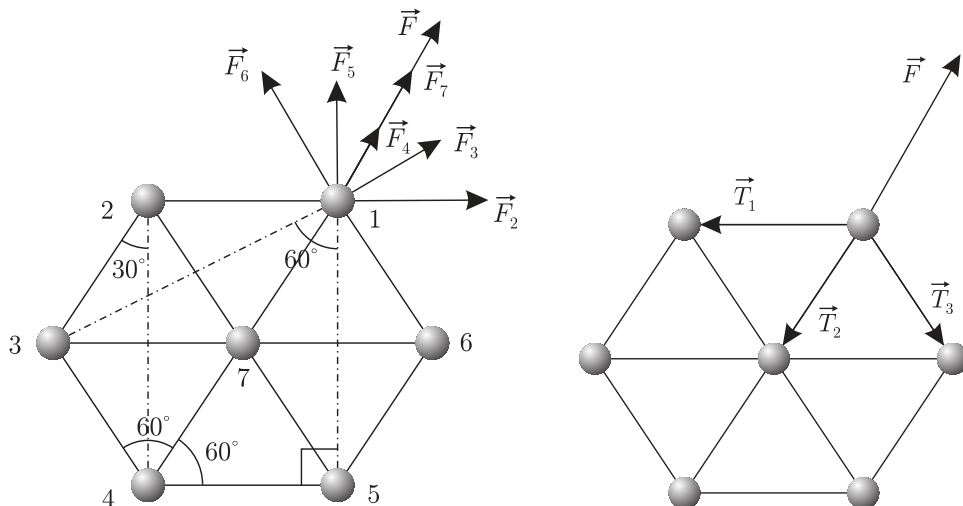
$$\frac{m}{Q} = \frac{t^2 U}{(2d + gt^2) d}.$$

L131 Juhe ★★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2005, G 5

Valime mõttelise ühikulise pikkusega silindrilise kontuuri, mille raadius on r . Selle pindala on $S = 2\pi r$, sellest voolab läbi vool i . Voolutihedus tuleb seega

$$j = \frac{i}{2\pi r}.$$



Kõigepealt teeme kaks olulist tähelepanekut, lähtudes sümmeetria kaalutlustest:

- 1) Keskmise kuul jääb paigale.
- 2) Kõik 6 kuuli servades on samaväärsed, neile mõjuvate jõudude suurused on samad, kuid jõudude suunad on erinevad — nad langevad kokku sirgetega, mis ühendavad vastava kuulikesega keskmise kuulikesega, ning, kuna laengud on samamärgilised, on suunatud keskmisest kuulikesest eemale.

Märgime joonisel ühele äärmisele kuulikesele mõjuvad jõud (vt joonist). Leiame jõudude väärtused. Jõud F_2 , F_6 ja F_7 mõjuvad kuulikesele 1, vastavalt, kuulikeste 2, 6 ja 7 poolt:

$$F_2 = F_6 = F_7 = \frac{kq^2}{l^2}.$$

Jõud F_4 mõjub kuulikesele 1 kuulikesest 4 poolt:

$$F_4 = \frac{kq^2}{(2l)^2} = \frac{kq^2}{4l^2}.$$

Jõud F_3 ja F_5 mõjuvad kuulikesele 1, vastavalt, kuulikeste 3 ja 5 poolt:

$$F_3 = F_5 = \frac{kq^2}{(2l \sin 30^\circ)^2} = \frac{kq^2}{(2l \cdot \sqrt{3}/2)^2} = \frac{kq^2}{3l^2}.$$

Summaarse jõu leiame projitseerides jõud radiaalsele teljele:

$$\begin{aligned} F &= F_7 + F_4 + 2F_2 \cos 60^\circ + 2F_3 \cos 30^\circ \\ &= \frac{kq^2}{l^2} + \frac{kq^2}{4l^2} + 2 \cdot 0,5 \cdot \frac{kq^2}{l^2} + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{kq^2}{3l^2} = \frac{kq^2}{l^2} \left(1 + \frac{1}{4} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \\ &= \frac{kq^2}{l^2} \left(\frac{27 + 4\sqrt{3}}{12} \right). \end{aligned}$$

Kuna tegu on ühesuguste niitidega, mis venisid sama palju (niitide alg- ja lõpppikkused on ühesugused), siis pinged kõigis niitides on võrdsed:

$$\vec{F} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{T}_3, \quad |\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = |\vec{T}_3|.$$

Siit:

$$F = T + 2T \cos 60^\circ = T(1 + 2 \cdot 0,5) = 2T.$$

Seega niitides on pinge

$$T = \frac{F}{2} = \frac{kq^2}{l^2} \left(\frac{27 + 4\sqrt{3}}{24} \right).$$

L133 Tolmukübe ★★

Autor: Aigar Vaigu, piirkonnavoore, 2006, G 8

Olgu plaatide pindala S , plaatide vaheline kauguse d , kondensaatori mahtuvus ja pinge vastavalt C ja U . Avaldame elektrivälja tugevuse kondensaatori plaatide vahel:

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d} \quad \text{ja} \quad C = \frac{q}{U},$$

kust

$$E = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0 S}.$$

Arvestades, et pindtihedus $\sigma = q/S$, saame

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}.$$

Tolmukübemele mõjub raskusjõud mg ja elektrostaatiline jõud Eq . Tasakaalu korral $mg = Eq$. Tolmukübeme laeng on seega

$$q = \frac{mg}{E} = mg \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\sigma} \approx 0,33 \cdot 10^{-17} \text{ C}.$$

Kui polaarsust muuta, siis mõjub tolmutübemele jõud

$$F = mg + Eq = 2mg.$$

Kiirendus, millega tolmutübeme hakkab langema on $a = 2g$.

L134 Kuulikesed ★★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2007, G 7

Energia jäävuse seaduse kohaselt

$$mgH + \frac{mv^2}{2} + \frac{kq^2}{H} = mgh + \frac{kq^2}{h},$$

kus peale gravitatsioonilise potentsiaalse energia arvestasime ka elektrilise potentsiaaliga. Niisiis

$$h - \frac{v^2}{2g} - H - \frac{kq^2}{mgH} + \frac{kq^2}{mgh} = 0,$$

$$h^2 - \left(\frac{v^2}{2g} + \frac{kq^2}{mgH} + H \right) h + \frac{kq^2}{mg} = 0.$$

Lahendades saadud ruutvõrrandi, saame

$$h = \frac{1}{2} \left(\frac{v^2}{2g} + \frac{kq^2}{mgH} + H \right) - \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{v^2}{2g} + \frac{kq^2}{mgH} + H \right)^2 - \frac{kq^2}{mg}}.$$

Lahend “+”-märgiga ruutjuure ees oleks kaugusest H suurem ja vastaks maksimaalsele kõrgusele, mille saavutaks kuulike, kui ta saaks samasuguse kuid ülespoole suunatud algkiiruse.**L135 Laetud rõngas ★★**

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2009, G 4

Punktis, mis asub rõnga teljel kaugusel d rõnga keskpunktist on rõnga poolt tekitatud välja potentsiaal

$$\phi_1 = k \frac{Q}{\sqrt{R^2 + d^2}} = k \frac{Q}{2R}.$$

Rõnga keskpunktis on rõnga poolt tekitatud välja potentsiaal

$$\phi_2 = k \frac{Q}{R}.$$

Et elektron saaks rõngast läbi lennata, peab tema kineetiline energia olema piisav potentsiaalide vahe $U = \phi_2 - \phi_1$ läbimiseks. Piirjuhul saame

$$\frac{mv^2}{2} = e \left(k \frac{Q}{R} - k \frac{Q}{2R} \right) = k \frac{eQ}{2R}.$$

Siit

$$v_{\min} = \sqrt{k \frac{eQ}{mR}}.$$

L136 Ioonmootor ★★

Autor: Mihkel Pajusalu, lahtine, 2010, G 6

Ioonide kiiruse leiame energia jäävuse seadusest:

$$mu^2/2 = Ue \Rightarrow u = \sqrt{2Ue/m},$$

kus $m = \mu/N_a$. Impulsi jäävuse seadusest süsteemi "laev+kiirendatud kütus" jaoks saame (eeldusel, et $M \gg m_k$)

$$m_k u = Mv \Rightarrow m_k = Mv/u = Mv\sqrt{\mu/2N_A Ue} = 2,61 \text{ kg}.$$

Näeme, et tehtud eeldus $m_k \ll M$ tõepoolest kehtib.**L137 Elektron ★★**

Autor: Mihkel Kree, lahtine, 2017, G 3

Elektriväljas liikuvale elektronile mõjub allapoole suunatud vertikaalne jõud qE , millele vastab elektroni kiirendus $a = qE/m$. Seega võime elektroni liikumist analüüsida analoogiliselt õhku visatud kivi liikumisega: a) elektron liigub mööda paraboolset trajektoori; b) elektroni kiiruse horisontaalkomponent v_0 ei muutu; c) elektroni kiiruse vertikaalkomponent kasvab ajas kujul $v_y = at$; d) elektroni horisontaalne nihe kasvab ajas kujul $x = v_0 t$; e) elektroni vertikaalne nihe kasvab ajas kujul $y = at^2/2$.

Elektroni kiirus plaatide vahelisest ruumist väljumisel on minimaalne siis, kui elektroni trajektoor möödub alumise plaadi parema otsa lähedalt. Sellest väiksema kiiruse korral lendaks elektron vastu alumist plaati ning ei pääseks seetõttu plaatide vahelisest ruumist välja.

Olgu elektroni algkiirus v_0 . Elektronil kulub plaatide vahelise ruumi läbimiseks aeg $t = l/v_0$, mille jooksul peab vertikaalne nihe olema võrdne plaatide vahelise kaugusega $d = at^2/2$. Siit saame avaldada elektroni plaatide vahel liikumise aja $t = \sqrt{2d/a}$, elektroni vertikaalse kiiruse plaatide vahelisest ruumist väljumisel $v_y = at = \sqrt{2ad}$ ning elektroni minimaalse vajaliku algkiiruse $v_0 = l/t = \sqrt{al^2/2d}$. Nüüd saame avaldada otsitava minimaalse lõppkiiruse mooduli:

$$v_{\min} = \sqrt{v_y^2 + v_0^2} = \sqrt{2ad + \frac{al^2}{2d}} = \sqrt{\frac{qE(4d^2 + l^2)}{2md}}.$$

L138 Lendav elektronkahur ★★★

Autor: Siim Ainsaar, lõppvoor, 2006, G 6

Olgu elektroni laengu absoluutväärtus e ja mass m_e . Ajaga t lahkub katoodilt hulk elektrone kogulaengu absoluutväärtusega $q = It$. Elektronide arv, mis selle ajaga lendu läheb, on siis $N = \frac{q}{e} = \frac{It}{e}$ ja mass $m = Nm_e = \frac{Itm_e}{e}$. Leiame ka, kui kiiresti need elektronid liiguvad. Üks elektron saab elektronkahuris kineetilise energia $E = Ue$. Samas $E = \frac{m_e v^2}{2}$, seega

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m_e}} = \sqrt{\frac{2Ue}{m_e}}.$$

Ajaga t lendu läinud elektronide koguimpulss

$$p = mv = \frac{Itm_e}{e} \sqrt{\frac{2Ue}{m_e}} = It \sqrt{2U \frac{m_e}{e}}.$$

Et elektronkahur muudab aja t jooksul elektronide impulssi p võrra, siis mõjub temale keskmiselt jõud

$$F = \frac{p}{t} = I \sqrt{2U \frac{m_e}{e}} = I \sqrt{\frac{2U}{k}}.$$

Tõstmaks masinat õhku, peab see F ületama masinale (koos Tatikaga) mõjuva raskusjõu $m_T g$, st $F \geq m_T g$ ehk

$$I \sqrt{U} \geq m_T g \sqrt{\frac{k}{2}} \approx 4,3 \cdot 10^8 \text{ A} \sqrt{V}.$$

Ilmselt peavad I ja U olema ebarealistlikult suured, sest televiisori puhul

$$I \sqrt{U} \approx 0,017 \text{ A} \sqrt{V}.$$

Seega pole Tatikal lootustki sellise masinaga lennata.

Märkus. Erirelatiivsusteooriat arvestades sama arutluskäiku läbi tehes saaksime, et täpsem valem on

$$F = I \sqrt{\frac{2U}{k} + \frac{U^2}{c^2}},$$

kus $c \approx 3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ on valguse kiirus vaakumis. Seega võime relativistlikud efektid arvestamata jätta vaid siis, kui

$$\frac{U^2}{c^2} \ll \frac{2U}{k}$$

ehk

$$U \ll \frac{2c^2}{k} \approx 1,0 \cdot 10^6 \text{ V}.$$

Arvestades vajalikku $I \sqrt{U}$ suurusjärku, peab Tatikas niisiis kardetavasti ka relatiivsusteooriat uurima... Lendu tõusta ei suudaks ta aga sellegipoolest.

L139 Elektronikiir ★★★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2008, G 7

Olgu v_0 elektronide algkiirus plaatide vahele sattumisel. Aeg, mille jooksul üks elektron viibib plaatide vahel, on $t = \frac{b}{v_0}$.

Plaatide vahel on elektrivälja tugevusega $E = \frac{U}{d}$. Newtoni II seadusest $eE = ma$ leiame, et elektron liigub plaatide vahel kiirendusega $a = \frac{eU}{md}$. Läbides plaatide vahelise tee, kalduvad elektronid vahemaa s_0 esialgselt trajektooriga kõrvale, kus

$$s_0 = \frac{at^2}{2} = \frac{Ueb^2}{2dmv_0^2}.$$

Elektronide liikumise kiirus v plaatide vahelisest ruumist väljudes koosneb kahest komponendist:

– paralleelsest ekraaniga $v_y = at = \frac{eUb}{mdv_0}$,

– risti ekraaniga $v_x = v_0$.

Seega veedavad elektronid plaatidest ekraanini aja $t' = \frac{l}{v_x} = \frac{l}{v_0}$. Selle aja jooksul lisandub täiendav ekraaniga paralleelne nihe

$$s' = v_y t' = \frac{eUbl}{mdv_0^2}.$$

Kogu nihe on niisiis

$$s = s_0 + s' = \frac{eUb}{mdv_0^2} \left(\frac{b}{2} + l \right).$$

Seega

$$v_0 = \sqrt{\frac{eUb}{m} \left(\frac{b}{2} + l \right)} \approx 1,58 \cdot 10^7 \text{ m/s}.$$

Sooritame kontrolli, kas elektroni nihe plaatide vahel on väiksem, kui plaatide vaheline kaugus:

$$s_0 = \frac{Ueb^2}{2dmv_0^2} = \frac{bs}{2l+b} = 3,5 \text{ mm} < d.$$

L140 Kuup ★★★

Autor: Jaan Kalda, piirkonnavaor, 2008, G 7

Kui auku ei oleks, oleks väljatugevus sümmeetria tõttu 0. Antud olukord on ekvivalente auguta kuubi ja negatiivse pindlaenguga $b \times b$ ruudu superpositsiooniga. Negatiivne ruut moodustab laengu $q = -\sigma b^2$ ning tekitab kuubi keskel väljatugevuse

$$E = \frac{\sigma b^2}{4\pi\epsilon_0 \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sigma b^2}{\pi\epsilon_0 a^2}.$$

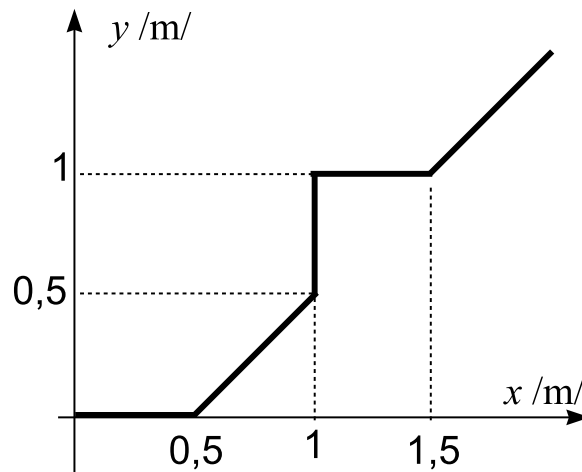
L141 Liikuv laeng ★★★

Autor: Jaan Kalda, piirkonnavor, 2009, G 6

Esimene impulss annab alguses laengule x -suunalise impulsi $mv_x = qE_x\tau$, millest

$$v_x = \frac{q}{m}E_x\tau = 1 \text{ m/s.}$$

Ajavahemiku $t_1 = T/4$ jooksul kuni järgmise impulsi jõuab osake liikuda sirgjooneliselt piki x -telge kaugusele $s_x = v_x T/4 = 0,5 \text{ m}$. Seejärel saab ta impulsi y -telje sihis, mistõttu omandab ka kiiruse y -komponent samasuguse väärtuse: $v_y = v_x = 1 \text{ m/s}$ mistõttu ta liigub 45-kraadise nurga all, sooritades kuni järgmise impulsi nii x - kui y -telje sihis nihke $s_x = s_y = 0,5 \text{ m}$. Järgmine impulss peatab x -telje sihilise (kuid muutmata y -sihilist) liikumise, nii et osake nihkub nüüd piki y -telge kaugusele $s_y = 0,5 \text{ m}$. Järgmine impulss peatab ka x -suunalise liikumise, nii et osake jääb paigale. Edasi kordub protsess otsast peale. Eelpooltoodud tulemuste põhjal saame juuresoleva trajektoori.



Keskmise kiiruse leiame perioodi jooksul sooritatud nihke $s = \sqrt{1+1} \text{ m}$ perioodi $T = 2 \text{ s}$ suhtena, $v \approx 0,7 \text{ m/s}$.

L142 Sfäärid ★★★

Autor: Kristian Kuppart, lahtine, 2011, G 8

Et sfäärid on traadiga ühendatud, siis nad omandavad sama potentsiaali. Olgu ühe laeng Q_1 ja teise laeng Q_2 ; sellisel juhul $kQ_1/R_1 = kQ_2/R_2$. Jagades selle võrduse vasaku ja parema poole läbi R_1R_2 -ga ja tähistades $E_1 = kQ_1/R_1^2$ ning $E_2 = kQ_2/R_2^2$, saame $E_1/R_2 = E_2/R_1$, millest $E_1/E_2 = R_2/R_1$.

L143 Laengud ★★★

Autor: Mihkel Kree, piirkonnavor, 2017, G 9

Olgu keskmise kera nihe y . Keskmise kera kaugus kummastki äärmisest kerast on nüüd $l = \sqrt{d^2 + y^2}$. Kumbki äärmine kera mõjutab keskmist kera jõuga $F = \frac{kqQ}{l^2}$, mille vertikaalkomponent on $F_y = -\frac{y}{l}F$. Kokku mõjub keskmisele kerale vertikaaljõud $2F_y$, millest saame seose keskmise kera kiirenduse jaoks $ma = 2F_y$. Et $y \ll d$, siis $l \approx d$, millest saame lihtsustada liikumisvõrrandi kujule

$$a = -\frac{2kQq}{md^3}y.$$

See võrrand kirjeldab harmoonilist võnkumist perioodiga

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{md^3}{2kQq}}.$$

Märkus. perioodi ja sageduse valem on võimalik leida analoogiast vedru võnkumisega, kus $ma = -kx$ ja $T = 2\pi\sqrt{m/k}$.

L144 Kondensaatorid ★★★

Autor: Oleg Košik, lõppvoor, 2005, G 8

Tegu on kondensaatorite jadaühendusega, mille tõttu laeng mõlemal kondensaatoril peab olema ühesugune. Kondensaatorite kogumahtuvuse leiame valemist

$$\frac{1}{C_0} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow C_0 = 1,2C.$$

Seega laeng on $q = 1,2CU$. Pinge kondensaatoril mahtuvusega $2C$ on seega $U_1 = q/C_1 = 0,6U$ ning kondensaatoril mahtuvusega $3C$ vastavalt $U_2 = 0,4U$. Eeldame, et elektrivälja on vaid kondensaatorite sees. Elektrivälja tugevus neis on nüüd vastavalt

$$E_1 = -\frac{U_1}{2d} = \frac{-0,3U}{d} \quad \text{ja} \quad E_2 = \frac{U_2}{d} = \frac{0,4U}{d}.$$

Kuna elektriväljad peavad olema suunatud vastupidistes suundades, siis ühe elektrivälja tugevuse võtsime negatiivseks. Määrame nüüd horisontaalsuunalise kiirenduse seosest $Eq = ma$. Esimese kondensaatori puhul on see

$$a_2 = \frac{E_2q}{m} = \frac{0,4Uq}{md}.$$

Vertikaalsuunaline kiirus on kogu aeg sama, selle tõttu aeg, mille jooksul asub osake mõlema kondensaatori elektrivälja mõjusfääris, on $t = l/v$. Selle aja jooksul muutub horisontaalsuunaline kiirus at võrra. Seega teisest kondensaatorist väljumise hetkel on osakese kiirus

$$v_h = ta_1 + ta_2 = t(a_1 + a_2) = \frac{0,1Uql}{mdv}.$$

Trajektoori kaldenurga tangens on järelikult

$$\tan \alpha = \frac{v_h}{v} = \frac{0,1Uql}{mdv^2}.$$

L145 Kärbes ★★★★★

Autor: Stanislav Zavjalov, lahtine, 2010, G 7

Valime potentsiaali nullnivooks kärbe asümptootilise asukoha (lõpmatuses). Olgu laeng Q koordinaatide alguspunktiks ning olgu x -telg horisontaalne ja y -telg vertikaalne. Kärbes peab püsima laengu lähedal kõverduval null-potentsiaalil. Potentsiaal avaldub homogeense välja E potentsiaali ja punktlaengu potentsiaali superpositsioonina, seega

$$E(d - y) - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\sqrt{y^2 + x^2}} = 0.$$

Ülesande sümmeetriast on selge, kärbe vahemaa on minimaalne $x = 0$ korral, ehk teisisõnu kehtib $E(d - y) = kQ/y$. Antud võrrandist saame ruutvõrrandi lahenditega

$$y_{1,2} = \frac{d}{2} \pm \sqrt{\frac{d^2}{4} - \frac{kQ}{E}} = \frac{d}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - 4kQ/Ed^2} \right).$$

Juhul kui laeng on väike, liigub kärbes ilmselgelt sirgjooneliselt. Ometigi leidub kaks lahendit. Lahendi kahesus tuleneb sellest, et laengu läheduses leidub samuti null-potentsiaaliga suletud kõver. Laengu kasvades need kaks null-potentsiaaliga joont lähenevad üksteisele, kuni $Q = \pi\epsilon_0 Ed^2$ juures puutuvad kokku ja edaspidi moodustub null-potentsiaalid juba üksainus kõver, mis kulgeb ümber laengu. Seega vastab kärbe trajektor ruutvõrrandi suuremale lahendile:

$$y = \frac{d}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4kQ}{Ed^2}} \right).$$

L146 Pendel ★★★★★

Autor: Jonatan Kalmus, lõppvoor, 2018, G 6

Kuna liikumine toimub vaid vertikaalsihis, võtame x -teljeks vertikaalsihi suunaga alla. Algsest jõudude tasakaalust saame

$$Mg = kx_0,$$

kust kuuli algkõrgus on $x_0 = \frac{Mg}{k}$. Teame, et vedru otsa asetatud kuuli pool võnkeperioodi on

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{M}{k}}.$$

On selge, et see ei sõltu gravitatsioonivälja tugevusest. Kuna nii gravitatsioonivälja kui ka elektrivälja poolt tekitatud jõud käituvad analoogselt, võime järeldada, et võnkeperiood ei sõltu ka elektrivälja tugevusest ning jääb konstantseks. Seega muudab elektrivälja jõud vaid kuuli tasakaaluasendit iga kord, kui kuul muudab oma liikumissuunda (sest ülesandes on öeldud, et elektrivälja on alati kuuli liikumise suunas) ehk iga poole võnkeperioodi τ järel. Alla liikumisel on elektrivälja suunatud alla ning saame kirja panna uue jõudude tasakaalu

$$Mg + Eq = kx_{\downarrow}.$$

Seega on tasakaaluasend alla liikumisel

$$x_{\downarrow} = \frac{Mg}{k} + \frac{Eq}{k} = x_0 + \Delta x.$$

Analoogselt saame leida tasakaaluasendi üles liikumisel, kuid nüüd on elektriväli suunatud üles:

$$x_{\uparrow} = \frac{Mg}{k} - \frac{Eq}{k} = x_0 - \Delta x.$$

On selge, et algselt elektrivälja sisselülitamisel, kui elektriväli on alla suunatud, muutub tasakaaluasend hetkeliselt vastavaks, kuid kuuli asukoht jääb algselt samaks. Seega pole kuul enam tasakaalus, vaid uuest tasakaaluasendist kaugusel Δx ning hakkab võnkuma amplituudiga $A_1 = \Delta x$ tasakaaluasendi x_{\downarrow} ümber. Aja τ järel on kuul jõudnud kaugusele $x_0 + 2\Delta x$. Kuna kuul hakkab nüüd üles liikuma, muutub ka kuuli tasakaaluasend koos elektriväljaga vastavaks ning üles minnes võngub kuul juba amplituudiga $A_2 = 3\Delta x$ tasakaaluasendi x_{\uparrow} ümber. On selge, et iga tasakaaluasendi vahetumisega kasvab kuuli amplituud edaspidi $2\Delta x$ võrra. Tasakaaluasend vahetub aga iga ajavahemiku τ järel. Nüüd leiame kuuli asukohta ülesandes antud ajahetkel, milleks on 7τ . Selle aja jooksul liigub kuul korra algasendist alla, ning teeb siis 3 täisvõnget, jõudes nende järel uuesti alla. Pärast algasendist alla jõudmist on kuuli asukoht $x_0 + 2\Delta x$. Seejärel liigub kuul üles asendisse $x_0 - 4\Delta x$ ja uuesti alla asendisse $x_0 + 6\Delta x$. Kauguse absoluutväärtus algasendist suureneb seega iga τ järel $2\Delta x$ võrra. 7τ järel on kaugus tasakaaluasendist seega $7 \cdot 2\Delta x = 14\Delta x$. Nagu enne selgeks tegime, on kuul seega küsitud ajahetkel 7τ algasendist x_0 $14\Delta x = 14 \frac{Eq}{k}$ võrra all pool.

L147 Laetud klotsid ★★★★★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2006, G 9

Klots hakkab liikuma, kui sellele mõjuv elektrostaatiline jõud ületab maksimaalse hõõrdejõu:

$$\frac{kq^2}{l^2} > \mu mg.$$

Klotside läbitava vahemaa leiame energia jäävuse seadusest. Punktis, milles klots peatub, on elektrostaatilise välja potentsiaalne energia väiksem, kui algpunktis. Potentsiaalsete energiatega vahe muundub liikumise käigus klotside kineetiliseks energiaks, mis, omakorda, hõõrdejõu töö tulemusena muundub soojuseks.

Kui kuulide vahemaa liikuma hakkamisel oli l ning seisma jäämise hetkel L , siis muutus elektrostaatilises potentsiaalses energias on

$$\Delta E = \frac{kq^2}{l} - \frac{kq^2}{L}.$$

Hõõrdejõud μmg mõjub kummagile klotsile vahemaa $(L-l)/2$ jooksul, seega kogu hõõrdejõu töö on

$$A = \mu mg(L-l).$$

Et need energia muudud on võrdsed, saame vahemaa L jaoks lihtsa võrrandi:

$$kq^2 \left(\frac{1}{l} - \frac{1}{L} \right) = \mu mg(L - l) \Rightarrow \frac{kq^2}{\mu mg} \frac{L - l}{L} = L - l \Rightarrow \\ \Rightarrow L = \frac{kq^2}{\mu mgl}$$

L148 Kosmoseprügi ★★★★★

Autor: Siim Ainsaar, lõppvoor, 2009, G 9

Massikeskme taustsüsteemis on kerade kaugus minimaalne hetkel, kui süsteem on paigal. d saame energia jäävuse seadusest, mis kehtib, kuna nõõr puutehetkel mutrile (sirgena) jõudu ei avalda ega muuda nii põrget plastseks. Süsteemi masskeskme liikumiskiirus satelliidi süsteemis

$$v_c = \frac{mv}{m + 2M},$$

mutri algkiirus masskeskme süsteemis

$$w = v - v_c = v \left(1 - \frac{m}{m + 2M} \right) = v \frac{2M}{m + 2M},$$

tehiskaaslase oma

$$W = v_c = \frac{mv}{m + 2M}.$$

Energia jäävus masskeskme taustsüsteemis on

$$\frac{mw^2}{2} + \frac{2MW^2}{2} + \frac{kq^2}{l} = \frac{kq^2}{d},$$

kust

$$d = \frac{kq^2}{\frac{mw^2}{2} + MW^2 + \frac{kq^2}{l}} = \frac{kq^2}{\frac{mv^2}{2} \left(\frac{2M}{m+2M} \right)^2 + Mv^2 \left(\frac{m}{m+2M} \right)^2 + \frac{kq^2}{l}} = \\ = \frac{1}{\frac{1}{l} + \frac{mMv^2}{kq^2(m+2M)}}.$$

Alternatiivne lahendus

Hetkel, kui keradevaheline kaugus on minimaalne, on satelliidi osad üksteise suhtes paigal. Seega liigub süsteem sel hetkel nagu jäik keha. Võtame inertsiaalse taustsüsteemi, kus tehiskaaslane oli enne kokkupõrget paigal, ja tähistame süsteemi kiiruse minimaalse kauguse saavutamise hetkel kui v_1 .

Impulsi jäävusest

$$mv = (m + 2M)v_1 \implies v_1 = \frac{mv}{m + 2M}.$$

Kehtib ka energia jäävus.

$$\begin{aligned}\frac{mv^2}{2} + \frac{kq^2}{l} &= \frac{(m+2M)v_1^2}{2} + \frac{kq^2}{d}, \\ \frac{mv^2}{2} + \frac{kq^2}{l} &= \frac{m^2v^2}{2(m+2M)} + \frac{kq^2}{d}, \\ d &= \frac{kq^2}{\frac{mv^2}{2} + \frac{kq^2}{l} - \frac{m^2v^2}{2(m+2M)}} = \frac{1}{\frac{1}{l} + \frac{mMv^2}{kq^2(m+2M)}}.\end{aligned}$$

L149 Koonus ★★★★★

Autor: Stanislav Zavjalov, piirkonnavoore, 2012, G 10

Punktlaengu q' poolt tekitatud potentsiaal on

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{r}.$$

Seega koonuse poolt tekitatud potentsiaal selle tipus on võrdeline summaarse laenguga ning pöördvõrdeline koonuse mõne lineaarmõõtmega. Olgu suurema koonuse laeng Q ja väiksema (mis on osa suuremast koonusest) q , siis nende sarnasuse tõttu

$$\frac{q}{Q} = \frac{h^3}{H^3}.$$

Kui suurem koonus tekitab punktis S potentsiaali φ_0 , siis väiksem koonus (olles veel suurema koonuse osana) tekitab seal potentsiaali φ_1 , mille kohta kehtib seos

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_0} = \frac{q}{h} \frac{H}{Q} = \frac{h^2}{H^2},$$

kust avaldame

$$\varphi_1 = \varphi_0 \frac{h^2}{H^2}.$$

Potentsiaali jaoks kehtib superpositsiooniprintsiip, seega väiksema koonuse eemaldamine toob kaasa vastava panuse kadumise. Seega otsitav uus potentsiaal on

$$\varphi' = \varphi_0 - \varphi_1 = \varphi_0 \left(1 - \frac{h^2}{H^2}\right).$$

L150 Laengud ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2012, G 9

a) Kuivõrd potentsiaal sõltub ainult x -koordinaadist, siis on elektriväli kõikjal x -telje sihiline ning impulsi y -komponent säilib. Seega, kui osake siseneb kõrgema potentsiaaliga piirkonda, siis väheneb vaid kiiruse x -komponent ning trajektor on selline, nagu oleks valguskiirel optiliselt hõredamat kihti läbides.

b) Täielik "sisepeegeldus" toimub siis, kui positiivse x -suunaga seotud kineetiline energia on suurem kui qU , mis vastab kiirusvektori ja x -telje vahelisele nugale

$$\arccos \sqrt{\frac{qU}{4qU}} = \frac{\pi}{3}.$$

Ainult sellest nurgast väiksemate nurkade puhul saab osake läbida kõrgema potentsiaaliga kihti ning selliset osakeste suhteline hulk on

$$\xi = \frac{\pi}{3} \div \pi = \frac{1}{3}.$$

L151 Kondensaator ★★★★★

Autor: Stanislav Zavjalov, lõppvoor, 2013, G 10

Plaatkondensaatori mahtuvus on $C = \epsilon_0 S/d$, ning seega esialgu on kondensaatoril laeng

$$Q_0 = CU_0 = \epsilon_0 SU_0/d$$

ning koguenergia

$$E = CU_0^2/2 = \epsilon_0 SU_0^2/2d.$$

Et kondensaator on patareist lahti ühendatud, laeng säilib; aga pinge muutub, kui viime sisse metalliplaadi.

Olgu metalliplaadi kaugus ühest kondensaatori plaadist x , siis on tegemist kahe jadamisi plaatkondensaatoriga, üks plaadivahelise kaugusega x ning teine kaugusega $d - (d/2 + x) = d/2 - x$. Uute kondensaatorite kogumahtuvuse C' leiame seosest

$$1/C' = 1/C(x) + 1/C(d/2 - x) = \frac{x}{\epsilon_0 S} + \frac{d/2 - x}{\epsilon_0 S} = \frac{d/2 - x + x}{\epsilon_0 S} = \frac{d}{2\epsilon_0 S},$$

kust $C' = 2C$. Seega süsteemi uus koguenergia on

$$E' = Q_0^2/2C' = \epsilon_0 SU_0^2/4d$$

ning ei sõltu plaadi täpsest asukohast kondensaatori sees. Süsteemi uue ja vana koguenergia vahe peab võrduma välisjõudude poolt sooritatud tööga, mis sel juhul tuleb negatiivne:

$$E' = E + A \rightarrow A = E' - E = -\epsilon_0 SU_0^2/4d.$$

Et välisjõu töö on negatiivne, tõmbub plaat ise kondensaatori sisse.

L152 Kondensaator ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2017, G 7

Vaatleme kahe dielektrikuga kondensaatorit kui kahte järjestikku ühendatud plaatkondensaatorit. Selleks asetame mõttelise metallplaadi dielektriliste kihtide eralduspinnale. Ühel kondensaatoril on seal laeng $+q$, teisel $-q$, seega vaba laeng on mõttelisel metallplaadil null (nii nagu vaja, sest tegelikult seal ju metallplaati pole). Algse dielektrikuga kondensaatori mahtuvus $C = \epsilon_0 S/d$. Mõtteliste kondensaatorite mahtuvused on $C_1 = S\epsilon_0\epsilon/(d/2) = 2\epsilon C$ ja $C_2 = S\epsilon_0 2\epsilon/(d/2) = 4\epsilon C$, seega summaarse mahtuvuse pöördväärtus

$$C' = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{4}{3} \epsilon C.$$

Dielektrikuga kondensaatori mahtuvus erineb dielektrikuga kondensaatori mahtuvusest, sest lisaks vabale laengule q metallplaadil on veel dielektriku pinnal vastasmärgiline dielektriku polarisatsioonist tingitud (dielektrikust mitte-eraldav) laeng $-q'$. Summaarne laeng $Q = q - q'$ on selline, nagu on antud pinge puhul samasugusel, ilma dielektrikuga kondensaatoril. Olgu ühe mõttelise kondensaatori kogulaeng (vaba laeng + dielektriku laeng) $Q_1 = q - q'_1$ ja teisel $Q_2 = q - q'_2$, siis sellel plaadil, mis jääb dielektrikute eralduspinnale, on kondensaatori plaatide laengumärke arvestades kogulaeng $Q_1 - Q_2 = q'_2 - q'_1$. Seega, dielektrikute eralduspinnal oleva kogulaengu $q'_2 - q'_1$ saame leida, kui selliste dielektrikuga kondensaatorite laengute vahe, mille pinge võrdub vastavale dielektrikukihile langeva pingega.

Mõttelistel kondensaatoritel on ühesugune laeng, seose $U = q/C$ tõttu on pinge pöördvõrdeline mahtuvusega, st ühele poole (kus dielektriline läbitavus on ϵ) langeb pinge $2U_0/3$ ja teisele poole (kus dielektriline läbitavus on 2ϵ) $U_0/3$. Kui dielektriku kihti ei oleks, siis oleks kummagi mõttelise kondensaatori mahtuvus $2C$. Seega laeng mõttelistel kondensaatoritel oleks vastavalt $Q_1 = 4U_0C/3$ ja $Q_2 = 2U_0C/3$, mistõttu kogulaeng dielektrikute eralduspinnal

$$q' = Q_1 - Q_2 = 2CU_0/3.$$

Alternatiivne lahendus

Olgu kondensaatori plaadil laeng q , siis Gaussi teoreemist kondensaatori plaadi jaoks saame seose $SD = q$, millest $D = q/S$. Dielektrikute eralduspinnal on D -vektori normaalkomponent pidev, seega piirkonnas, kus dielektriline läbitavus on ϵ , on $E_1 = D/\epsilon\epsilon_0$, teises piirkonnas $E_2 = D/2\epsilon\epsilon_0$. Järelikult

$$U_0 = E_1 \frac{d}{2} + E_2 \frac{d}{2} = (Dd/2\epsilon\epsilon_0)(1 + \frac{1}{2}) = \frac{3}{4} Qd/\epsilon\epsilon_0 S,$$

millest

$$C' \equiv Q/U_0 = \frac{4}{3} \epsilon\epsilon_0 S/d = \frac{4}{3} C\epsilon.$$

Laengu piirpinnal q' leiame Gaussi teoreemi abil mõttelise "karbi" jaoks, mis hõlmab piirpinda:

$$q' = (E_1 - E_2)\varepsilon_0 S = DS/2\varepsilon = q/2\varepsilon = U_0 C' / 2\varepsilon = \frac{2}{3} C U_0.$$

L153 Laengutega pulk ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, piirkonnavor, 2015, G 10

a) Seni, kuni üks laeng on piirkonnas $x > 0$ ning teine piirkonnas $x < 0$, on pulgale mõjuv summaarne jõud 0, mis tähendab, et pulk liigub konstantse kiirusega.

Alumisest asendist üles liikudes läbib pulk niisuguses režiimis (mil eri laengud viibivad eri piirkondades) vahemaa L ning sellele kuluv aeg on L/v ; sama kaua kulub ka antud vahemaa ülevalt alla läbimiseks, mis panustab kogu perioodi jaoks $t_1 = 2L/v$. Täispunktid anda sõltumata sellest, kas t_1 on leitud poolperioodide kaupa (nagu siin) või veerand- või täisperioodi abil.

Kui mõlemad laengud on piirkonnas $x > 0$, siis mõjub pulgale summaarne konstantne jõud $2E_0q$ ning Newtoni II seaduse kohaselt liigub pulk konstantse kiirendusega $a = 2E_0q/m$. Pulk siseneb antud piirkonda kiirusega v ning väljub kiirusega $-v$, mistõttu kiiruse muut on $2v$; teisalt, kiiruse muut on kiirenduse ja aja korrutis, seega nimetatud piirkonnas viibimise aeg on $2v/a = mv/E_0q$. Et sama protsess kordub ka piirkonnas $x < 0$, siis kogupanus võnkumisperioodi on $t_2 = 2mv/E_0q$ ning lõppvastust

$$T = \frac{2L}{v} + \frac{2mv}{E_0q}.$$

b) Kui pulk on nihkunud vahemaa x võrra, siis ühes piirkonnas viibiva pulgaosa pikkus on vähenenud x võrra ning teises piirkonnas kasvanud x võrra; eri piirkondades viibivatele samapikkustele pulgalõikudele mõjuvad jõud kompenseerivad üksteist ning kompenseerimata jääb lõikude pikkuste vahe $2x$, millele vastab laeng $q = 2xQ/L$ ning resultantjõud $F = 2xQE_0/L$. Seega kirjeldab pulga liikumist võrrand

$$a = \ddot{x} = -2xQE_0/Lm;$$

see on pendli võrrand, kus kiirendust ja nihet siduv võrdetegur annab ringsageduse ruudu, $\omega^2 = 2QE_0/Lm$. Seega periood

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{Lm}{2QE_0}}.$$

L154 Kuulid ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2016, G 10

Metallkeradele indutseeritakse elektrivälja poolt võrdsed ja vastasmärgilised laengud $\pm q$; kuivõrd traat on peenike, siis võime ignoreerida sellel olevaid laenguid. Et traat on juhtivast materjalist, on süsteem ekvipotentsiaalne, ning võrdne süsteemi sümmeetriatasandis lõpmatutes paiknevate punktide potentsiaaliga:

$$E \frac{l}{2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \Rightarrow q = 2lE\pi\epsilon_0 R.$$

Seetõttu mõjub kummalegi kuulile elektrostaatiline jõud qE , mille tasakaalustab niidi pinged:

$$T = 2lE^2\pi\epsilon_0 R.$$

L155 Kaks kuuli ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2018, G 10

Elektrivälja indutseerib kuulidele vastasmärgilised laengud, mis tagavad, et kuulide potentsiaalid on võrdsed. Olgu esimese kuuli koordinaat z ; siis väline väli tekitab kuulide vahel potentsiaalide vahe Ez ; see peab võrduma kuulidele indutseeritud laengute $\pm q$ tekitatud potentsiaalide vahega

$$\frac{kq}{R} - \frac{(-q)k}{R} = \frac{2kq}{R}.$$

Seega $q = EzR/2k$. Esimesele kuulile mõjub elektriväljas jõud $Eq = E^2zR/2k$; näeme, et see on võrdeline kaugusega ja toimib sarnaselt vedruga. Seega teeb summaarne jõud tööd $E^2z^2R/4k$. Kui ka teine kuul siseneb elektrivälja, siis muutub summaarne jõud hetkeliselt nulliks ning kuulid jätkavad liikumist konstantse kiirusega, mis on leitav energia jäävuse seadusest:

$$\frac{E^2z^2R}{4k} = \frac{2mv^2}{2},$$

millest

$$v = \frac{Ez}{2} \sqrt{\frac{R}{km}}.$$

Seni, kui kuulid kiirenevad, on liikumisvõrrandiks

$$\ddot{z} = \frac{E^2z^2R}{4km},$$

millest nii z kui $v = \dot{z}$ on eksponentsiaalsed funktsioonid ajast. Seega on kiiruse graafikuks eksponentsiaalselt kasvav kõver, mis läheb hüppeliselt üle kontsantseks funktsiooniks (hetkel, kui ka teine kuul siseneb elektrivälja).

L156 Kolm kuuli ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2016, G 10

a) Sümmeetria tõttu on äärmiste kuulide kiirused sama magnituudiga, aga sümmeetriatelje suhtes peegeldatud. Kuulide ruutkeskmise on maksimaalne siis, kui elektriline potentsiaalne energia on minimaalne, st siis, kui nööride vahel on sirg-nurk. Veendume, et antud olukorras on A kiirus maksimaalne. Olgu A kiirus \vec{v} , äärmiste kuulide \vec{v} -ga paralleelne kiiruse komponent w ning ristkomponent u . Impulsi jäävusest $v = 2w$. Kuna ainsana muutub kahe äärmise kuuli vahekaugus, saame kirja panna energia jäävuse seaduse alghetkel ning siis, kui äärmiste kuulide vahekaugus on d :

$$\frac{kq^2}{L} = \frac{3mv^2}{4} + mu^2 + \frac{kq^2}{d}.$$

Seega

$$v = \sqrt{\frac{4}{3} \left(\frac{kq^2}{m} \left(\frac{1}{L} - \frac{1}{d} \right) - u^2 \right)}.$$

Näeme, et v on maksimaalne siis, kui d on maksimaalne ja $|u|$ minimaalne. d on maksimaalne siis, kui nööride vahel on sirg-nurk, siis ka $u = 0$. On selge, et antud olukord vastab maksimaalsele v väärtusele. Geomeetriast, $d = L/\cos 60 = \frac{2L}{\sqrt{3}}$. Niisiis,

$$v = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{kq^2}{m} \left(\frac{1}{L} - \frac{\sqrt{3}}{2L} \right)} = q \left(\sqrt{3} - 1 \right) \sqrt{\frac{k}{3mL}}.$$

Märkus. Äärmiste kuulide maksimaalse kiiruse leidmine on keerulisem. Nende kiirus ei ole maksimaalne, kui nöörid on ühel sirgel.

b) Joonisel laeng A liigub sümmeetria tõttu vertikaalselt, seega niidi AB hetkeline pöörlemiskese peab asuma horisontaaljoonel OA . Massikese M jääb paigale, mistõttu niidi punkt D , mis jagab löigu AB vahekorras 2:1, liigub horisontaalselt, seetõttu punkti D ja hetkelist pöörlemiskeset O ühendav sirge peab olema vertikaalne. Nüüd saab ilmseks, et O on võrdkülgse kolmnurga ABE keskpunkt, mistõttu lõik OB on vertikaali suhtes 30° nurga all ning seega punkt B hakkab liikuma horisontaali suhtes 30° nurga all ning selles sihis peab olema ka laengu B kiirendus. Projitseerides laengu B jaoks Newtoni II seaduse löigu AB ristsihile, saame

$$ma \cos 30^\circ = \cos 60^\circ \frac{kq^2}{L^2},$$

millest

$$a = \tan 30^\circ \frac{kq^2}{mL^2} = \frac{kq^2}{mL^2\sqrt{3}}.$$

Impulsi jäävuse tõttu on laengu A kiirendus $2a \sin 30^\circ = a$, st sama, mis teistel laengutel.

L157 Jalgpall ★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2006, G 1

Iga pumpamiskäigu alguses atmosfääri õhk rõhuga p_0 täidab pumba siseruumi ruumalaga v . Pumpamiskäigu lõpus on see õhk pallis, kus ta ruumala on V ja osarõhk p . Viimase saame leida Boyle-Mariotte'i seadusest:

$$p = \frac{p_0 v}{V}.$$

Pärast N pumpamiskäiku on rõhk pallis võrdne osarõhkude summaga:

$$p_N = Np = \frac{Nvp_0}{V} = \frac{40 \cdot 150 \cdot 0,1}{3000} = 0,2 \text{ MPa}.$$

L158 Allveelaev ★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2007, G 3

Kuna temperatuur on jääv, kehtib seos $pV = \text{Const}$. Olgu laeva ruumala V ning õhu ruumala laevas peale ventiilide avamist v . Siis

$$p_0 V = (p_0 + \rho gh) v,$$

$$k = \frac{v}{V} = \frac{p_0}{p_0 + \rho gh} = \frac{0,1 \cdot 10^6}{0,1 \cdot 10^6 + 1,03 \cdot 10^3 \cdot 9,8 \cdot 42} \approx 0,19.$$

L159 Tuukrid ★

Autor: Ott Krikmann, piirkonnavor, 2007, G 4

Oletame, et tuuker pumpas pinna lähedal vesti õhku, mille ruumala oli V_0 . Vee pinna lähedal oli rõhk võrdne välisrõhuga. Sukeldudes 25 m sügavusele, suureneb rõhk $\Delta p = \rho gh$ võrra. Summaarne rõhk sellel sügavusel on seega

$$p = p_0 + \Delta p = p_0 + \rho gh$$

Võrdusest $pV = p_0 V_0$ leiame, et

$$\frac{V_0}{V} = \frac{p}{p_0} = \frac{p_0 + \rho gh}{p_0} = 3,33.$$

Seega, vestis oleva õhu ruumala väheneb endisega võrreldes 3,33 korda. Järelikult on vaja selle sügavusel suurendada õhu ruumala 3,33 korda, et saavutada hõljumine.

L160 Toaõhk ★

Autor: Mihkel Rähn, lõppvoor, 2008, G 3

Summaarne kineetiline energia avaldub kui $E = N \cdot \langle E_m \rangle$, kus N on toas oleva gaasi molekulide arv ja $\langle E_m \rangle$ ühe molekuli gaasi keskmine kineetiline energia. Kehtib

$$\langle E_m \rangle = \frac{3}{2}kT.$$

Ideaalse kaasi võrrandist saab avaldada toas olevate molekulide arvu $N = pV/(kT)$ Pannes need kokku, $E = \frac{3}{2}pV$. Kuna toas on õhurõhk võrdne välisrõhuga ei sõltu toas olevate õhumolekulide summaarne kineetiline energia temperatuurist.

L161 Õhupall ★

Autor: Eero Vaher, lõppvoor, 2015, G 1

Suurima võimaliku koormise massi korral on õhupalli keskmine tihedus võrdne õhu tihedusega ehk $\rho = \frac{m+M}{V}$, kus m on õhupallis oleva gaasi mass. Siit saame avaldada $m = \rho V - M$. Lisaks kehtib ideaalse gaasi seadus $pV = \frac{m}{\mu}RT$, millest saame $m = \frac{pV\mu}{RT}$. Nende kahe võrrandi põhjal saame kirjutada

$$\frac{pV\mu}{RT} = \rho V - M$$

ehk

$$V = \frac{M}{\rho - \frac{p\mu}{RT}} = 193 \text{ m}^3.$$

L162 Gaasitermomeeter ★★

Autor: Valter Kiisk, piirkonnavor, 2006, G 5

Olgu mõõteampulli ruumala V ning manomeetri ruumala V_m . Kui toatemperatuuril T_0 täideti seade n mooli gaasiga, siis ideaalse gaasi olekuvõrrandi põhjal

$$\frac{p_0 V}{T_0} + \frac{p_0 V_m}{T_0} = nR.$$

Kuna manomeeter ja mõõteampull on kapillaari kaudu ühenduses, siis nende gaasirõhud on isegi temperatuuride erinedes ühesugused. Kui mõõteampull on temperatuuril T , siis (gaasi koguhulk jääb samaks)

$$\frac{pV}{T} + \frac{pV_m}{T_0} = nR.$$

Elimineerides n ja asendades $V_m/V = \alpha$, saame

$$T = \frac{pT_0}{p_0 + (p_0 - p)\alpha} \approx 20,5 \text{ K}.$$

L163 Tuulik ★★

Autor: Valter Kiisk, piirkonnavor, 2007, G 5

Tiiviku poolt haaratav pindala on

$$S = \frac{\pi d^2}{4},$$

Ajavahemikus Δt kandub läbi selle pinna õhumass $\Delta m = vS\rho\Delta t$, mille kineetiline energia on

$$\Delta E = \frac{\Delta m v^2}{2} = \frac{S\rho\Delta t v^3}{2},$$

millele vastab võimsus $P_0 = S\rho v^3/2$. Elektriiks õnnestub muundada osa η sellest:

$$P = \eta P_0 = \frac{\eta S\rho v^3}{2} = \frac{\eta\pi d^2\rho v^3}{8} \approx 370 \text{ kW}.$$

L164 Rong tunnelis ★★

Autor: Eero Uustalu, lõppvoor, 2009, G 4

Õhu temperatuur tunnelis kasvab, kuna mootor soojendab tunneli läbimisel selles olevat õhku. Vaatleme rongi liikumist ajavahemiku Δt jooksul. Selle ajaga läbib rong vahemaa $s = v\Delta t$ ja rongist mööduva õhu ruumala on $\Delta V = \pi d^2 s/4$. Õhu mass on $m = \Delta V\rho$ ja moolide arv on

$$N = \frac{m}{M} = \frac{\Delta V\rho}{M} = \frac{\pi d^2 v\Delta t\rho}{4M}.$$

Ideaalse gaasi olekuvõrrandist $pV = \frac{m}{M}RT$ saame avaldada $\rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT}$.Rongi mootoris eraldub samal ajal soojushulk $Q_1 = P\Delta t$.

Üheaatomilise gaasi erisoojus jääval ruumalal on $C_1 = 3/2R$. Seega on kaheaatomilise gaasi erisoojus $C_2 = 5/3 \cdot 3/2R = 5/2R$. Gaasi erisoojus jääval rõhul on seega $C = 5/2R + R = 7/2R$. Õhu soojendamiseks ΔT võrra kulub soojushulk $Q_2 = NC\Delta T$. Võrdsustame soojushulgad Q_1 ja Q_2 .

$$NC\Delta T = P\Delta t.$$

Asendades leitud avaldised N ja C jaoks saame pärast teisendusi

$$\Delta T = \frac{8PT}{7\pi d^2 v\rho} = 2,25 \text{ K}.$$

L165 Õhupalli vägi ★★

Autor: Eero Vaher, lahtine, 2013, G 4

Õhupallile mõjub Maal üleslükkejõud $F = \rho_0 V g$, kus V on õhupalli ruumala ning g raskuskiirendus. Piirjuhul peab see olema võrdne koormisega õhupallile mõjuva raskusjõuga $F_g = (M_0 + m)g$, kus m on õhupalli gaasi mass ning M_0 maksimaalne koormise mass Maal. Saame $M_0 + m = \rho_0 V$. Ideaalse gaasi seadusest saame

$$V = \frac{mRT_0}{\mu p_0},$$

seega

$$M_0 = m \left(\frac{\rho_0 RT_0}{\mu p_0} - 1 \right).$$

Marsil annaks analoogiline mõttekäik maksimaalseks koormise massiks

$$M = m \left(\frac{\rho_1 RT_1}{\mu p_1} - 1 \right),$$

seega

$$M = \frac{\left(\frac{\rho_1 RT_1}{\mu p_1} - 1 \right)}{\left(\frac{\rho_0 RT_0}{\mu p_0} - 1 \right)} M_0 \approx 160 \text{ kg}.$$

Kui õpilane tõlgendas sõnapaari "samasugune õhupall" nii, et õhupalli ruumala peab samaks jääma, loetakse õigeks ka järgnev lahendus.

Õhupallile mõjuva üleslükkejõu peab piirjuhul tasakaalustama õhupallile mõjuv raskusjõud, seega $\rho_0 V = M_0 + m_0$, kus V on õhupalli ruumala ning m_0 õhupallis oleva heeliumi mass. Õhupalli massi saame leida ideaalse gaasi seadusest

$$m_0 = \frac{V \mu p_0}{RT_0}.$$

See annab meile ruumala jaoks võrrandi

$$V = \frac{M_0}{\rho_0 - \frac{\mu p_0}{RT_0}}$$

ning suurimaks Marsil õhku tõstetavaks massiks

$$M + m_1 = \frac{M_0 \rho_1}{\rho_0 - \frac{\mu p_0}{RT_0}},$$

kus M on koormise mass ning m_1 õhupalli sees oleva heeliumi mass Marsil. Õhupalli sees oleva heeliumi massi saame leida ideaalse gaasi seadusest. Saame

$$M = \frac{M_0}{\rho_0 - \frac{\mu p_0}{RT_0}} \left(\rho_1 - \frac{\mu p_1}{RT_1} \right) \approx 1,3 \text{ kg}.$$

L166 Paisupaak ★★

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2014, G 3

Et avariiventil avaneks, peab rõhk süsteemis kasvama väärtuseni $p = p_0 + \Delta p = 2,2p_0$. Paisupaagis olev õhk on seega kokku pressitud ruumalale $V_2 = V_1 p_1 / p$ (gaasi olekuvõrrandist konstantsel temperatuuril), mis tähendab, et vesi sai paisuda ruumala $\Delta V = V_1 - V_2 = \frac{7}{22} V_1$ võrra. See aga moodustab

$$\alpha = \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{7}{22} \frac{V_1}{V_0} \approx 0,025 = 2,5\%$$

vee algsest ruumalast. Et vee mass jääb samaks, tähendab see tiheduse kahanemist väärtuseni

$$\rho' = \left(\frac{1}{1 + \alpha} \right) \rho_0 \approx (1 - \alpha) \rho_0 = 975 \text{ kg/m}^3.$$

Temperatuuri ja tiheduse sõltuvuse graafikult loeme, et see vastab temperatuurile $t_{\max} = 75^\circ\text{C}$.

L167 Balloon ★★

Autor: Kaur Aare Saar, lahtine, 2015, G 3

Kuna balloon on silindrikujuline, on pinged selle telje sihis ning sellega ristuvast sihis erinevad. Mõlemal juhul peab ballooni seinas olev jõud tasakaalustama balloonisese gaasi rõhu põhjustatud jõu. Teljesihilise pinge jaoks saame võrrandi $\pi r^2 p_1 = 2\pi r t \sigma$ ehk $p_1 = \frac{2t\sigma}{r}$. Pinge ballooni teljega ristuvast sihis leiame silindrit poolitavat mõttelist ristkülikukujulist lõiget vaadeldes. Jõudude tasakaalust saame $2rh p_2 = 2ht\sigma$, kus $h \gg r$ on ballooni kõrgus, ehk $p_2 = \frac{t\sigma}{r}$. Ballooni poolt talutav rõhk on neist kahest väiksem ehk

$$p = \frac{t\sigma}{r} = 16,7 \text{ bar.}$$

L168 Saunauks ★★

Autor: Mihkel Kree, piirkonnavor, 2016, G 5

Kerisele visatakse $n = m/\mu$ mooli vett, mis aurustudes tekitab hermeetiliselt suletud ruumis lisarõhu, mis on leitav gaasi seadusest: $\Delta p = nRT/V$. See rõhk avaldab uksele jõudu $F = \Delta p A$. See jõud mõjub ühtlaselt üle kogu ukse pinna, niisiis tuleb uksele mõjuva jõumomendi arvutamisel võtta jõu õlaks pool ukse laius. Et aga ust kinni hoides rakendaksid saunalised oma jõu F_1 käepidemele, kus jõu õlaks on terve ukse laius, siis saame öelda, et saunalised peaksid ukse kinnihoidmiseks rakendama jõudu

$$F_1 = \frac{F}{2} = \frac{mRTA}{2\mu V} = 2500 \text{ N.}$$

Leitud jõud on tõepoolest ebaloomulikult suur. Lisaküsimuse vastuseks võime öelda, et kerisel aurustunud sadakond liitrit veeauru surub üleliigse õhu igasugustest piludest kiiresti välja ja seetõttu märkimisväärset ülerõhku uksele ei avaldugi.

L169 Rattamatk ★★

Autor: Ardi Loot, lahtine, 2017, G 5

Koormatud rehvi kokkupuutepinnale maaga mõjuvad ühelt poolt rehvi sees oleva suruõhu poolt jõud $(p_0 + p)S$ ning teiselt poolt õhurõhu poolt tekitatud jõud p_0S ja maapinna reaktsioonijõud mg . Nende jõudude tasakaalutingimus annab meile võrrandi $(p_0 + p)S = p_0S + mg$. Kasutades avaldist rehvi kokkupuutepinna suurus $S \approx 2\pi\Delta R\sqrt{Rr}$ sõltuvusest deformatsioonist ΔR , saame leida, et rehvi on deformeeritud

$$\Delta R = \frac{mg}{2\pi p\sqrt{Rr}} \approx 3,4 \text{ mm} \quad (1)$$

võrra.

Rehvi koormuse eemaldamise tulemusena suureneb selle ruumala $\Delta V \approx S \cdot \Delta R/2 \approx 3,4 \text{ cm}^3$ võrra ja seetõttu väheneb suruõhu rõhk rehvis Δp võrra. Kasutades ideaalse gaasi võrrandit, saame tingimuse

$$(p_0 + p)(V - \Delta V) = (p_0 + p - \Delta p)V$$

ja selle lahendamisel

$$\Delta p = (p_0 + p) \frac{\Delta V}{V} \approx 224 \text{ Pa}. \quad (2)$$

On selge, et rehvi pumpamisel on rakendatav jõud võrdeline rehvis oleva rõhuga (õhurõhu suhtes) ja seega peab ta rakendama vaid

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{(p + p_0) m^2 g^2}{8\pi^3 p^3 (R - r) r^2 \sqrt{Rr}} \approx 0,15 \%$$

võrra vähem jõudu võrreldes olukorraga, kui rehvi on koormatud.

L170 Silinder külmkapis ★★

Autor: Rasmus Kisel, piirkonnavor, 2017, G 6

Oletame, et silindris oleva õhu rõhk oli algselt p_0 . Kuna aine mass jääb samaks, siis kui tihedus läheb λ korda suuremaks, peab aine ruumala minema λ korda väiksemaks. Seega pärast tahkumist täidab tahkis silindrist osa $k' = \frac{k}{\lambda}$. Leiame pärastise õhurõhu p_2 . Ideaalse gaasi olekuvõrrandi kohaselt $pV = nRT$ ning seega kehtivad algse ja pärastise seisuga järgmised võrrandid:

$$p_0 V_0 = nRT_1,$$

$$p_2 V_2 = nRT_2.$$

Siit leiame, et

$$p_2 = p_0 \frac{V_0 T_2}{V_2 T_1},$$

kus V_0 on gaasi esialgne ruumala ning V_2 gaasi ruumala hiljem. Teame aga, et $V_0 = (1 - k)V_{\text{kogu}}$ ja $V_2 = (1 - k')V_{\text{kogu}}$ ning seega saame õhurõhu pärast tahkumist:

$$p_2 = p_0 \frac{T_2 \lambda (1 - k)}{T_1 (\lambda - k)}.$$

Päristise ja esialgse rõhu suhe on seega:

$$\frac{p_2}{p_0} = \frac{T_2 \lambda (1 - k)}{T_1 (\lambda - k)}.$$

L171 Heelium ★★★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2008, G 6

Käsitleme heeliumit üheaatomilise ideaalse gaasina. Paneme kirja olekuvõrrandid alg- ja lõppseisundi jaoks:

$$p_1 V_1 = nRT_1, \quad p_2 V_2 = nRT_2.$$

Paisumisel tehtav töö võrdub graafikul halliks värvitud trapetsi pindalaga:

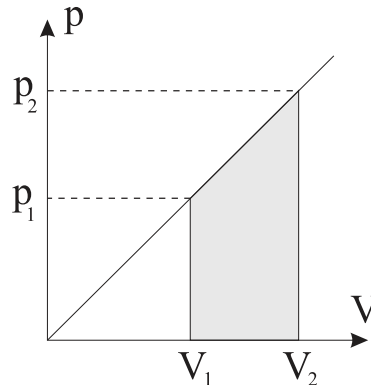
$$A = \frac{1}{2}(p_2 V_2 - p_1 V_1) = \frac{1}{2}nR(T_2 - T_1).$$

Termodünaamika I seaduse kohaselt

$$Q = A + \Delta U = \frac{1}{2}nR(T_2 - T_1) + \frac{3}{2}nR\Delta T = 2nR\Delta T.$$

Siit

$$\Delta T = \frac{Q}{2nR} \approx 6 \text{ K}.$$



L172 Õhk ★★★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2009, G 7

Temperatuuri kasvades hakkab esimese anumate rõhk p_1 suurenema ning mingil hetkel ületab see ventiili kriitilise rõhu Δp . Sellest hetkest alates hakkab ventiil õhku läbi laskma nõnda, et edaspidi anumate rõhud p_1 ja p_2 rahuldavad tingimust $p_1 - p_2 = \Delta p$. See tingimus jääb edaspidi alati täidetuks, sest ei saa tekkida olukorda, kus väiksema rõhuga anumaks kasvaks rõhk kiiremini kui suurema rõhuga anumaks. Korrektse lahenduse huvides peame siiski ka veenduma, kas rõhk üldse kasvab piisavalt suureks, et ventiil avaneks. Selleks peaks rõhk kasvama 10% võrra, milleks omakorda peab temperatuuri tõstma vähemalt 10% võrra – tõepoolest, see on kooskõlas ülesandes antud arvudega: $t_2 - t_1 > 30^\circ\text{C}$. Algne gaasi hulk (moolides)

$$n = \frac{p_0 V_1}{Rt_1}$$

on jääv suurus ning jaotub hiljem anumate vahel osadeks n_1 ja n_2 nõnda, et $n = n_1 + n_2$, ehk

$$\frac{p_0 V_1}{Rt_1} = \frac{(p_2 + \Delta p) V_1}{Rt_2} + \frac{p_2 V_2}{Rt_2}.$$

Asendades $\alpha = V_1/V_2$, saame

$$p_0 \alpha \frac{t_2}{t_1} - \Delta p \alpha = p_2 (\alpha + 1), \quad \Rightarrow$$

$$p_2 = \frac{\alpha}{\alpha + 1} \left(p_0 \frac{t_2}{t_1} - \Delta p \right).$$

Kasutades arvutustes absoluutühikutesse teisendatud temperatuuride väärtusi $t_1 = 300 \text{ K}$ ja $t_2 = 400 \text{ K}$, saame vastuseks

$$p_2 = \frac{2}{3} \left(\frac{4}{3} - 1,1 \right) p_0 \approx 0,16 p_0.$$

L173 Õhuhoki ★★★

Autor: Mihkel Heidelberg, lõppvoor, 2010, G 6

Olukorras, kus aluse temperatuur on minimaalne, on rõhk seibi alumise külje vahetus läheduses võrdne süsihappegaasi aururõhuga. Seibi surutakse alla jõuga F ja kuna seibi pindala on πr^2 , peab surumist tasakaalustav rõhk olema $p = \frac{F}{\pi r^2}$. Vaadeldes rõhkude tasakaalu seibi ülemise ja alumise pinna läheduses, saame et kuiva jää aururõhk on

$$p_{\text{kuiv}} = p + p_0 = p_0 + \frac{F}{\pi r^2} = 131,8 \text{ kPa}.$$

Sellele vastab graafiku põhjal temperatuur $\sim 195 \text{ K}$.

L174 Süstal ★★★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2011, G 5

Kirjutame ideaalse gaasi olekuvõrrandi süstla jaoks vahetult peale sõrmega sulgemist:

$$p_0 V = nRT.$$

Peale kolvi välja tõmbamist ja vabastamist:

$$p_2 V_2 = nRT \Rightarrow p_2 = p_0 \frac{V}{V_2}.$$

Kui kolb (ristlõikepindalaga $S = \frac{\pi d^2}{4}$) peale vabastamist seiskub, siis on kolvi hõõrdejõud F_h tasakaalustanud rõhkude vahest tekitatud jõu:

$$F_h = S(p_0 - p_2) = S p_0 \left(1 - \frac{V}{V_2} \right) = \frac{\pi d^2}{4} p_0 \left(1 - \frac{V}{V_2} \right) \approx 3,6 \text{ N}$$

L175 Kuumaõhupall ★★★

Autor: Andreas Valdmann, piirkonnavor, 2012, G 6

Õhupallile mõjub ühes suunas üleslükkejõud, mis võrdub väljasurutud külma õhu kaaluga $\rho_{20}Vg$. Vastassuunas mõjub raskusjõud nii kestale ja laadungile (mg) kui ka kuumale õhule õhupalli sees (ρ_kVg , kus ρ_k on kuumade õhu tihedus). Õhupall tõuseb lendu, kui üleslükkejõud saab võrdseks raskusjõuga:

$$\rho_{20}Vg = mg + \rho_kVg,$$

millest avaldub

$$\rho_{20} = \rho_k - \frac{m}{V}.$$

Õhu tihedus väheneb temperatuuri kasvamisega vastavalt ideaalse gaasi olekuvõrrandile

$$pV = \frac{m}{M}RT.$$

Avaldades õhu tiheduse, saame

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT}.$$

Õhupall on alt lahti ja õhurõhk palli sees on võrdne välisõhu rõhuga. Seetõttu on ülaltoodud võrrandis p , M ja R konstantsed ning kahe erineva temperatuuri jaoks kirjapandud võrrandeid läbi jagades näeme, et

$$\frac{\rho_{20}}{\rho_k} = \frac{T_k}{T_{20}}.$$

Avaldades T_k ja kasutades lendutõusmise tingimust, saame:

$$T_k = \frac{\rho_{20}T_{20}}{\rho_k} = \frac{\rho_{20}T_{20}}{\rho_{20} - \frac{m}{V}} = \frac{T_{20}}{1 - \frac{m}{\rho_{20}V}}.$$

Ülaltoodud valemis tuleb kasutada absoluutset temperatuuri (kelvinites). Null kraadi Celsiuse skaalas on 273 K ja välisõhu temperatuur on seega $20^\circ\text{C} = 20\text{ K} + 273\text{ K} = 293\text{ K}$. Nüüd saamegi välja arvutada temperatuuri õhupalli sees, milleks on $T_k = 364\text{ K} = 91^\circ\text{C}$.

L176 Korvpall ★★★

Autor: Andreas Valdmann, lõppvoor, 2012, G 4

Sügavale vee alla sukeldamisel surub veesamba rõhk palli kokku. Pall hakkab ise põhja vajuma, kui tema ruumala väheneb nii palju, et pallile mõjuv üleslükkejõud saab väiksemaks raskusjõust ehk palli keskmine tihedus muutub väiksemaks vee tihedusest. Kriitilisel sügavusel $\rho = m/V$, kus V on kokkusurutud korvpalli ruumala. Lõpptulemusena otsime vedelikusamba kõrgust, mis tekitab piisava rõhu, et palli ruumala väheneks väärtuseni $V = m/\rho$. Seepärast leiame esmalt pallis oleva õhu rõhu ja ruumala vahelise seose. Sukeldamata pallis on rõhk võrdne õhurõhu ja palli kesta tekkivast elastsusjõust tingitud rõhu summaga: $p_0 + p_1$. Kriitilisel sügavusel moodustab palli ruumala alla 10 % oma esialgsest väärtusest, mis tähendab,

et pall on lõmmi vajutatud ja elastsusjõud enam rolli ei mängi. Rõhk pallis on siis võrdne vedelikusamba rõhu ja õhurõhu summaga: $p_v + p_0$. Boyle'i-Mariotte'i seadusest on teada, et konstantse temperatuuri juures on ideaalse gaasi rõhk ja ruumala pöördvõrdelises sõltuvuses ehk

$$\frac{p_0 + p_1}{p_0 + p_v} = \frac{V_0}{V}.$$

Sellest valemist saame avaldada vedelikusamba kriitilise rõhu:

$$p_v = (p_0 + p_1) \frac{V_0}{V} - p_0.$$

Teades, et vedelikusammas kõrgusega h tekitab rõhu $p_v = \rho gh$, leiame samaväärse avaldise kriitilise sügavuse jaoks:

$$h = \frac{(p_0 + p_1) \frac{V_0}{V} - p_0}{\rho g}.$$

Nüüd tuleb veel palli alg- ja lõppruumala avaldada ülesandes etteantud suuruste kaudu. Lõppruumala on juba lahenduse alguses leitud ($V = m/\rho$). Algruumala jaoks kasutame ringi ümbermõõdu ja kera ruumala valemeid

$$C = 2\pi r \text{ ja } V_0 = \frac{4}{3}\pi r^3,$$

millest saame, et $V_0 = C^3/6\pi^2$ ning lõpuks

$$h = \frac{(p_0 + p_1) \frac{C^3 \rho}{6\pi^2 m} - p_0}{\rho g}.$$

Kriitilise sügavuse arvuline väärtus on $h = 190$ m.

L177 Paisupaak ★★★

Autor: Ardi Loot, lahtine, 2016, G 7

Juhul, kui paisupaak pole veel küttesüsteemiga ühendatud, on terve paisupaak täidetud õhuga. Seega saab kirja panna ideaalse gaasi olekuvõrrandi:

$$p_0 V = nRT_0, \tag{1}$$

kus n on paagis oleva õhu moolide arv ja R universaalne gaasikonstant. Teisalt on nõutud, et juhul, kui süsteem täidetakse rõhuni p_1 , peab olema paisupaagist osa β täidetud veega; seega osa $\gamma = 100\% - \beta$ on täidetud õhuga. Kuna vahesein on vabalt liikuv, siis peavad silindris asuva vee ja õhu rõhud olema võrdsed. Seega saab kirja panna teise olekuvõrrandi:

$$p_1 \gamma V = nRT_0. \tag{2}$$

Lahendades võrranditest (1) ja (2) tekkinud süsteemi, saame

$$p_0 = \gamma p_1 = 270 \text{ kPa.}$$

Paisupaagi minimaalse ruumala V leiame tingimusest, et $\Delta p \leq 50 \text{ kPa}$. On selge, et kui vee ruumala suureneb $\Delta V = \alpha V_s = 1 \text{ L}$ võrra, siis paagis oleva õhu ruumala väheneb sama palju. Seega saame kirja panna

$$p_2 (\gamma V - \Delta V) = nRT_2. \quad (3)$$

Lahendades võrranditest (1) ja (3) tekkinud süsteemi, saame

$$p_2 = p_0 \frac{V}{\gamma V - \Delta V} \cdot \frac{T_2}{T_0}$$

ning tingimus paisupaagi ruumala jaoks avaldub seega

$$V \geq \frac{(p_1 + \Delta p) T_0}{(p_1 + \Delta p) T_0 - p_1 T_2} \cdot \frac{\Delta V}{\gamma} \approx 13,2 \text{ L.}$$

L178 Õhk ★★★★★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2006, G 8

Kuiva õhu tihedus

$$\rho_1 = \frac{\mu_1 p_0}{RT}.$$

Suhtelise niiskusega f auru tihedus

$$\rho' = f \rho_0 = \frac{\mu_2 p_2}{RT},$$

kus p_2 on auru osarõhk. Siit:

$$p_2 = \frac{\rho_0 f RT}{\mu_2}.$$

Kuna niiske õhu rõhk on õhu ja auru osarõhkude p_1 ja p_2 summa, siis

$$p_1 = p_0 - p_2 = p_0 - \frac{\rho_0 f RT}{\mu_2}.$$

Õhu tihedus (ilma auruta) sellel osarõhul

$$\rho'' = \frac{\mu_1 p_1}{RT} = \frac{\mu_1 p_0}{RT} - \frac{\mu_1 f \rho_0}{\mu_2}.$$

Niiske õhu tihedus

$$\rho_2 = \rho' + \rho'' = \frac{\mu_1 p_0}{RT} - \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} - 1 \right) f \rho_0.$$

Niiske ja kuiva õhu tiheduste suhe on seega

$$\begin{aligned} \frac{\rho_2}{\rho_1} &= 1 - \frac{(\mu_1 - \mu_2) f \rho_0 RT}{\mu_1 \mu_2 p_0} \\ &= 1 - \frac{(0,029 - 0,018) \cdot 0,9 \cdot 0,027 \cdot 8,31 \cdot 300}{0,029 \cdot 0,018 \cdot 10^5} \approx 0,987. \end{aligned}$$

L179 Gaasid ★★★★★

Autor: Oleg Košik, lõppvoor, 2007, G 6

Kogu protsessi jooksul on mõlema gaasi rõhud võrdsed ja konstantsed. Olgu vesiniku moolide arv n_0 . Kuna alguses on ka temperatuurid võrdsed, siis valemi $n = \frac{pV}{RT}$ põhjal näeme, et heeliumi moolide arv peab olema $3n_0$. Konstantsel rõhul avaldub molaarne erisoojus kui $C_P = \left(\frac{i}{2} + 1\right) R$ (see valem on tuletatav ka teistest rohkem tuntud valemitest). Vesinik on kaheaatomiline gaas, heelium aga üheaatomiline, seega $i_{\text{H}_2} = 5$, $i_{\text{He}} = 3$ ning järelikult $C_{\text{PH}_2} = 7/2R$ ja $C_{\text{PHe}} = 5/2R$.

Omandagu vesinik vahetult peale soojendamist temperatuuri, mis on algtemperatuurist ΔT_1 võrra kõrgem ning olgu terve süsteemi tasakaaluline lõpptemperatuur algtemperatuurist ΔT_2 võrra suurem. Heelium saab temperatuuride ühtlustumise ajal soojushulga $3n_0 C_{\text{PHe}} \Delta T_2$, mis peab võrduma vesiniku poolt ära antava soojushulgaga:

$$n_0 C_{\text{PH}_2} (\Delta T_1 - \Delta T_2) = 3n_0 C_{\text{PHe}} \Delta T_2,$$

ehk

$$\frac{7}{2} (\Delta T_1 - \Delta T_2) = 3 \cdot \frac{5}{2} \Delta T_2,$$

kust

$$\Delta T_2 = \frac{7}{22} \Delta T_1.$$

Kuna protsess on isobaariline ja nii alguses kui ka lõpus on gaaside temperatuurid võrdsed, siis kehtivad võrdused $pV_{\text{H}_2} = n_{\text{H}_2} RT$, $p(V_{\text{H}_2} + V_{\text{He}}) = (n_{\text{He}} + n_{\text{H}_2}) RT = 4n_0 RT$. Siit tulenevalt kehtib ka

$$p \Delta V_{\text{H}_2} = n_0 R \Delta T_1,$$

$$p \Delta (V_{\text{H}_2} + V_{\text{He}}) = 4n_0 R \Delta T_2.$$

Järelikult

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{\Delta (V_{\text{H}_2} + V_{\text{He}})}{\Delta V_{\text{H}_2}} = \frac{4\Delta T_2}{\Delta T_1} = \frac{28}{22}.$$

Seega lõpus on koormus algusega võrreldes $d_2 = \frac{28}{22} d_1 = 7$ cm kõrgemal, järelikult ta nihkub täiendavalt $\Delta d = d_2 - d_1 = 1,5$ cm ülespoole.

L180 Korsten ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, piirkonnavor, 2009, G 9

Ahjusuusse siseneva õhu rõhk p_1 on võrdne õhurõhuga ahjusuu kõrgusel ning korstnast väljuva õhu rõhk p_2 on võrdne õhurõhuga korstnasuu kõrgusel. Seega, $p_2 = p_1 - \rho_0 gh$, kus ρ_0 tähistab välisõhu tihedust. Bernoulli seaduse kohaselt kehtib seos

$$p_1 = p_2 + \rho gh + \rho \frac{v^2}{2} = p_1 - \rho_0 gh + \rho gh + \rho \frac{v^2}{2},$$

kus $\rho = T\rho_0/T_0$ on õhu tihedus korstnas ning v on otsitav kiirus. Seega,

$$v = \sqrt{2 \left(\frac{T}{T_0} - 1 \right) gh} \approx 3,5 \text{ m/s}.$$

Märkus. Ahjusuhu voolava õhu kiiruse võib lugeda tühiselt väikseks, sest voolava õhuga piirkonna ristlõike pindala on ilmselt hulga suurem korstna ristlõikepindalast.

Bernoulli seaduse võib tuletada ka energia jäävuse seadusest. Samuti lugeda õigeks impulsibalansi abil saadav tulemus (mis tuleb $\sqrt{2}$ korda väiksem), sest nõuti vaid hindamist.

L181 Terasanum ★★★★★

Autor: Valter Kiisk, piirkonnavoore, 2017, G 8

Anuma tugevuse määrab ilmselt seina paksus h . Selle leiame terase ruumala V_t abil, mille omakorda leiame anuma massi m ja terase tiheduse ρ kaudu. Eeldades, et h on hulga väiksem anuma raadiusest r , siis $V_t \approx 4\pi r^2 h$, seega $m = \rho V_t \approx 4\pi r^2 h \rho$, millest $h \approx m / (4\pi r^2 \rho) \approx 4 \text{ mm}$, mis kinnitab meie lähendi $h \ll d$ kehtivust. Gaasi rõhust tingitud mehaaniline tõmbepinge σ_1 anuma seintes ei tohi ületada väärtust $\sigma = 450 \text{ MPa}$. σ_1 leidmiseks lõikame anuma mõtteliselt kaheks poolsfääriks. Gaasi rõhk p tekitab kummalegi poolsfäärile teatud summaarse rõhumisjõu F , mis surub neid poolsfääre üksteisest eemale. F leidmiseks jaotame sfääri mõtteliselt kaheks eraldiseisvaks poolsfääri kujuliseks kinniseks piirkonnaks. Kumbagi piirkonda võime vaadelda tasaakaalus kinnise süsteemina ja seega on tema sisemised rõhu poolt tekitatud jõud tasakaalus. Sellest järeldame, et poolsfäärilise osa ringikujulisele põhjale pindalaga πr^2 mõjub sama summaarne jõud sisemise rõhu poolt, mis poolsfääri pinnale. Kuna need jõud on võrdsed, siis mõjub poolsfäärile summaarne jõud sisemise rõhu poolt $\pi r^2 p$ ja arvestades ka välist rõhku $F = \pi r^2 (p - p_0)$, kus p_0 on välisrõhk (101,3 kPa). Kuna anuma seina ristlõikepindala on $S = 2\pi r h$, siis $\sigma = F/S = r(p - p_0)/2h$. Siit $p = 2\sigma h/r + p_0 \approx 14,61 \text{ MPa}$. Eeldades, et tegemist on ideaalse gaasiga, siis anumas oleva gaasi ruumala, kui ta oleks samal temperatuuril, aga normaalarõhul, leiab valemi $p_0 V = p V_a$ abil, kus $V_a = \frac{4}{3}\pi r^3$ on anuma ruumala. Saame

$$V = \frac{p}{p_0} V_a \approx 9400 \text{ L.}$$

L182 Õhupall ★★★★★

Autor: Ardi Loot, lõppvoore, 2017, G 7

Enne ventiili avamist oli õhk temperatuuril T ja õhu rõhk oli p . Lisaks tähistame, et õhu ruumala oli enne ventiili avamist V ja moolide arv oli n . Gaasil oli soojusenergia $E_1 = c_V n T$. Kui kolvi pindala on S ja kolvi liikumise amplituud on L , siis Juku teeb konstantsel jõul F kolvi lõpuni alla vajutades tööd:

$$A_1 = FL = \frac{F}{S} SL = pV.$$

Analoogselt kehtib üldisemalt $\Delta A = p\Delta V$. Olgu pärast õhupalli täitumist õhupalli ruumala V_2 ja gaasi temperatuur selles T_2 . Kuna õhupalli kummi pinget lugesime tühiseks, siis on rõhk palli sees kogu aeg võrdne välise rõhuga p_0 (välja arvatud vahetult ventiili lähedal, kust õhk sisse voolab ja rõhk muutub läbi ventiili minekul,

aga vaatleme rõhku ventiilist eemal, õhupalli pinna lähedal). Et suruda õhupallist väljaspool olevat õhku eemale, teeb õhupallis olev gaas tööd $A_2 = p_0V_2$, arvestades seda, et rõhk õhupalli seinte lähedal on konstantselt väline õhurõhk p_0 . Lõppolekus on täidetud õhupallis soojuslik energia $E_2 = c_V nT_2$. Energia jäävuse tõttu peab soojusenergiate vahe võrduma summaarse tööga

$$E_2 - E_1 = A_1 - A_2 \quad \rightarrow \quad c_V nT_2 - c_V nT = pV - p_0V_2.$$

Töö märgid valisime arvestades seda, et Juku tehtud töö A_1 andis gaasile soojusenergiat juurde, aga gaas ise tegi töö A_2 , mis võttis soojusenergiat vähemaks. Nii alg- kui lõppolekus kehtib ideaalse gaasi seadus, vastavalt $pV = nRT$ ja $p_0V_2 = nRT_2$. Nende abil saame energia jäävuse seadusest kirjutada

$$c_V nT_2 - c_V nT = nRT - nRT_2 \quad \rightarrow \quad n(c_V + R)(T_2 - T) = 0.$$

Viimasest seosest saame $T_2 = T$. Õhutemperatuur ei muutunud.

L183 Kuumaõhupall ★★★★★

Autor: Ants Remm, piirkonnavor, 2014, G 10

Ideaalse gaasi seadusest avaldub õhu tihedus sõltuvalt temperatuurist kujul $\rho = \frac{p\mu}{RT}$. Raskusjõu ning üleslükkejõu tasakaalust saame

$$Mg = Vg(\rho_0 - \rho) = \frac{p\mu Vg}{R} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right),$$

kus $M = M_0 + \frac{1}{2}M_k$ on õhupalli keskmine mass lennu vältel ning $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ on õhupalli ruumala. Kuna õhupalli pooridest imbub välja soe õhk temperatuuril T , kuid sisenev õhk on väliskeskonna temperatuuril T_0 , tuleb sees olevat õhku pidevalt soojendada võimsusega

$$P = \lambda C_p (T - T_0).$$

Selle võimsuse saavutamiseks tuleb põletada propaani kiirusega $\frac{P}{k}$ ning kütuse lõppemiseks kuluv aeg on

$$t = \frac{M_k k}{P} = \frac{M_k k}{\lambda C_p (T - T_0)} = \frac{M_k k (p\mu V - MRT_0)}{\lambda C_p MRT_0^2} = 15 \text{ h.}$$

L184 Kerkiv õhupall ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2018, G 8

Seni, kui heelium pole võtnud enda alla veel kogu õhupalli ruumala, püsib tõstejõud konstante. Tõepoolest, $F = \rho_a g V_p$, kus ρ_a on õhu tihedus ja V_p – pallis oleva gaasi ruumala. Paneme tähele, et seni kuni palli nahk ei ole pinguldunud, on pallis oleva gaasi rõhk ja temperatuur võrdsed antud hetkel palli ümbritseva õhu rõhu ja temperatuuriga. Et $\rho_a = p\mu/RT$, kus p ja T tähistavad rõhku ja temperatuuri antud kõrgusel, ja samal ajal $V_p = \frac{mRT}{p\mu_p}$ (kus μ_p tähistab heeliumi molaarmassi ning m selle kogumassi), siis üleslükkejõud

$$F = \rho_a V_p g = mg \frac{\mu}{\mu_p}.$$

Üheprotsendiline vähenemine on nii väike, et me võime lugeda otsitava kõrguse võrdseks kõrgusega, kus eelpooltoodud tulemuseni jõudmiseks tehtud eeldus heeliumi ruumala kohta enam ei kehti, st see võrdsustub V_0 -ga. Gaasi olekuvõrrand ütleb, et $V \propto T/p$ (\propto tähistab võrdelisust); arvestades, et pallis oleva heeliumi ja ümbritseva õhu temperatuurid ja rõhud on võrdsed, võime järeldada, et see on kõrgus, mille juures on õhu jaoks suhe T/p kasvanud 2 korda võrreldes maapinnalähedase olukorraga.

Mõttelise õhuruumala V jaoks on suhe T/p võrdeline V -ga. Seega peab mõttelise õhuruumala kerkimisel maapinnalt antud kõrguseni selle ruumala kasvama kaks korda. Et tegemist on adiabaatilise atmosfääriga, siis õhuruumala V kerkimisel järgivad selle karakteristikud adiabaadiseadust $pV^\gamma = \text{Const}$; kombineerides seda ideaalse gaasi seadusega $pV/T = \text{Const}$ saame $V^{\gamma-1}T = \text{Const}$. Et V peab kasvama 2 korda, siis T peab kahanema $2^{\gamma-1} = 2^{0.4}$ korda. Seega

$$\frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\mu g h}{R} = T_0(1 - 2^{-0.4}),$$

millest

$$h = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{R}{\mu g} T_0(1 - 2^{-0.4}) \approx 7250 \text{ m}.$$

L185 Raketimootor ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2010, G 10

Adiabaatilisel paisumisel muutub gaasi sisenergia $c_V T_0$ osaliselt joa kineetiliseks energiaks $\mu v^2/2$ (avaldised on siin ühe mooli gaasi jaoks); energia jäävuse seaduses tuleb siiski arvestada ka põlemiskambris juurde tekkivate gaaside poolt tehtavat tööd $p_0 V_0$ ning äravoolavate gaaside pidurdavat tööd $p_1 V_1$, mis on olekuvõrrandi tõttu vastavalt võrdsed RT_0 -ga ja RT_1 -ga. Seega,

$$c_V T_0 + RT_0 = c_V T_1 + RT_1 + \mu v^2/2 \Rightarrow v^2 = 7R(T_0 - T_1)/\mu.$$

Veojõud on võrdne ajaühikus eemalduva gaasijoa impulsiga,

$$F = \dot{m}v = (\rho_1 S v) \cdot v = \rho_1 S v^2 = 7S \frac{R\rho_1 T_1}{\mu} \left(\frac{T_0}{T_1} - 1 \right).$$

Arvestades gaasi olekuvõrrandit ja lähendust $T_0 \gg T_1$ saame lõpptulemuseks

$$F = 7Sp_1T_0/T_1.$$

L186 Kiil ★

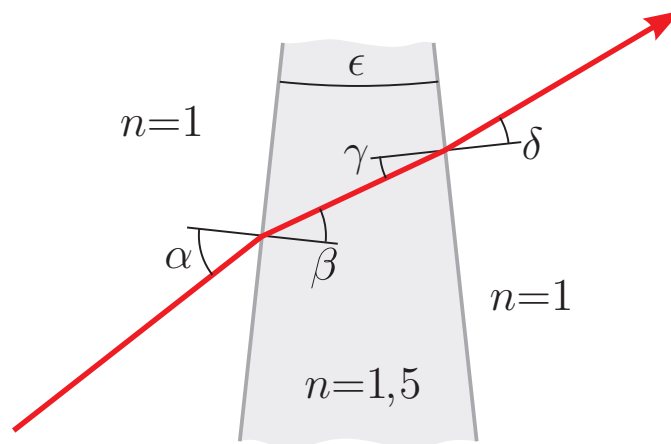
Autor: Valter Kiisk, lõppvoor, 2007, G 3

Kõik nurgad on tähistatud järgneval joonisel. α on meelevaldne (kuigi $\alpha \ll 1$).
 $\beta = \alpha/n$. $\gamma = \beta - \epsilon$. $\delta = n\gamma = \alpha - n\epsilon$. Kiire kõrvalekaldenurk

$$\phi = (\alpha - \beta) - (\delta - \gamma) = (\alpha - \delta) + (\gamma - \beta) = n\epsilon - \epsilon = \epsilon(n - 1).$$

Teades, et $\phi = 5 \text{ mm}/2 \text{ m} = 0,0025 \text{ rad}$, saame

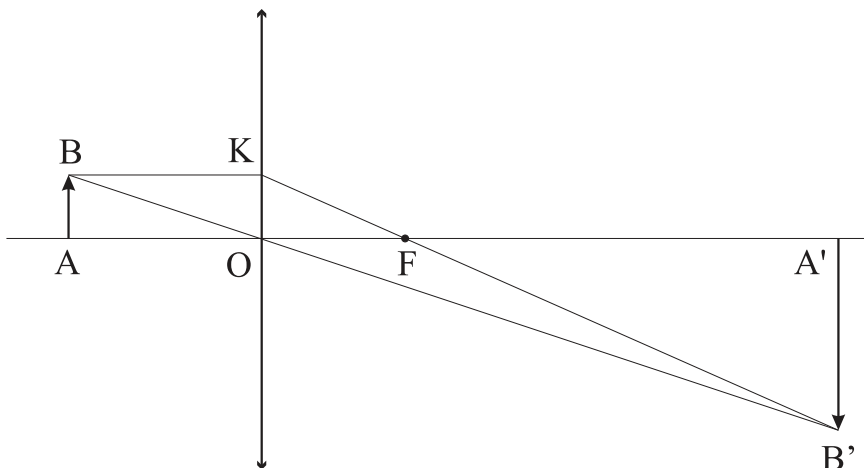
$$\epsilon = \frac{\phi}{n - 1} = 0,005 \text{ rad} = 0,29^\circ.$$



L187 Lääts ★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2009, G 2

Kuna kujutis tekib ekraanile, siis on kujutis tegelik ning tegemist on koondava läätsesega.



Olgu a kaugus esemest läätseni, k kaugus kujutisest läätseni ning f läätses fookuskaugus. Et kujutis on esemest 3 korda suurem, siis sarnastest kolmnurkadest ABO ja $A'B'O$

$$\frac{k}{a} = 3 \Rightarrow k = 3a.$$

Kujutis tekib kugusele $d = 24$ cm, seega

$$a + k = 4a = 24 \text{ cm} \Rightarrow a = 6 \text{ cm}, k = 18 \text{ cm}.$$

Nüüd läätses valemist

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}$$

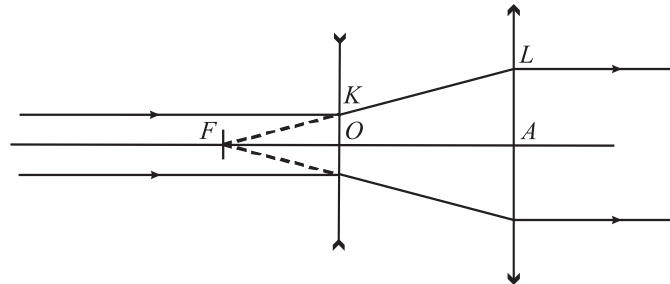
leiame, et $f = 4,5$ cm.

Märkus. Läätses valemi asemel võib fookuskauguse leidmiseks kasutada sarnaseid kolmnurki $A'B'F$ ja OKF . Saame

$$\frac{k-f}{f} = 3 \Rightarrow f = \frac{k}{4} = 4,5 \text{ cm}.$$

L188 Kiirtekimbu laiendi ★

Autor: Koit Timpmann, piirkonnavor, 2010, G 3



Kuna esimese läätsede optiline tugevus on negatiivne, on see nõgus. Selleks, et sisenev paralleelne valgusvihk püsiks paralleelne peale süsteemist väljumist, peavad läätsede fookused ühtima. Olgu vastav ühine fookus F . Lisaks olgu läätsede keskpunktid O ja A ning siseneva kiirtekimbu kõige äärmise kiire löikepunktid läbi läätsede K ja L .

Sellisel juhul saame kolmnurkade KOF ja LAF sarnasusest, et

$$\frac{|LA|}{|KO|} = \frac{|AF|}{|OF|}.$$

Kuna $|AL| = 2,5|OK|$, siis $|AF| = 2,5|OF|$, ehk läätsede vahekaugus on

$$|OA| = |AF| - |OF| = 1,5|OF| = 1,5 \left| \frac{1 \text{ m}}{-20} \right| = 7,5 \text{ cm}.$$

L189 Segadus optikalaboris ★

Autor: Roland Matt, lahtine, 2011, G 1

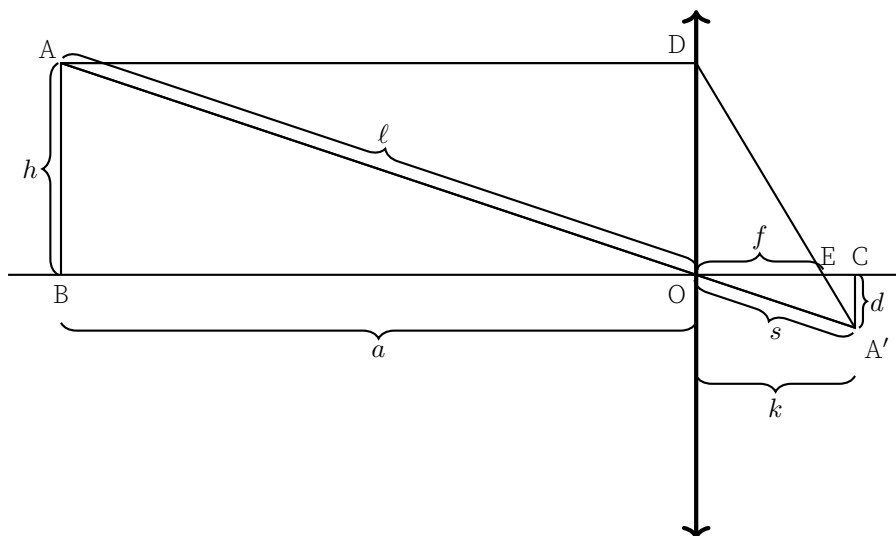
Selleks, et kiirtekimp laieneks ja jääks paralleelseks, pidi optik paigutama nõgusläätsede kumerläätsede ette niimoodi, et läätsede fookused ühtiksid nõgusläätsede ees. Tähistades nõgusläätsede fookuskauguse f_n ja vastavalt kumerläätsel f_k , saame kirja panna $d = f_k - f_n$. Vaatame üht kiirt, mis langeb nõgusläätsel paralleelselt läätsede optiliste peatelgedega, läätsede keskpunktist kaugusel x_1 . Teine kiir liikugu lihtsuse mõttes mööda süsteemi optilist peatelge. See kiir läbib kumerläätsede tema keskpunktist kaugusel x_2 . Tekkivatest sarnastest kolmnurkadest saame kirja panna

$$\frac{x_1}{f_n} = \frac{x_2}{f_k} = \frac{x_2}{f_k - d},$$

millest

$$f_k = \frac{x_2 d}{x_2 - x_1} = 52 \text{ cm}, \quad f_n = f_k - d = 20 \text{ cm}.$$

Optilised tugevused saame, võttes fookuskauguste pöördväärtused: $D_k \approx 1,9$ dptr ja $D_n = 5$ dptr.



Sarnastest kolmnurkadest $\triangle ABO$ ja $\triangle A'CO$ saame $\frac{h}{l} = \frac{d}{s}$. Kuna $l + s = 15$ cm, siis:

$$\frac{4 \text{ cm}}{l} = \frac{1 \text{ cm}}{15 \text{ cm} - l} \rightarrow l = 12 \text{ cm}, s = 3 \text{ cm}.$$

Täisnurksest kolmnurgast $\triangle A'CO$ saame $k^2 = \sqrt{s^2 - d^2}$. Sarnastest kolmnurkadest $\triangle DOE$ ja $\triangle A'CE$ saame:

$$\frac{h}{f} = \frac{d}{k - f} \rightarrow f = \frac{hk}{h + d} \approx 2,26 \text{ cm}.$$

Alternatiivne lahendus

l ja s leiame sarnaselt eelmisele lahendusele. Seejärel leiame kujutiste kaugused läätse tasandist: $a = \sqrt{l^2 - h^2}$, $k = \sqrt{s^2 - d^2}$. Fookuskauguse leiame läätse valemi abil:

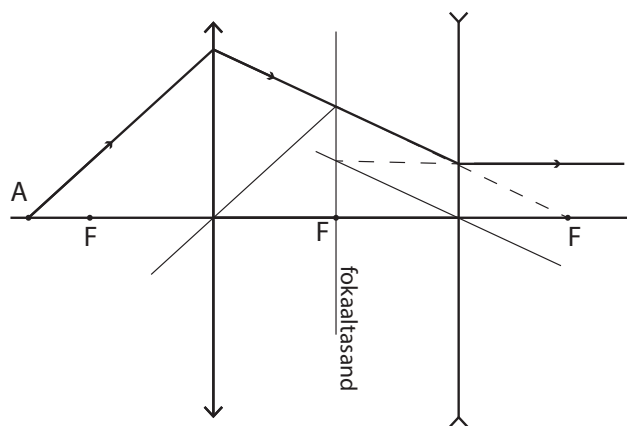
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f} \rightarrow f = \frac{ak}{a + k} \approx 2,26 \text{ cm}.$$

L191 Valgusallika kujutis ★

Autor: EFO žürii, lahtine, 2017, G 2

Valgusallika kujutist ei tekigi (või tekib lõpmatusse), kuna pärast teise läätse läbimist on valguskiired paralleelsed optilise peateljega.

Valguskiired on paralleelsed, kuna valgusallika A kujutis läbi kumerläätse tekiks nõgusläätse parempoolsesse fookusesse. Seega kumerläätse läbinud kiired langevad nõgusläätsele nii, et nad koonduksid parempoolses fookuses. Kuna nõguslääts hajutab valgust, siis on kiired pärast nõgusläätse läbimist paralleelsed, mistõttu valgusallika kujutist ei teki (või tekib see lõpmatusse).

**L192 Piiritusetehas ★**

Autor: Aigar Vaigu, piirkonnavaor, 2017, G 4

Murdumiseseaduse järgi kehtib valguse murdumisel

$$n_0 \sin(\alpha_0) = n_1 \sin(\alpha_1),$$

kus n_0 ja n_1 on vastavalt esimese ja teise keskkonna murdumisnäitajad ning α_0 ja α_1 on vastavalt langemis- ja murdumisnurk. Seda valemit saab iteratiivselt jätkata järgmise murdumise jaoks kolmanda keskkonna piiril, kui keskkonnad on paralleelsete kihtidena:

$$n_0 \sin(\alpha_0) = n_1 \sin(\alpha_1) = n_2 \sin(\alpha_2) = \dots$$

Selle abil näeme, et kehtib $\sin(\alpha_j) = \frac{n_0}{n_j} \sin(\alpha_0)$. See tähendab seda, et kiire murdumisnurk sõltub ainult hetke keskkonna murdumisnäitajast ja mitte sellest, kas ja kui mitu erinevat kihti varasemalt on läbitud. Seetõttu saame ignoreerida kanalit ümbritsevat klaasist või muust materjalist kihti, arvutamaks kiire nurka kanalisis. Samuti, kuna ainult piirituse ja vee segu murdumisnäitaja muutub, siis ainult kanalisis on kiirte liikumisnurgad erinevad. Mujal on kiire liikumine täpselt sama,

ainult pärast segu läbimist on kiir nihutatud, kui segu murdumisnäitajat muuta. Segus kehtib:

$$\sin(\alpha_{\text{segu}}) = \frac{n_0}{n_{\text{segu}}} \sin \alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{2}n_{\text{segu}}},$$

kus $\sin(\alpha_0) = 1/\sqrt{2}$ ja õhus $n_0 = 1$. Kiire nihe kanali sees piki kanali suunda on lihtsa geomeetria abil

$$y = d \tan(\alpha_{\text{segu}}).$$

Kasutades seost $\tan(\phi) = \frac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)} = \frac{\sin(\phi)}{\sqrt{1-\sin(\phi)^2}}$ saame

$$y = d \frac{\sin(\alpha_{\text{segu}})}{\sqrt{1-\sin(\alpha_{\text{segu}})^2}} = \frac{d}{\sqrt{2}\sqrt{n_{\text{segu}}^2 - \frac{1}{2}}}.$$

Nüüd leiame y kahel juhul, kui $X = 0,40$ siis $y = 6,184$ mm ja kui $X = 0,85$ siis $y = 6,104$ mm. Saame y erinevuseks

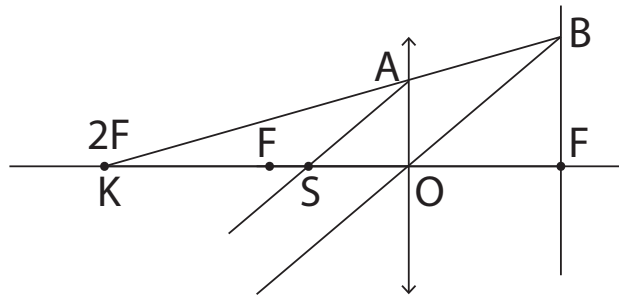
$$|\Delta y| \approx 80 \mu\text{m}.$$

L193 Kaks valgusallikat ★

Autor: EFO žürii, piirkonnavoore, 2018, G 2

Esimene lahendus

Kui optilisel peateljel paiknev valgusallikas asub läätsesest 18 cm kaugusel, mis on võrdne kahekordse fookuskaugusega, siis selle valgusallika kujutis asub teisel pool läätsesest samuti kahe fookuskaugusel ehk 18 cm kaugusel. Et kahe valgusallika kujutised kattuksid, peab teine kujutis olema näilik. Konstrueerime valgusallika asukohta, kui kujutise asukoht on teada.



Sarnastest kolmnurkadest $\triangle KAO$ ja $\triangle KBF$ saame, et

$$\frac{AO}{BF} = \frac{KO}{KF} = \frac{2f}{3f} = \frac{2}{3}.$$

Teisest sarnaste kolmnurkade paarist $\triangle SAO$ ja $\triangle OBF$ saame, et

$$\frac{AO}{BF} = \frac{OS}{FO} = \frac{b}{f},$$

kus b on teise valgusallika kaugus läätsest. Ühendades kaks seost, saame

$$\frac{KO}{KF} = \frac{OS}{FO} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{b}{f} \Rightarrow b = \frac{2f}{3} = 6 \text{ cm.}$$

Teine valgusallikas peab asuma läätsest 6 cm kaugusel ning kahe valgusallika kaugus teineteisest on 6 cm + 18 cm = 24 cm.

Teine lahendus

Sarnaste kolmnurkade asemel saame kasutada läätse valemit. Teades, et valgusallikas asub läätsest $a = 18$ cm kaugusel ning läätse fookuskaugus on $f = 9$ cm, saame leida kujutise kauguse k läätsest:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f} \Rightarrow k = 18 \text{ cm.}$$

Teise valgusallika kujutis peab olema samuti samas punktis, kus esimese valgusallika oma, seega peab teise valgusallikaga tekitatud kujutis olema näiline ning valgusallikas peab asuma kujutisega samal pool läätse. Kasutades läätse valemit, leiame teise valgusallika asukoha

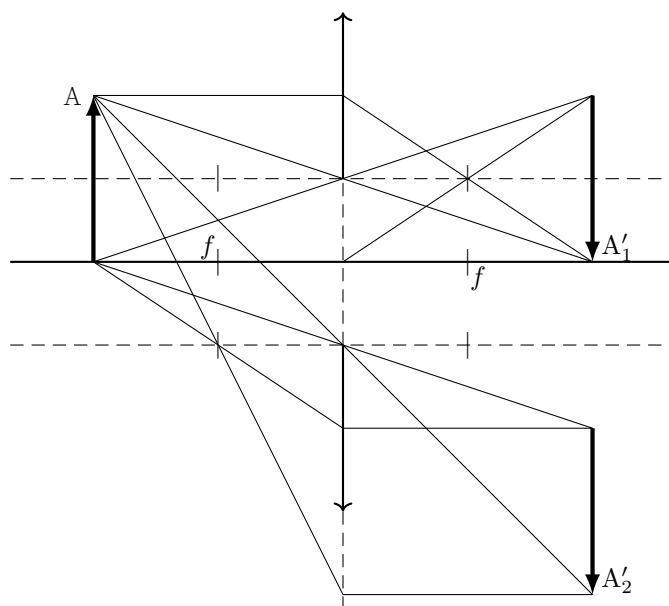
$$\frac{1}{a} - \frac{1}{k} = \frac{1}{f} \Rightarrow a = 6 \text{ cm.}$$

Teine valgusallikas peab asuma läätsest 6 cm kaugusel ning kahe valgusallika kaugus teineteisest on 6 cm + 18 cm = 24 cm.

L194 Poolitatud lääts ★

Autor: Hans Daniel Kaimre, lõppvoor, 2018, G 1

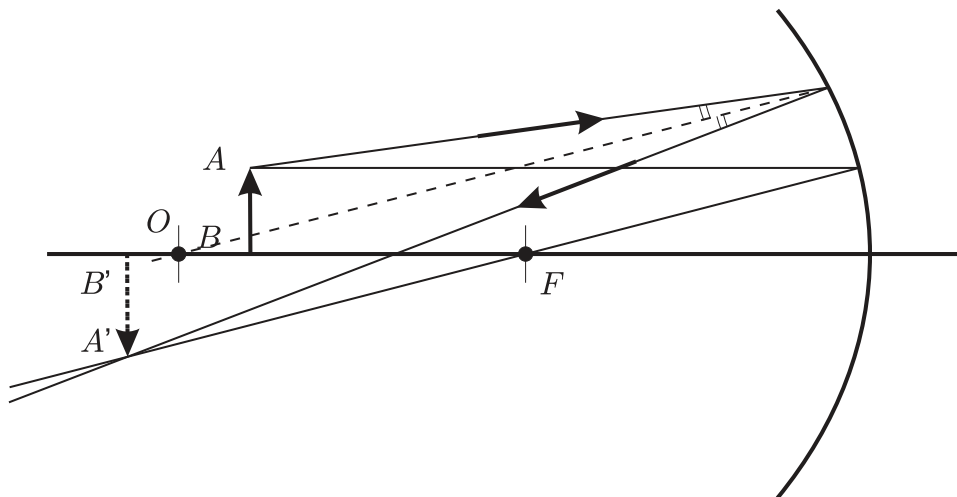
Ülesande püstituses on öeldud, et esialgse skeemi korral on lääts objektist ja kujutisest võrdsel kaugusel. Selline olukord realiseerub, kui nii objekt kui ka kujutis asuvad läätses kahekordses fookuskauguses, kusjuures süsteemi suurendus on 1 (objekt ja kujutis on sama suured). Läätses poolekslõikamisel ja poolde nihutamisel joonisel toodud skeemi järgi saame kaks uut läätses, mille fookuskaugused on endiselt samad, kuid optilised peateljed on nihkes. Seega tekib ekraanile kaks samasuurt kujutist kui enne, mis on omavahel vertikaalselt nihutatud ning mille intensiivsus on võrreldes esialgse kujutisega tunduvalt vähenenud. Seejuures paneme konstrueerimisel tähele, et kuigi realselt läätses väljapool olevast piirkonnast kiiri läbi ei lähe, saame neid siiski kujutise konstrueerimiseks kasutada.



L195 Nõguspeegel ★★

Autor: EFO žürii, lõppvoor, 2006, G 2

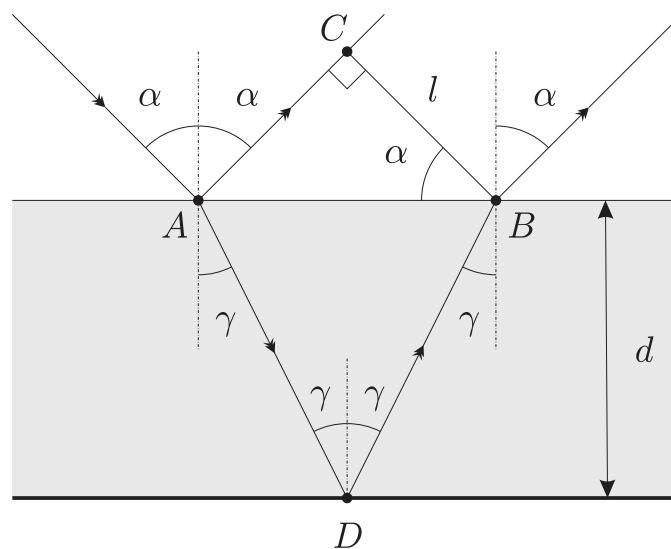
Jooniselt antud kiire kahe osa pikenduste lõikepunkt vastab nõguspeegli pinnale ning kiirte nurgapoolitaja ja optilise peatelje lõikepunkt annab nõguspeegli kõverusraadiuse keskpunkti O . Fookuse leidmiseks paneme tähele, et nõguspeegli fookuskaugus on pool kõverusraadiusest, kus kõverusraadiuse saame mõõta jooniselt. Edasi saame fookuse kaudu konstrueerida teise punktist A alguse saanud kiire käigu ning määrata eseme kujutise asukoha.



L196 Plaat ★★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2007, G 4

Kiirte käik plaadis on näidatud joonisel.



Nurk $\angle ABC$ täisnurkses kolmnurgas ACB on α , seetõttu $|AB| = l / \cos \alpha$. Teisest küljest, kolmnurgast ADB on näha, et $|AB| = 2d \tan \gamma$. Nurgad α ja γ on seotud omavahel murdumisreedusega:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = n.$$

Lahendades need võrrandid, saame

$$n = \frac{\sin \alpha}{\sin \left(\arctan \left(\frac{l}{2d \cos \alpha} \right) \right)} = \sin \alpha \sqrt{1 + \left(\frac{2d \cos \alpha}{l} \right)^2} \approx 1,8.$$

L197 Kärbes ★★

Autor: Taavi Pungas, lahtine, 2012, G 4

Kärbe trajektoor lühikese aja t jooksul on sirgjoon pikkusega $h = vt$. Konstrueerime joonisel kärbe kujutise trajektoori. Sarnastest kolmnurkadest saame leida kujutise trajektoori pikkuse h' :

$$\frac{h}{a-f} = \frac{h'}{f} \Rightarrow h' = \frac{f}{a-f} h.$$

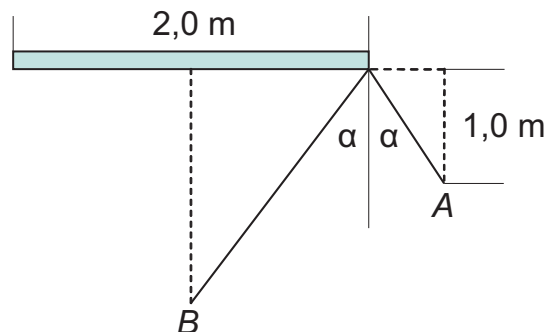
Kujutise kiirus on seega

$$v' = \frac{h'}{t} = \frac{f}{a-f} \frac{h}{t} = \frac{f}{a-f} v.$$

ning see on vastassuunaline kärbe kiirusega.

L198 Peegel ★★

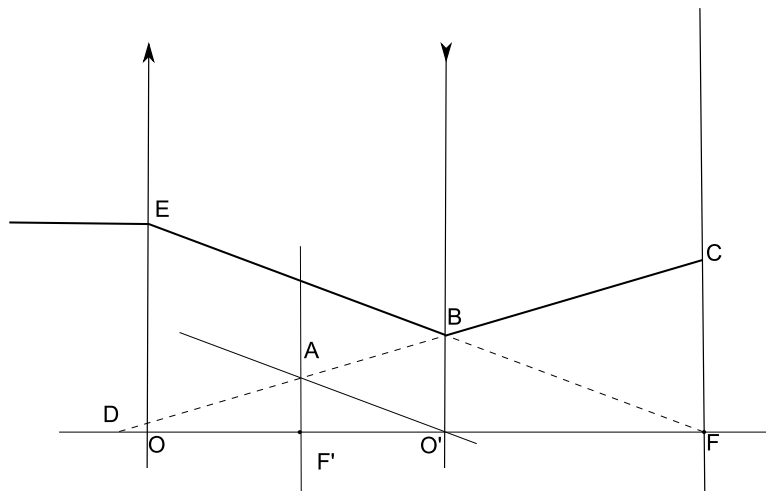
Autor: Oleg Košik, piirkonnavor, 2012, G 1



Joonisel on kujutatud hetk t , mil tuttavad märkavad teineteist. Selleks hetkeks läbis A teepikkuse $2 - 1 \cdot t$ ning B läbis teepikkuse $3,5 - 1 \cdot t$. Sarnastest kolmnurkadest saame

$$\frac{1}{3,5 - t} = \frac{2 - t}{1}.$$

Tekib ruutvõrrand, mille lahenditeks on $t = 1,5$ s ja $t = 4,0$ s, neist vastuseks on esimene lahend.



Kogu pilt on optilise peatelje suhtes sümmeetriline, tänu sellele saame tegeleda ainult ühe poolega. Konstrueerime kiirte käigu, teades et kõigi nõgusläätse läbivate paralleelsete kiirte pikendused lõikuvad fokaaltasandil.

Joonisel on mõned meid huvitavad sarnased kolmnurgad:

$$\triangle AF'D \sim \triangle BO'D \sim \triangle CFD$$

ja

$$\triangle EOF \sim \triangle AF'O' \sim \triangle BO'F.$$

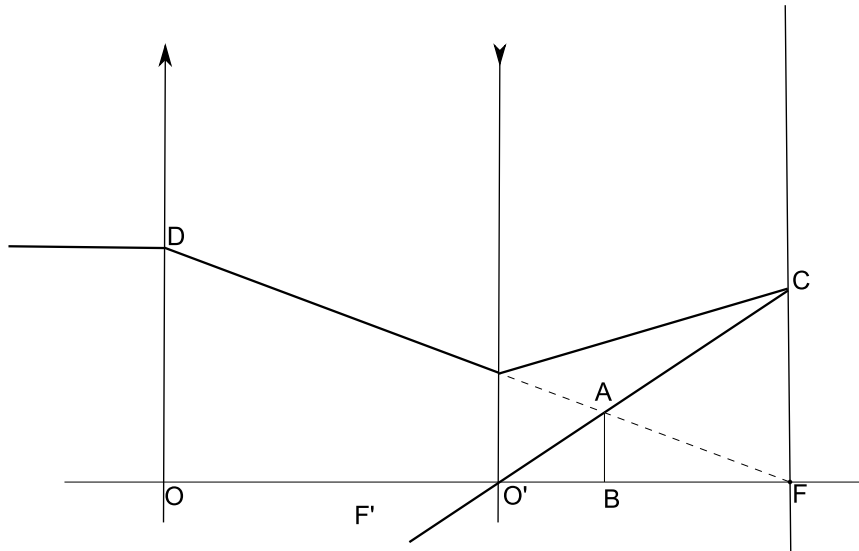
Lisaks teame osade lõikude pikkusi: $|EO| = R$, $|OF| = f_1$, $|F'O'| = f_2$ ja $|CF| = r$. Seda teades saab moodustada neljast võrrandist koosneva lineaarvõrrandisüsteemi.

$$\begin{cases} \frac{|EO|}{|OF|} = \frac{|AF'|}{|F'O'|} \\ \frac{|EO|}{|OF|} = \frac{|BO'|}{|O'F|} \\ \frac{|AF'|}{|F'D|} = \frac{|CF|}{|FD|} \\ \frac{|AF'|}{|F'D|} = \frac{|BO'|}{|O'D|}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{R}{f_1} = \frac{|AF'|}{f_2} \\ \frac{R}{f_1} = \frac{|BO'|}{\frac{f_1}{2}} \\ \frac{|AF'|}{|O'D|-f_2} = \frac{r}{\frac{f_1}{2}+|O'D|} \\ \frac{|AF'|}{|O'D|-f_2} = \frac{|BO'|}{|O'D|}. \end{cases}$$

Pärast süsteemi lahendamist saame tulemuseks $f_2 = \frac{R}{4r} f_1$.

Alternatiivne lahendus



Selles lahenduses kasutame läätse valemit $-\frac{1}{f} = \frac{1}{a} - \frac{1}{k}$. f ees on miinus, kuna tegemist on nõgusläätseliga, ja k ees on miinus, kuna tegemist on näiva kujutisega. Kasutades kiirte pööratavuse printsiipi vaatame hoopis olukorda, kus tekib objektist CF näiv kujutis AB . Lisaks kasutame kolmnurkade sarnasust: $\Delta CFO' \sim \Delta ABO'$ ja $\Delta DOF \sim \Delta ABF$.

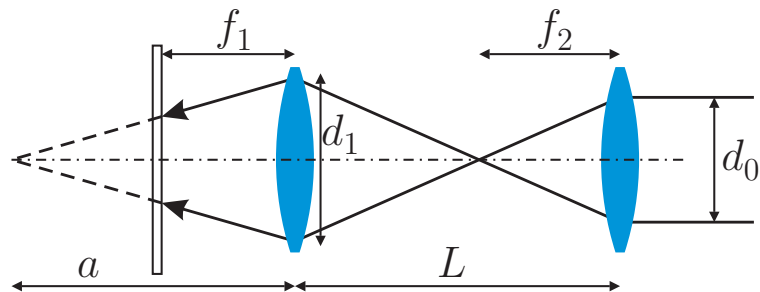
$$\begin{cases} \frac{|CF|}{|FO'|} = \frac{|AB|}{|BO'|} \\ \frac{|DO|}{|OF|} = \frac{|AB|}{|BF|} \\ -\frac{1}{f_2} = \frac{1}{|FO'|} - \frac{1}{|BO'|}, \\ \begin{cases} \frac{r}{f_1} = \frac{|AB|}{|BO'|} \\ \frac{R}{f_1} = \frac{|AB|}{f_2 - |BO'|} \\ -\frac{1}{f_2} = \frac{1}{f_1} - \frac{1}{|BO'|}. \end{cases} \end{cases}$$

Selle võrrandisüsteemi lahendamisel saame $f_2 = \frac{R}{4r} f_1$.

L200 Valgustamine ★★

Autor: Valter Kiisk, lõppvoor, 2015, G 2

Vaatleme kõige äärmiste valguskiirte liikumist läbi süsteemi.



Pärast lisaläätse läbimist koonduvad valguskiired punktiks lisaläätsest kaugusel f_2 ehk kaugusel $L - f_2$ algsest läätsesest. Läätses valemi

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{L - f_2} = \frac{1}{f_1}. \quad (1)$$

põhjal tekib sellest punktist omakorda punktkujutis kaugusele a esimesest läätsesest. Sarnastest kolmnurkadest saame veel kaks võrrandit:

$$\frac{d_1}{d_0} = \frac{L - f_2}{f_2}, \quad (2)$$

$$\frac{d}{a - f_1} = \frac{d_1}{a}. \quad (3)$$

Kahest esimesest võrrandist saame suuruse $\frac{1}{L - f_2}$ avaldamisel

$$\frac{1}{a} + \frac{d_0}{d_1 f_2} = \frac{1}{f_1} \implies \frac{d_0}{d_1 f_2} = \frac{a - f_1}{a f_1}. \quad (4)$$

Viimasest kahest võrrandist saame avaldada suuruse $d_1(a - f_1)/a$, mille põhjal saame $d = d_0 \frac{f_1}{f_2}$. Seega valguslaigu suurus ekraanil sõltub ainult lisatud läätses fookuskaugusest, aga mitte läätsedevahelisest kaugusest L . Valguslaik diameetriga 2 cm tekib kui $f_2 = f_1 d_0 / d = 2$ cm.

L201 Valgusvihk ★★

Autor: Mihkel Kree, piirkonnavor, 2005, G 5

Ülesande lahendamisel osutub tarvilikuks teadmine, et läätsede optilise teljega paralleelselt langevad kiired (või murtud kiirte pikendused nõgusa läätse puhul) koonduvad fookuses punktiks. Seega on ainus moodus kahe läätse abil saada süsteem, mis teisendab paralleelse kimbu uuesti paralleelseks kimbuks selline, et läätsede fookused ühtivad.

Esimene võimalus: kasutame kahte kumerläätsed. Et kimbu diameeter suureneks, peab väiksema fookuskaugusega lääts olema eespool. Lihtsast geometriast (sarnased kolmnurgad) ilmneb, et tekkiva kiirtekimbu diameeter on $D = df_2/f_1 = 2d$. Teine võimalus: kasutame ühte kumerat ja ühte nõgusat läätsed. Kui kumer lääts oleks esimene, siis kimbu diameeter väheneks. Seega paigutame nõgusa läätse kumera läätse ette. Nõgus lääts tekitab näilise kujutise. Kumera läätse asetame nii, et selle fookus ühtiks nõgusläätsed tekitatud ebakujujutise asukohaga. Sarnastest kolmnurkadest leiame, et tekib kiirekimp diameetriga

$$D = \left| \frac{f_{\text{kumer}}}{f_3} d \right|.$$

D omab suurimat väärtust, kui kasutame suurema fookuskaugusega läätse, $f_{\text{kumer}} = f_2$. Niisiis

$$D = \left| \frac{f_2}{f_3} d \right| = 4d.$$

Näeme, et kiirtekimbu laiust saab suurendada maksimaalselt neli korda, kasutades selleks nõgusläätsed ja kumerläätsed ($f_2 = 40 \text{ cm}$) nii, et nende fookused ühtiksid.

L202 Biprisma ★★

Autor: Mihkel Kree, piirkonnavor, 2006, G 6

Valguskiir siseneb prismasse murdumata, sest kiir on normaali sihiline. Küll aga toimub murdumine prismast väljudes. Kuna terve tahu ulatuses on langemisnurk sama, tekitab üks tahk paralleelse kiirtekimbu (vt joonist). Kuna meil on kaks murdvat tahku, on esialgne kiirtekimp pärast prisma läbimist jagunenud kaheks.

On lihtne märgata, et langemisnurk, millega kiired langevad murdvale tahule, on α . Vastavalt murdumisseadusele saame murdumisnurga γ jaoks seose:

$$\sin \gamma = n \sin \alpha.$$

Väikeste nurkade jaoks lihtsustub see avaldis: $\gamma = n\alpha$. Kiir kaldus seega oma esialgsest sihist kõrvale nurga

$$\beta = \gamma - \alpha = (n - 1)\alpha$$

võrra.

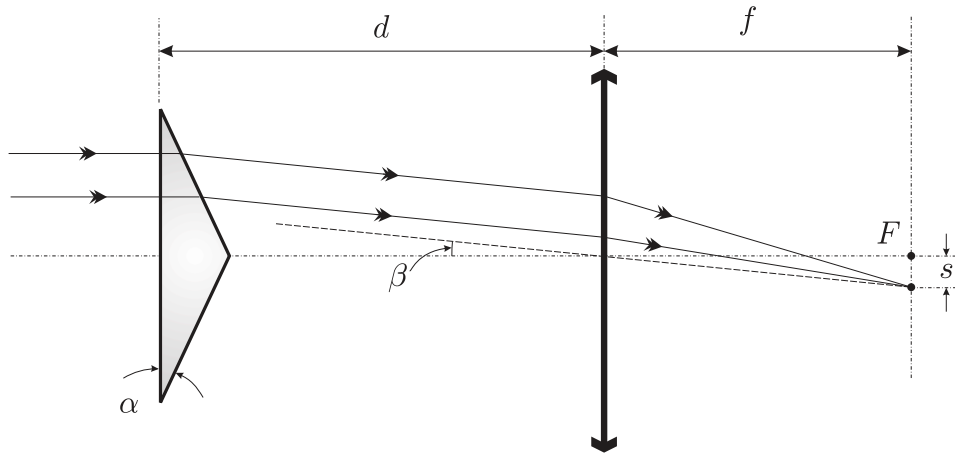
Teame, et paralleelne kiirtekimp koondub kumerläätsed fokaaltasandis. Seega tekib fokaaltasandis asuvale ekraanile sümmeetriliselt kaks valgustäppi, teine teisele poole optilist peatelge. Arvutame ka nende kaugused peateljest. Selleks kasutame läbi läätse keskpunkti tõmmatud kiirt, mis asetseb peateljega nurga β all.

Täisnurksest kolmnurgast saame valguspunkti kauguse peateljest:

$$s = f \tan \beta \approx f\beta = (n - 1)\alpha f.$$

Ilmselt ei sõltu ekraanil tekkiv pilt kaugusest d .

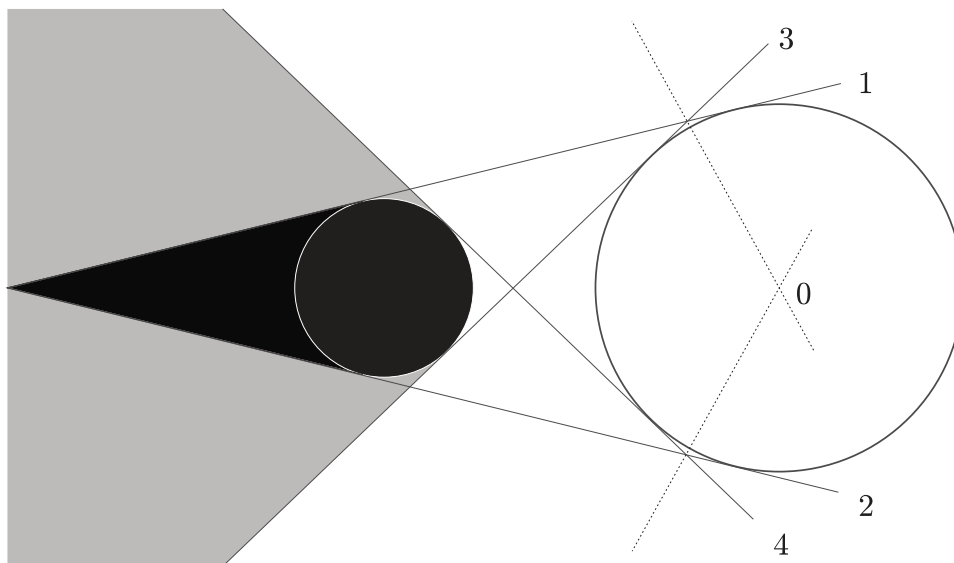
Et olla päris täpne, tuleks siiski märkida, et d kasvades piisavalt suureks hakkavad täpid muutuma tuhmimaks kuni lõpuks kaovad üldse, sest siis kiired enam läätse ei läbi.



L203 Varjud ★★

Autor: Jaak Kikas, piirkonnavor, 2007, G 6

Kanname joonisele varjukoonuste piirjoonte pikendused (sirged 1-4). Valgusallikaks oleva kera lõikejoon joonise tasandiga on ringjoon, mille puutujateks on kõik need sirged. Selle keskpunkti leidmiseks konstrueerime sirgete 1-3 ja 2-4 poolt moodustatud nurkade poolitajad (punktiirjooned joonisel), nende lõikepunkt 0 on otsitava ringjoone keskpunktiks. Ringi raadiuse leidmiseks konstrueerime punktist 0 mõnele sirgetest 1-4 keskristssirge.



L204 Veealune valgus ★★

Autor: Jaak Kikas, lõppvoor, 2008, G 5

Allika heledus on ligikaudselt võrdeline vaatleja silmaava nurkläbimõõdu ruuduga allika asukohast vaadatuna. Olgu α ja α_0 nurkläbimõõdud vastavalt veega täidetud ja veeta basseinis. Jooniselt

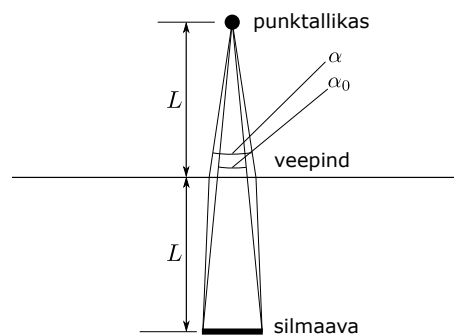
$$2L \tan(\alpha_0/2) = L \tan(\alpha/2) + L \tan(\beta/2),$$

kus langemis- ja murdumisnurkade $\alpha/2$ ja $\beta/2$ vahel kehtib seos

$$\frac{\sin(\alpha/2)}{\sin(\beta/2)} = n.$$

Kasutades väikeste nurkade lähendust $\tan \alpha \approx \sin \alpha \approx \alpha$, saame

$$\left(\frac{\alpha}{\alpha_0}\right)^2 = \frac{4n^2}{(n+1)^2}.$$



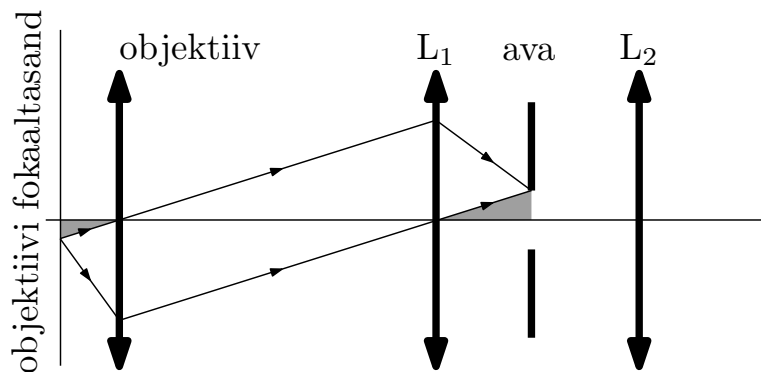
Arvestades ka peegeldumist veepinnalt, saame heleduste suhteks

$$\frac{I}{I_0} = \left(\frac{\alpha}{\alpha_0}\right)^2 (1-r) = \frac{4(1-r)n^2}{(n+1)^2} = 1,28.$$

L205 Konfokaalne mikroskoop ★★

Autor: Mihkel Rähn, lõppvoor, 2009, G 7

Lahenduse optiline skeem on toodud joonisel. Konstrueerimisel tuleb läätsede vahelised kiired joonestada paralleelsed ja läätsede keskpunkte läbivad. Sellisel juhul annavad need kiired eseme ja ava tasandil vastavalt eseme ja kujutise asukohad.



Värvitud kolmnurgad on NNN tunnuse järgi sarnased. Seetõttu kehtib võrdus

$$\frac{d}{2f_1} = \frac{r_{\text{ese}}}{f_{\text{obj}}},$$

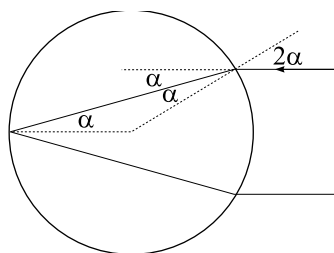
millest

$$r_{\text{ese}} = \frac{d \cdot f_{\text{obj}}}{2f_1}.$$

L206 Klaaskuulike ★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2010, G 4

Tagasipeegelduv kiir peegeldub kuulikeses nii, nagu näidatud joonisel. Murdumis- seadusest väikeste nurkade jaoks saame $n = \sin 2\alpha / \sin \alpha \approx 2$.



L207 Optiline kiud ★★

Autor: Andreas Valdmann, lahtine, 2016, G 4

Pikas optilises kius jäävad levima vaid sellised kiired, mille jaoks toimub südamikü ja kätte lahutuspinna täielik sisepeegeldumine. Kui valgus langeb lahutuspinna täieliku sisepeegeldumise piirnurgast väiksema nurga all, siis toimub korraka nii peegeldumine kui ka murdumine. Pärast mitmeid peegeldusi väheneb nende kiirte intensiivsus praktiliselt nullini, sest peaaegu kogu valgus on kiu külgedelt välja murdunud. Täieliku sisepeegeldumise piirnurk

$$\alpha = \arcsin(n_2/n_1) = 80,5^\circ.$$

Piirnurgale vastavad kiired levivad kiu telje suhtes nurga $90^\circ - \alpha$ all. Pärast kiu otsast väljamurdumist on nende kiirte nurk kiu telje suhtes

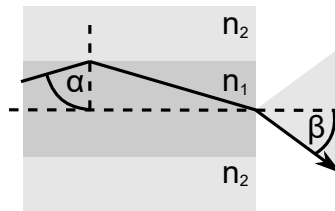
$$\beta = \arcsin[n_1 \sin(90^\circ - \alpha)] = \arcsin[n_1 \cos(\alpha)].$$

Valguskoonuse tipunurk θ on sellest kaks korda suurem:

$$\theta = 2\beta = 2 \arcsin[n_1 \cos(\alpha)] = 28^\circ.$$

Kuna $\cos(\arcsin(a)) = \sqrt{1 - a^2}$, siis on võimalik vastus esitada kujul

$$\theta = 2 \arcsin(\sqrt{n_1^2 - n_2^2}).$$

**L208 Kolmläätis ★★**

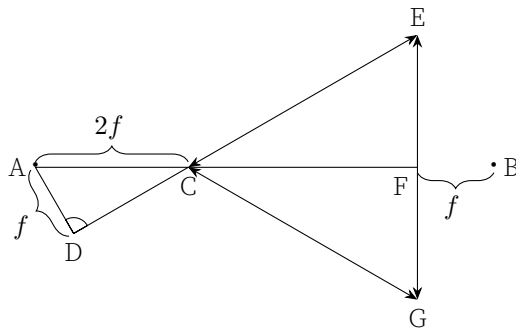
Autor: Andres Põldaru, lahtine, 2016, G 5

Kõigil kolmel läätsel on sama fookuskaugus, sest neil on üks ühine fookuspunkt, milleks on kolmnurga keskpunkt. Kolmnurgad $\triangle ACD$ ja $\triangle CEF$ on sarnased, sest nad on täisnurksed kolmnurgad, mille ühise tipu C juures olevad nurgad on samad. Seega

$$\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|EF|}{|EC|},$$

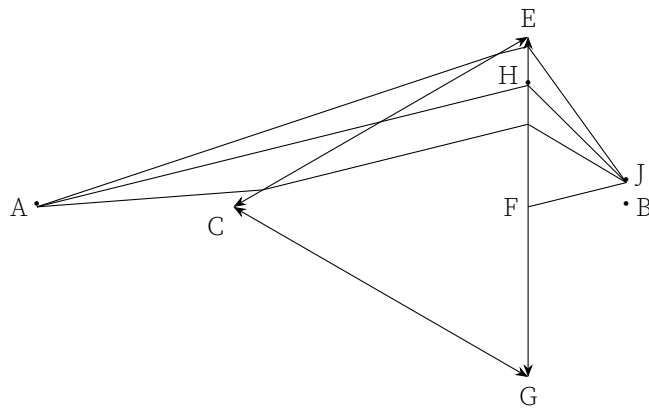
millest

$$|AD| = \frac{|AC|}{2} = f.$$



Saame järeldada, et punkt A asub mõlema läätse CE ja CG fokaaltasandites. Kui läätsele langevad paralleelsed kiired, siis need koonduvad fokaaltasandis ühte punkti ja seega teistpidi mõeldes peavad fokaaltasandi ühest punktist pärinevad kiired olema pärast läätse läbimist paralleelsed. Nende paralleelsete kiirte nurka on võimalik määrata nii, et tõmbame punktist A ühe kiire läbi läätse CE või CG keskpunkti. Läätse keskpunkti läbiv kiir ei murdu ja liigub samas suunas edasi. Alumisel joonisel läbib kiir AH läätse keskpunkti ja teised kiired on konstrueeritud selliselt, et pärast läätse läbimist on nad sellega pralleelsed.

Pärast esimese läätse läbimist koonduvad läätsele EG langevad paralleelsed kiired fokaaltasandi ühte punkti J . Selle punkti leidmiseks joonistame läätse EG keskpunkti F läbiva kiire, mis on kiirega AH paralleelne, ja leiame selle kiire lõikumispunkti J fokaaltasandiga. Jooniselt on näha, et ükski kiir punkti B ei jõua, sest nad kõik kõik koonduvad punkti J ja vertikaalseid kiiri ei ole. Läätse CG jaoks on konstruktsioon sama, ainult peegelpildis AB suhtes ja seega ka sealt ei jõua valgus punkti B .



Alternatiivne lahendus

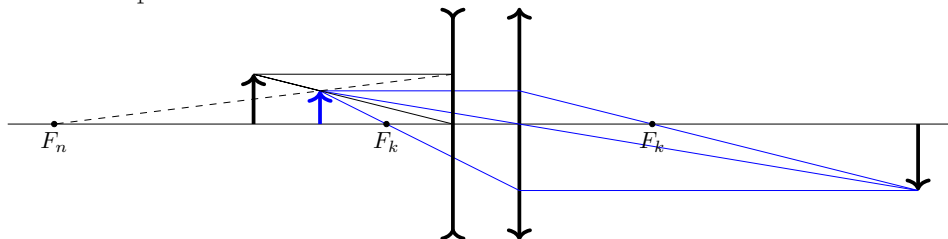
Analoogselt võime vaadata hoopis seda, kui punktis B on valgusallikas. Kui punktist A pärinevad kiired jõuavad punkti B , siis peavad ka punktist B pärinevad kiired jõudma punkti A . Punkt B on läätse EG fokaaltasandis ja tekitab paralleelse

kiirtekimbu. Sarnaselt eelmise lahendusega see kiirtekimp koondub pärast teise läätse läbimist selle läätse fokaaltasandi ühte punkti, mis ei ole A . Fokaaltasand on läätsega paralleelne ja kui kiired koonduvad selles tasandis mingisse punktist A erinevasse punkti, siis järelikult punkti A valgus ei jõua.

L209 Puuduv lääts ★★

Autor: Eero Vaher, piirkonnavor, 2017, G 5

Nõguslääts tekitab esemest näiva kujutise ning kumerlääts tekitab näivast kujutisest tõelise kujutise. Teades kumerläätses asukohta ja fookuseid ning tõelise kujutise asukohta, on võimalik leida näiva kujutise asukoht (joonisel kujutatud sinisega; kujutatud on kolme kiirt, kuid konstrueerimiseks piisab kahest). Teades eseme ning nõgusläätses tekitatud näiva kujutise asukohti, on läätse asukohta ning selle esemepoolse fookuse leidmine lihtne.



L210 Kiilud ★★★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2006, G 6

On lihtne näha, et plaadist väljub endiselt paralleelne valgusvihk. Küll aga on selle levimise suund muutunud. Plaati sisenedes murdumist ei toimu, sest kiired liiguvad risti pinnaga. Kaldpinnale langevad kiired langemisnurga φ all, murdumisnurga γ saame murdumisest:

$$n_1 \sin \varphi = n_2 \sin \gamma.$$

Meil on lubatud kasutada väikeste nurkade lähendust $\sin \alpha \approx \alpha$, mistõttu $\varphi n_1 = \gamma n_2$. Murdumise tõttu muutus kiirte levimise suund nurga $\varphi - \gamma$ võrra. Ühtlasi on lihtne näha, et see on ka langemisnurgaks plaadi välistasandile, sest esialgu liikus kiir risti plaadiga. Arvestades, et õhu murdumisnäitaja on 1, saame leida kiire murdumisnurga δ plaadist väljumisel:

$$n_2(\varphi - \gamma) = \delta, \quad \delta = n_2 \left(\varphi - \frac{\varphi n_1}{n_2} \right) = \varphi(n_2 - n_1).$$

Valguslaigu nihet on nüüd lihtne leida. Vaatleme läätse optilist keskpunkti läbivat kiirt. Et see kiir läätses ei murdu, lõikab see fokaaltasandit teljest kaugusel

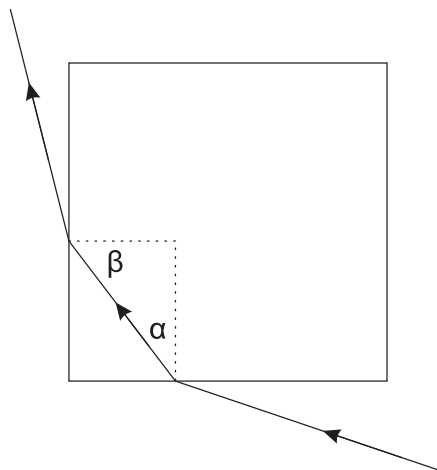
$$d = \delta f = \varphi f(n_2 - n_1).$$

L211 Klaaskuup ★★★

Autor: Tundmatu autor, piirkonnavor, 2009, G 7

Mustaks värvitud tahkudelt valgus peegelduda ei saa, toimub neeldumine. Ülesande tingimus on täidetud, kui värvimata tahust kuupi sisenev valgus ei saa väljuda läbi kõrvaltahu (toimub sisepeegeldus). Sisepeegelduse kriitilise nurga saame murdumisest:

$$\sin \gamma_C = \frac{1}{n}.$$



Kiir siseneb kuupi, kui $\alpha < \gamma_C$. Langemisnurk kõrvaltahule on $\beta = 90^\circ - \alpha$. Kiir väljub kuubist, kui

$$\beta < \gamma_C, \quad \text{ehk} \quad 90^\circ < \gamma_C + \alpha < 2\gamma_C.$$

Et kiir ei saaks kuubist väljuda, peab kehtima:

$$\gamma_C < 45^\circ, \quad \text{ehk} \quad n > 1/\sin 45^\circ = \sqrt{2}.$$

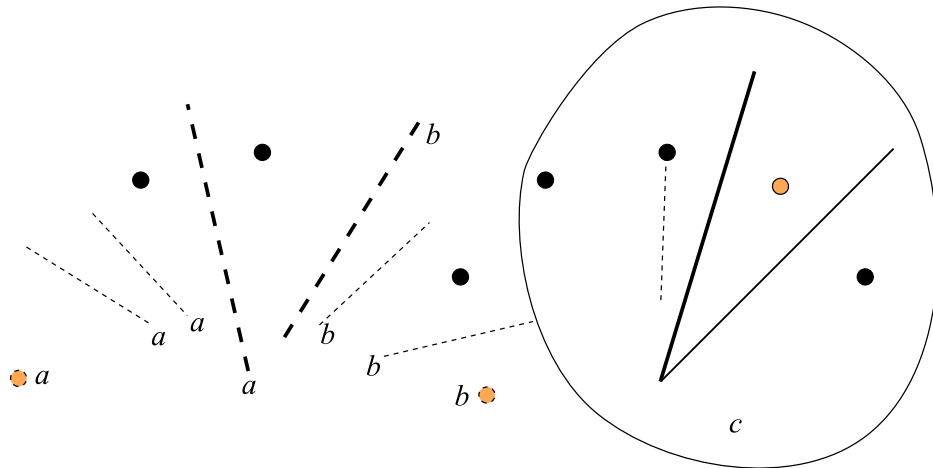
L212 Peeglid ★★★

Autor: Jaan Kalda, piirkonnavor, 2009, G 8

Kuna on teada, et üks antud punktidest on peegelduse peegeldus, siis peab üks tasapeeglitest kindlasti asuma peegelduse S_1 ning selle peegelduse peegelduse S'_1 sümmeetriateljel. Lisaks saab punkt S_1 tekkida ainult siis, kui paigutada S_1 ja allika S vahele teine peegel. Järelikult peab kolmas antud punkt S_2 olema allika S peegeldus esimesena paigutatud peeglis, ehk see peegel asub nii S_1 ja S'_1 kui ka S ja S_2 sümmeetriateljel. Teades seda, on lihtne määrata joonisel allika S asukoht. Selleks, et tekiksid peegeldused ning peegelduse peegeldused, peab allikas asuma kahe peegli vahel nii, et mõlemad peegeldavad küljed on sellele nähtavad. Kujutiste paariks S_1 ja S'_1 saab olla ainult kaks alumist punkti joonisel, kuna vastasel korral jääks valgusallikas kõigi kujutiste suhtes teisele poole peegleid olenemata

sellest kas S_1 ja S'_1 jaoks valitakse ülemine ja vasakpoolne (joonisel a) või ülemine ja parempoolne (joonisel b).

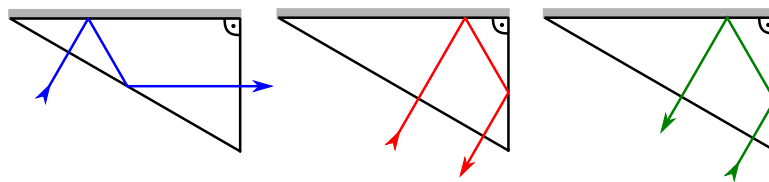
Niisiis, esimeseks peegliks on kahe alumise punkti sümmeetriatelg ning allikaks ülemise punkti peegeldus selles peeglis. Teine peegel peab olema allika ja parempoolse punkti sümmeetriatelg, sest kui see oleks allika ja vasakpoolse punkti sümmeetriatelg, siis jääks allikas jällegi peeglite vahelt välja.



L213 Periskooprillid ★★★

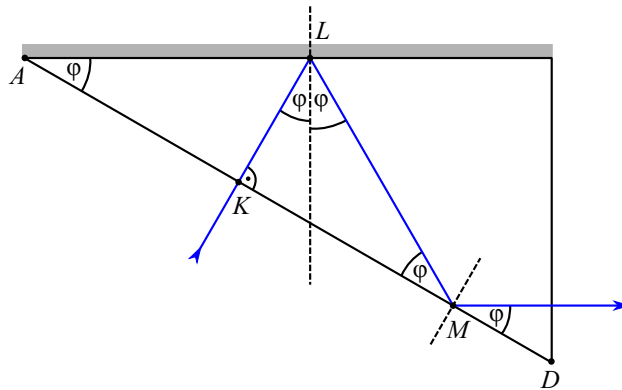
Autor: Andreas Valdmann, lõppvoor, 2014, G 4

a) Kuna sisenevad ja väljuvad kiired on prisma pinnaga risti, siis keskkondade lahtuspääsil nende suund ei muutu. Kui kiir langeb prismale lõigul AB , siis peegeldub see esmalt prisma ülemisel tahul, seejärel alumisel tahul ning väljub prismast läbi parempoolse tahu (vt joonist). Kui kiir langeb prismale lõigul BC , siis peegeldub see ülemisel tahul, siis parempoolsel tahul ning väljub läbi alumise tahu ja ei jõuagi silma. Kui kiir langeb prismale lõigul CD , siis peegeldub see esmalt parempoolsel tahul, seejärel ülemisel tahul ning väljub jällegi läbi alumise tahu.



b) Vaatleme kiirt, mis siseneb prismasse lõigul AB . Kuna sisenev kiir on pinnaga risti, siis tekib täisnurkne kolmnurk AKL (vt joonist). Kolmnurga üheks teravnurgaks on φ ja seega on teise teravnurga suurus $90^\circ - \varphi$. Kuna viimane nurk on esimesel peegeldumisel langemisnurga täiendnurgaks, siis on ka langemisnurk φ . Peegeldumisest järeldub, et esimene peegeldumisnurk on samuti φ . Kuna

prismast väljuv kiir on paralleelne prisma ülemise tahuga, siis on teisel peegeldumisel peegeldumisnurk täiendnurk ja seega ka langemisnurk täiendnurk φ . Näeme, et täisnurkse kolmurga KLM teravnurgad on φ ja 2φ . Kuna kolmnurga sisenurkade summa on 180° , siis $\varphi = (180^\circ - 90^\circ)/3 = 30^\circ$.



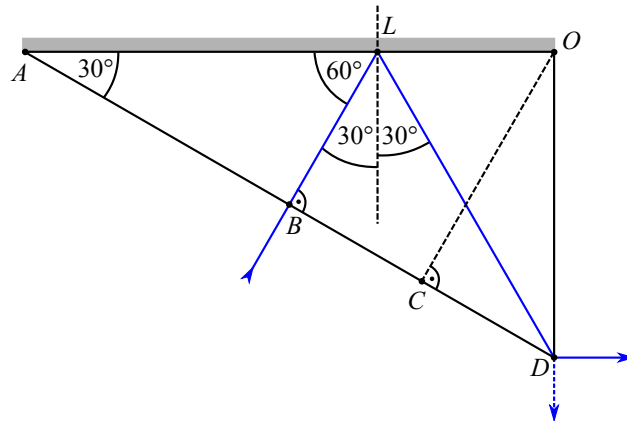
Märkus. Nüüd, kui prisma tipunurk on leitud, saame veenduda, et kui pinnaga risti sisenenud kiir peegeldub prisma alumiselt või parempoolselt tahult, siis on need peegeldumised täielikud. Eelmisest alaülesandest on näha, et nendel juhtudel on langemisnurgaks $90^\circ - \varphi = 60^\circ$. Täieliku sisepeegeldumise piirnurk on $\alpha = \arcsin(1/n) = 42^\circ$. Langemisnurk 60° on sellest suurem ehk toimub täielik sisepeegeldumine.

c) Kui kiir siseneb prismasse punktis B , siis läbib väljuv kiir punkti D (vt joonist).

Märkus. Väljuva kiire suund pole sel juhul üheselt määratud, kuid see ei oma ülesande lahendamisel tähtsust.

Kasutades eelmises alaülesandes saadud φ väärtust, on näha, et kolmnurgad ABL ja BDL on teineteise peegeldused lõigu BL suhtes (öeldakse, et need kolmnurgad on kongruentsed). Seega on lõikude AB ja BD pikkused võrdsed, millest järeldub, et $|AB| = l/2$. Kui kiir siseneb prismasse punktis C , siis peegeldub see punktis O otse tagasi ning väljub prismast punktis C . Täisnurksetest kolmnurkadest saame, et $|AO| = \cos(30^\circ)|AD|$ ja $|AC| = \cos(30^\circ)|AO|$ ehk punkti C kaugus punktist A on

$$|AC| = \cos^2(30^\circ)|AD| = \frac{3}{4}l.$$

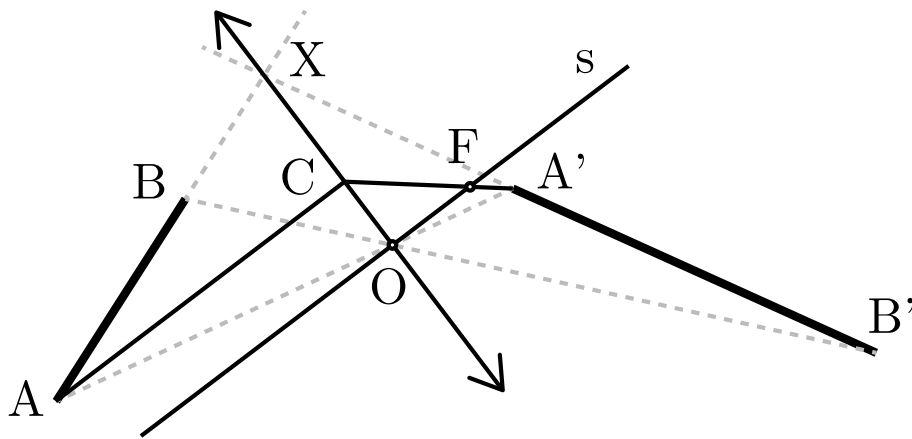


d) Ühe tasapeegli kasutamisel paistab tekst peegelpildis. Seetõttu tuleb teksti õigetpidi nägemiseks kasutada süsteemi, kus toimub paarisarv peegeldusi.

L214 Lääts ★★★

Autor: Mihkel Kree, lahtine, 2015, G 5

Paneme esmalt tähele, et läätses keskpunkti läbivad kiired AA' ja BB' ei murdu. See-
ga paikneb läätses keskpunkt O lõikude AA' ja BB' lõikepunktis. Teisalt märkame,
et valguskiir AB murdub valguskiireks $A'B'$. Niisiis, pikendades lõike AB ja $A'B'$,
leiame nende lõikepunkti X . Sellega oleme konstrueerinud läätses tasandi OX . Läätses
optilise peatelje leiame, kui tõmbame läätses tasandiga ristuva sirge s läbi läätses
keskpunkti O . Fookuse F leidmiseks konstrueerime näiteks peateljega paralleelse
kiire AC , mis murdub läbi fookuse.



L215 Peegelpõhi ★★★

Autor: Sandra Schumann, lõppvoor, 2018, G 3

Paneme tähele, et valemi järgi, kui keskkonna murdumisnäitaja suureneb, aga läätse murdumisnäitaja jääb samaks, siis läätse fookuskaugus suureneb. Seega on ainus viis, kuidas valguskiired saaksid ka pärast anuma vett täis valamist samas punktis koonduda, see, kui vee sees valguskiired peegelduksid põhjas olevalt peeg-
lilt ja seejärel koonduksid samas punktis, kus enne.

Läätse kaugus anuma põhjast on $l = 10$ cm. Olgu läätse fookuskaugus õhus f . Siis on tema fookuskaugus vees järelikult $2l - f$. Valemi põhjal saame, et

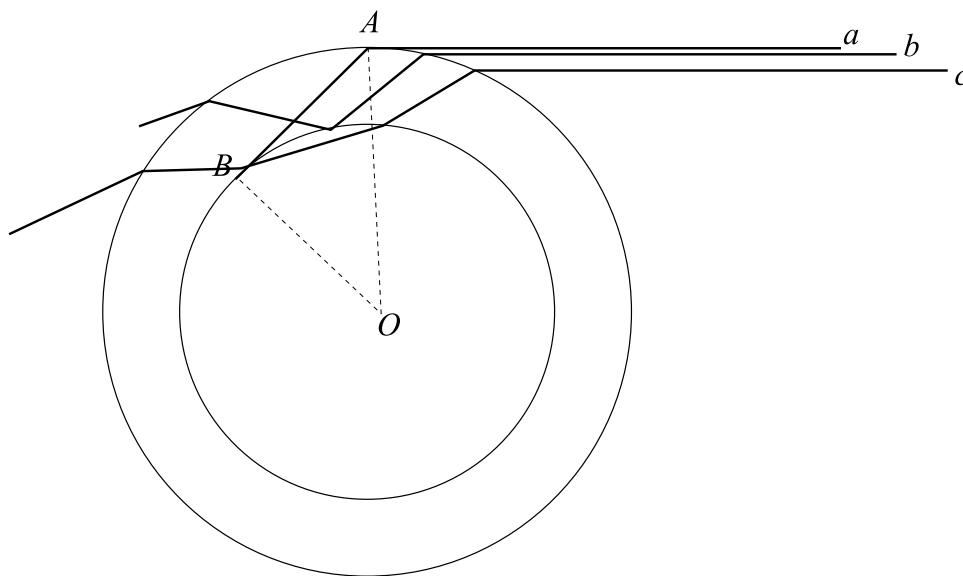
$$\begin{aligned} \frac{f}{2l - f} &= \frac{n_k n_0 - n_0 n_v}{n_k n_v - n_0 n_v} \Rightarrow \\ f(n_k n_v - n_0 n_v) &= (2l - f)(n_k n_0 - n_0 n_v) \Rightarrow \\ n_k n_v f - n_0 n_v f &= 2l n_k n_0 - 2l n_0 n_v - n_k n_0 f + n_0 n_v f \Rightarrow \\ f(n_k n_v + n_k n_0 - 2n_0 n_v) &= 2l n_0 (n_k - n_v) \Rightarrow \\ f &= \frac{2l n_0 (n_k - n_v)}{n_k n_v + n_k n_0 - 2n_0 n_v}. \end{aligned}$$

Seega on läätse fookuskaugus

$$f = \frac{2 \cdot 10 \text{ cm} \cdot 1,0 \cdot (1,49 - 1,33)}{1,49 \cdot 1,33 + 1,49 \cdot 1,0 - 2 \cdot 1,0 \cdot 1,33} = 3,94 \text{ cm} \approx 4 \text{ cm}.$$

L216 Kapillaartoru ★★★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2009, G 8



Et kapillaarisein paistaks null-paksusega, peab kapillaarile puutujana (punktis A , vt joonist) langenud kiir a puudutama sisemist õõnsust (punktis B). Sellisel juhul pole ühtegi kiirt, mis läbiks kapillaari seina ilma sisemise õõnsuse piirpinnale langemata (ning vaid kiir a teeb seda puutujana). Kolmnurk AOB on täisnurkne, seetõttu saame murdumisest $n = R/r$.

Ülesande olukorda edasi analüüsides paneme tähele, et ka võrratuse $r > R/n$ korral puuduvad kiired, mis langevad kapillaari välispinnale, kuid ei lange sisemise õõnsuse piirpinnale; seega ka nende puhul näib kapillaari sein puuduvat.

Veel paneme tähele, et igal juhul on siiski oluline erinevus ime-õhukese seinaga kapillaarist: kapillaari servale lähedaste kiirte puhul toimub täielik sisepeegeldus sisemise õõnsuse piirpinnalt (joonisel kiir b). Visuaalselt paistab see peegel-kihina ja on selgelt eristatav, kui nt kapillaar täita värvilise gaasiga. Samas, see sisepeegeldus kaob, kui kapillaar täita värvilise vedelikuga, mille murdumisnäitaja on n .

L217 Fookuskaugus ★★★

Autor: Eero Vaher, piirkonnavoore, 2015, G 8

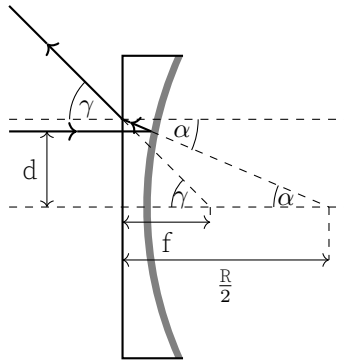
Langegu läätsel vasakult valguskiir, mille suund on paralleelne optilise teljega ning mille kaugus sellest on d . Läätsesisenedes valgus oma levimissuunda ei muuda, kuna langeb läätsel selle pinnaga risti. Hõbetatud pind toimib kumerpeegliks, mille fookuskaugus on $\frac{R}{2}$. Kui peegeldunud valguskiire nurk optilise peatelje suhtes on α , siis läätsel väljunud kiire ning optilise peatelje vaheline nurk on murdumisest põhjal $\sin \gamma = n \sin \alpha$. Kuna lääts on õhuke, asetsevad punktid, kus valguskiir peegeldus ning kus see murdus, üksteisele väga lähedal. Seetõttu võime kirjutada

$$d = \frac{R}{2} \tan \alpha = f \tan \gamma.$$

Õhukese läätsel korral on selle nõgusa osa kõverusraadius oluliselt suurem fookuskaugusest, mis lubab kasutada väikeste nurkade lähendust ehk $\alpha \approx \sin \alpha \approx \tan \alpha$ ning $\gamma \approx \sin \gamma \approx \tan \gamma$. Tulemuseks saame

$$f = \frac{R}{2n}.$$

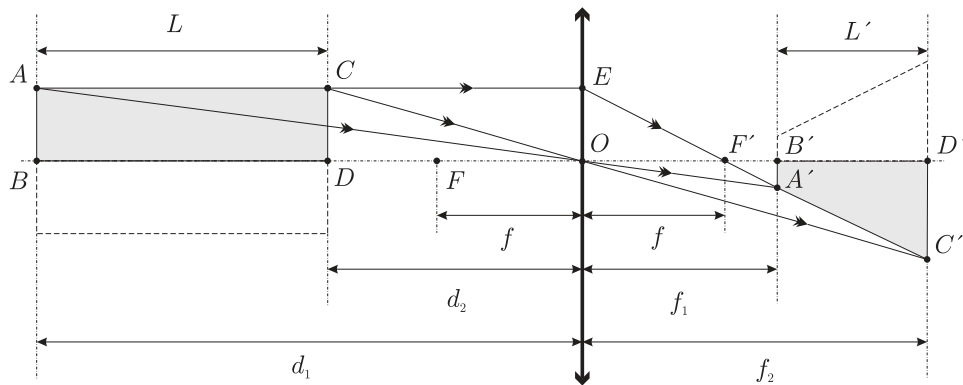
Tasub teada, et avaldis sfäärilise peegli fookuskauguse jaoks kehtibki ainult väikeste peegeldumisnurkade korral. Suurte peegeldumisnurkade korral ilmneb sfääriline aberratsioon ning ei ole võimalik rääkida ühest fookusest.



L218 Lääts ★★★★★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2007, G 9

Olgu pliitsi otste kaugused läätses $d_1 = |BO|$ ja $d_2 = |DO|$ ning pliitsi kujutise otste kaugused läätses vastavalt $f_1 = |B'O|$ ja $f_2 = |D'O|$ (vt joonist).



Paneme kirja valemid suurendustegurite jaoks:

$$k = \frac{L'}{L}, \quad k_1 = \frac{|A'B'|}{|AB|}, \quad k_2 = \frac{|C'D'|}{|CD|}.$$

Sarnastest kolmnurkadest $F'B'A'$ ja FOE leiame, et

$$\frac{|A'B'|}{|EO|} = \frac{|F'B'|}{|FO|} = \frac{f_1 - f}{f}.$$

Analoogiliselt, sarnastest kolmnurkadest $F'D'C'$ ja FOE leiame, et

$$\frac{|C'D'|}{|EO|} = \frac{|F'D'|}{|FO|} = \frac{f_2 - f}{f}.$$

Kuna $|EO| = |AB| = |CD|$, siis

$$k = \frac{f_2 - f_1}{d_1 - d_2}, \quad k_1 = \frac{f_1 - f}{f}, \quad k_2 = \frac{f_2 - f}{f}.$$

Kasutades läätse valemit mõlema otsa jaoks:

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1} = \frac{1}{f} \quad \text{ning} \quad \frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f}$$

saame avaldada pikkused d_1 ja d_2 pikkuste f_1 ja f_2 kaudu:

$$d_1 = \frac{f_1 f}{f_1 - f}, \quad d_2 = \frac{f_2 f}{f_2 - f}.$$

Asendame saadud väärtused suurendusteguri k avaldisse:

$$\begin{aligned} k &= \frac{f_2 - f_1}{f_1 - f} - \frac{f_2 f}{f_2 - f} = \frac{f_2 - f_1}{f} \frac{(f_1 - f)(f_2 - f)}{f_1(f_2 - f) - f_2(f_1 - f)} \\ &= \frac{f_2 - f_1}{f} \frac{(f_1 - f)(f_2 - f)}{f_1 f_2 - f_1 f - f_2 f_1 + f_2 f} = \frac{f_2 - f_1}{f} \frac{(f_1 - f)(f_2 - f)}{f_2 f - f_1 f} \\ &= \frac{f_2 - f_1}{f} \frac{(f_1 - f)(f_2 - f)}{f(f_2 - f_1)} = \frac{(f_1 - f)(f_2 - f)}{f^2}. \end{aligned}$$

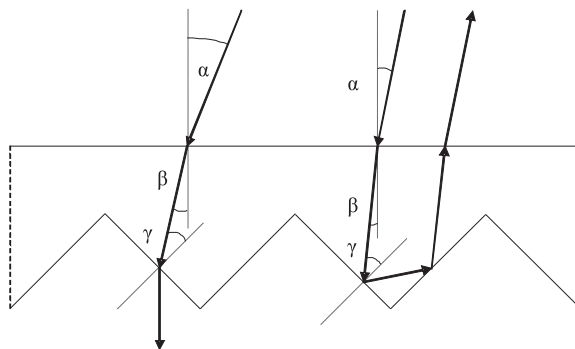
Võrreldes saadud avaldist varem saadud avaldistega k_1 ja k_2 jaoks, on lihtne näha, et

$$k = \frac{f_1 - f}{f} \frac{f_2 - f}{f} = k_1 k_2.$$

Märkus. Joonisel me mugavuse kaalutlusel tegelikult vaatleme vaid pool pliiatsit, aga on ilmne, et lahendus käik kehtib ka terve pliiatsi kohta (joonisel on pliiatsi teine pool näidatud punktiirjoonega).

L219 Hajuti ★★★★★

Autor: Andreas Valdmann, piirkonnavor, 2010, G 8



Valgus läbib hajuti, kui nurk γ on väiksem täieliku sisepeegeldumise nurgast. Kriitilisel juhul $\sin(\gamma_{\text{kr}}) = 1/n$. Kuna $\beta = 45^\circ - \gamma$, siis $\beta_{\text{kr}} = 45^\circ - \arcsin(1/n)$. Nurkade α ja β vahel kehtib murdumiseseadus $\sin(\alpha)/\sin(\beta) = n$. Seega

$$\alpha_{\text{kr}} = \arcsin(n \sin(45^\circ - \arcsin(1/n))).$$

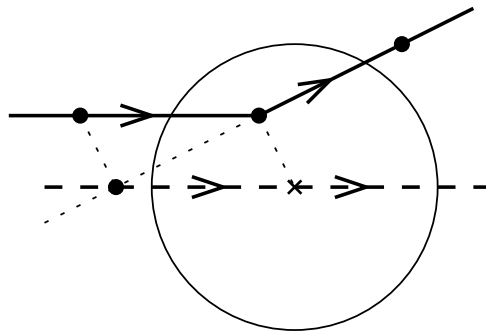
Vastuse saab viia kujule

$$\alpha_{\text{kr}} = \arcsin \left[\frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{n^2 - 1} - 1) \right] = 4,8^\circ.$$

Kriitilisest väiksema α korral (vt parempoolsemat kiirt) on tagasi pöörduv kiir paralleelne hajutile langenud kiirega. Kiirte käigu pööramise selgub, et tulemus ei muutu, kui esimene sisepeegeldus toimub 45-st kraadist suurema nurga all. Sel juhul toimub nurga γ all teine sisepeegeldus.

L220 Nõugslääts eestvaates ★★★★★ Autor: Siim Ainsaar, piirkonnavoore, 2011, G 10

Kui nõugsläätsesse langevad paralleelsed kiired, lõikuvad murdunud kiirte pikendused eesmisel fokaaltasandil. Joonistame antud kiirega paralleelse abikiire (optilise kõrvaltelle, joonisel AO), mis läbib läätses optilist keskpunkti. See abikiir ei murdu, seega ühtib oma läätses läbimise järgse osa pikendusega. Tema lõikepunkti eesmise fokaaltasandiga (punkti A) leiame tõlgast, et lõik AO on lõigu KL paralleellüke. Küsitav murdunud kiir asub siis sirgel AL . Lääts asub täpselt oma fokaaltasandite vahel keskel, seetõttu poolitab punkt L lõigu AB , kus B on küsitav murdunud kiire lõikepunkt tagumise fokaaltasandiga. Järelikult saame punkti B , kui peegeldame punkti A punkti L suhtes ($|AL| = |LB|$).



L221 Toru ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2012, G 6

Kõigepealt paneme tähele, et punktallika kujutis tekib läätsest kaugusele

$$l = \left(\frac{1}{36} - \frac{1}{60} \right)^{-1} \text{ mm} = 90 \text{ mm},$$

st ekraanil. Kui peegeldavate silindriliste seinte asemel oleks kaks tasapeeglit, siis tekiks punktallika kujutiste lõpmatu jada (peegeldus, peegelduse peegeldus jne), kus kahe naaberkujutise vahekaugus on võrdne peeglite vahekaugusega 12 mm. Läheme nüüd silindrilise juhtumi juurde. Joonise tasandis lebava kiire jaoks on kiirekäik täpselt sama, mis tasapeegli puhul, st joonise tasandis tekivad kujutised samuti perioodilise rivina, kus kujutiste vahekaugus on 12 mm. Joonise tasandit võib pöörata suvaliselt ümber süsteemi sümmeetriatelje; see tähendab, et kujutised on tegelikult "laiali määritud" mööda kontsentrilisi ringjooni raadiustega $n \times 12 \text{ mm}$, kus n on täisarv. Läätse tekitab neist ringidest ekraanile $\frac{90}{60}$ korda suurendatud kujutise, kus kontsentriliste ringide raadiusteks on $R = n \times 18 \text{ mm}$.

L222 Mikroskoop ★★★★★

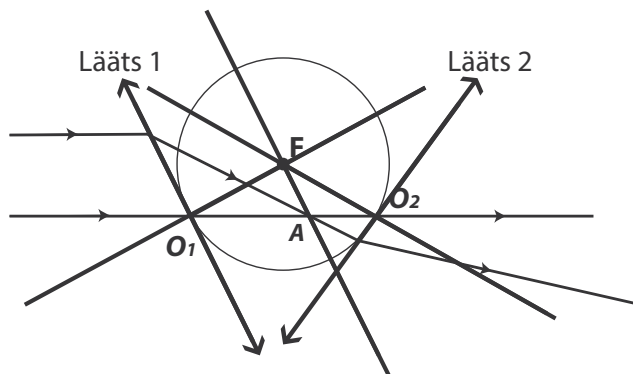
Autor: Valter Kiisk, lõppvoor, 2013, G 7

Esimeses teravustatavas asendis, kus lääts on objektile lähemal kui sensorile (st suurendus > 1), olgu läätse kaugus esemest a ja sensorist b . Kujutise joonsuurendus on seega $k = b/a$. Teises asendis on nimetatud kaugused lihtsalt ümbervahe-
tatud ja suurendus vastavalt $l = a/b$. Niisiis $25 = k/l = b^2/a^2$.

Analüüsime nüüd esimesele asendile vastavate kauguste näitel sensori valgustatuse küsimust. Kui võrdjoonsuurendus on k , siis pindalamuutust iseloomustav tegur on vastavalt k^2 . Lisaks kujutise suurusele mõjutab selle heledust ka valguse hulk, mis pääseb läbi objektiivile. Vaadeldava eseme igast punktist lähtub valgus, mis on enam-vähem ühtlaselt hajutatud üle kõigi suundade, seega läätse läbiva kiirguse hulk on proportsionaalne selle osaga mõttelise sfääri pinnast, mille lõikab välja läätse apertuur: $\Omega = d^2/a^2$, kus d on läätse diameeter. Kokkuvõttes saame, et kujutise heledus on võrdeline suurusega $\Omega/k^2 = d^2/b^2 \propto b^{-2}$. Teises asendis, kus lääts on sensorile lähemal, on sama näitaja vastavalt a^{-2} , seega sel juhul on kujutise heledus suurem $a^{-2}/b^{-2} = b^2/a^2 = 25$ korda.

L223 Optiline skeem ★★★★★

Autor: Erkki Tempel, lahtine, 2014, G 7



Algselt paralleelsed kiired koonduvad pärast läätse läbimist fokaaltasandis (punkt A). Kuna alumine kiir ei murdu, peab see läbima läätse keskpunkti. Seega läätis 1 on paralleelne joonistatud fokaaltasandiga (kiir läbib punkte A ja F) ning läbib punkti O_1 . Kuna tegemist on kahe ühesuguse läätsega ning nende fookused asuvad punktis F, siis ring raadiusega FO_1 läbib alumist kiirt punktis O_2 , mis on teise läätse keskpunktiks. Nüüd saame kergesti joonistada ka teise läätse, kuna teame ülemise kiire murdumiskohta ning läätse keskpunkti asukohta.

L224 Luup ★★★★★

Autor: Valter Kiisk, lõppvoor, 2016, G 6

Poolkera kumera pinna keskosa võib vaadelda omaette õhukese läätse, mille fookuskaugus f ja kaugus paberi pinnast (võrdne kumerpinna raadiusega R) määravad kujutise suurenduse. Selle ekvivalentse läätse fookuskauguse määramiseks vaatleme valguskiirt, mis liigub paralleelselt optilise peateljega ja pärast murdumist koondub fookusesse (vt joonis). Kui valguskiir levib optilise peatelje lähedal, siis kõik murdumisel tekkivad nurgad on väikesed, nii et saame tingimuse

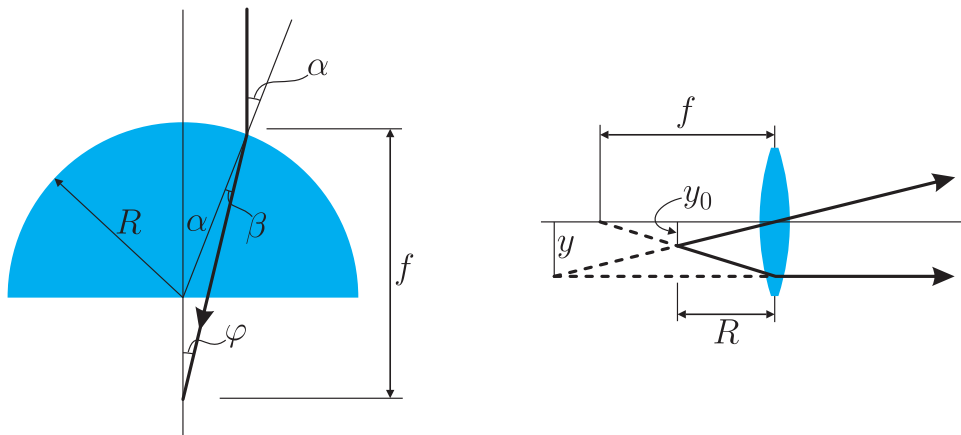
$$\alpha R \approx f\varphi.$$

Ilmselt

$$\varphi = \alpha - \beta = \alpha - \alpha/n = \alpha(1 - 1/n).$$

Nende seoste kombineerimisel nurgad taanduvad välja ja saame $f = nR/(n - 1)$. Ilmselt eseme (paberi pinna) kaugus läätsest on R , kusjuures $f > R$, järelikult tekib näiline kujutis kusagil paberi taga. Kõik kaugused on siiski R suurusjärgus, seega suurelt distantsilt silmaga vaadeldav suurendus (st nurksuurendus) on praktiliselt sama mis joonsuurendus y/y_0 . Kujutise konstrueerimisel tekkivatest sarnastest kolmnurkadest saame

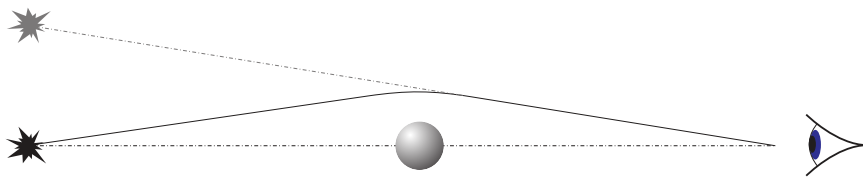
$$\frac{y}{y_0} = \frac{f}{f - R} = n = 1,5.$$



L225 Gravitatsioonilääts ★★★★★

Autor: Mihkel Kree, piirkonnavor, 2007, G 10

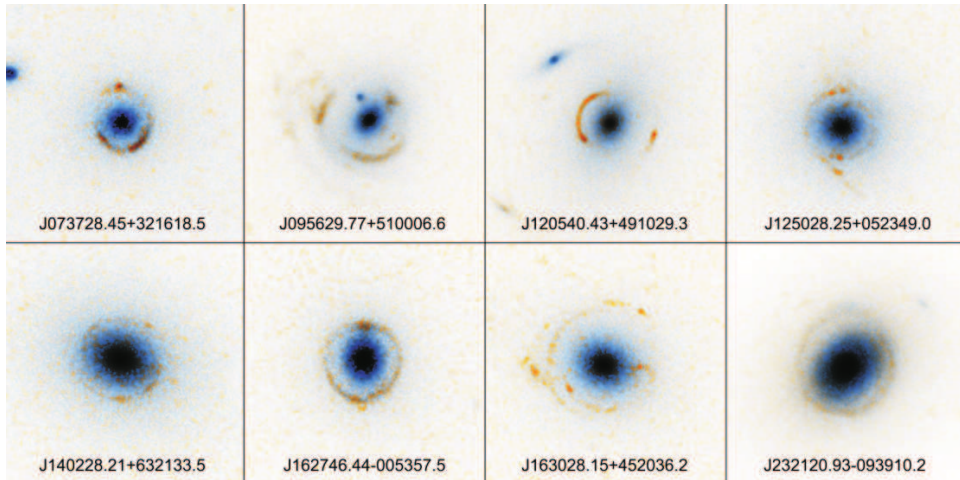
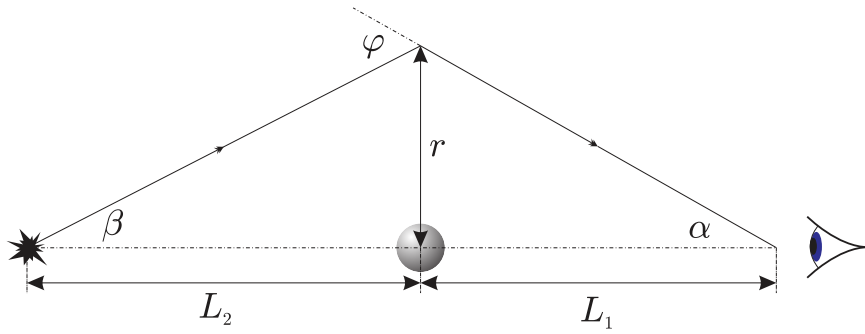
Tähest väljunud kiired kõverduvad musta augu lähimbruses (vt joonist).



Kujutise konstrueerimisel aga eeldatakse, et kiired on kogu tee otse liikunud. Et kiired jõuavad vaatlejani kõikjalt ümber musta augu, on kujutiseks ringjoon (eeldusel, et täht on punkt).

Et silmani jõudvate kiirte jaoks kehtib $r \ll L$ ning trajektoori kõverdumine toimub tähe lähimbruses, võib vaadelda kiire teekonda lihtsustatult: sirge liikumine musta auguni, hetkeline nurga muutus musta augu juures ning edasi sirge tee vaatlejani (vt joonist). Joonisel arusaadavalt on vertikaalskaala võrreldes horisontaalskaalaga oluliselt välja venitatud.

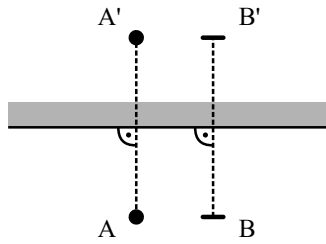
Järgnevalt leiame tähe nurkdiameetri. Lihtsast geometriast järeldub, et $\alpha + \beta = \varphi$. Kaugused on suured ning nurgad väikesed, seega võime kasutada ligikaudseid valemeid $\alpha = r/L_1$ ja $\beta = r/L_2$. Niisiis



$$\frac{r}{L_1} + \frac{r}{L_2} = \frac{4GM}{c^2 r} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{4GML_1L_2}{c^2(L_1 + L_2)}}$$

Tähe kujutise nurkdiaameeter on

$$\gamma = \frac{2r}{L_1} = \sqrt{\frac{4GML_2}{c^2L_1(L_1 + L_2)}}$$



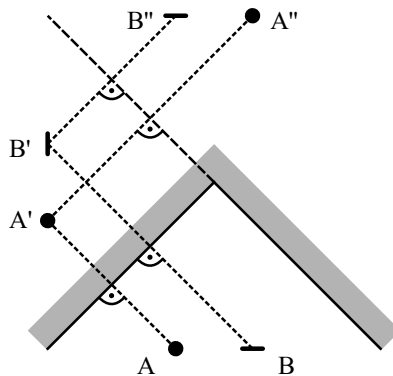
Joonis 4: Kujutis tasapeeglis

L226 Nurgapeegel ★★★★★

Autor: Andreas Valdmann, lõppvoor, 2016, G 8

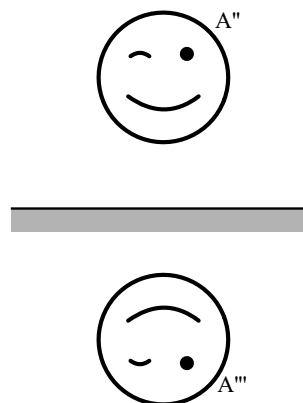
Vaatame kõigepealt kujutise tekkimist tasapeeglis. Joonisel 1 on olukord pealtvaates. A on Juku lahtine silm ja A' selle kujutis. Kinnine silm ja selle kujutis on vastavalt B ja B'. Näeme, et parema silma kinnipigistamisel paistab ka peeglis kinnisena vaatleja suhtes parempoolne silm.

Olgu kolmest peeglist üks horisontaalne ja kaks ülejäänut vertikaalsed, kusjuures Juku vaatab otse vertikaalsete peeglite kokkupuutejoone poole. Joonisel 2 on see olukord pealtvaates. Vaatame vertikaalsete peeglite mõju. Esmalt konstrueerime silma A kujutise A' vasakpoolses peeglis. Seejärel konstrueerime kujutise A' kujutise A'' parempoolses peeglis. Toimime samamoodi kujutise B'' konstrueerimisel ja paneme tähele, et seekord on peegelpildil vasak ja parem pool vahetatud ning kinnisena paistab peeglites vasakpoolne silm.



Joonis 5: Kujutis kahes peeglis

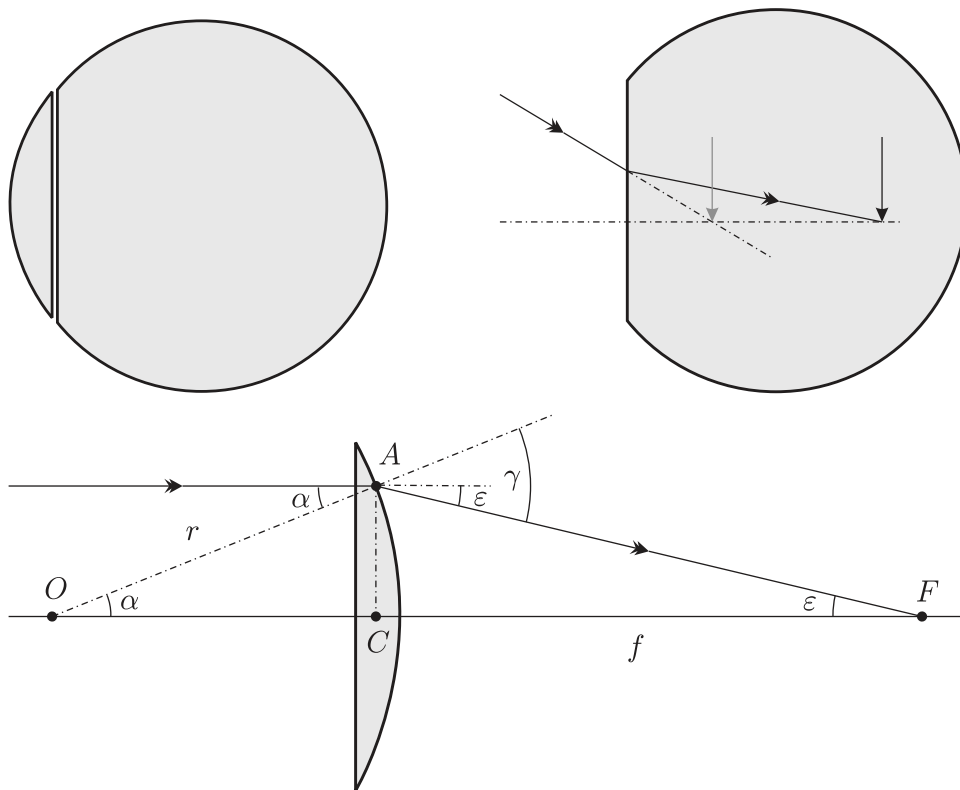
Võtame nüüd arvesse horisontaalse peegli mõju. Joonisel 3 on otsevaates teist järku kujutis A'' ning selle kujutis A''' horisontaalses peeglis. Näeme, et horisontaalne peegel pöörab pildi "pea peale". Seega näeb Juku nurgapeeglis ennast sellisena, nagu on joonisel 3 kujutis A'''.



Joonis 6: Peegeldumine horisontaalselt peeglit

L227 Akvaarium ★★★★★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2005, G 10



Vaatleme sfäärilist akvaariumi kui õhukest tasakumerat lääts, mis on surutud tasase küljega vastu sirgeseinalist akvaariumi (vt jooniseid). Kasutades väikeste

nurkade lähendust on lihtne leida sellise õhukese läätse fookuskauguse f ($f = |CF|$):

$$\gamma = \alpha n, \quad \varepsilon f = (\gamma - \alpha)f = \alpha r \quad \Rightarrow \quad f = \frac{r}{n-1}.$$

Vee puhul

$$f = \frac{r}{1,3-1} \approx 3,3r.$$

Läätse näeme kala kujutist, mis tekib murdumisel akvaariumivees. See kujutis on n korda lähemal akvaariumi seinale, kui kala ise, st maksimaalne kaugus on

$$l_{\max} = \frac{2r}{n} \approx 1,5r,$$

mis on igal juhul väiksem, kui läätse fookuskaugus. Läätse tekitab sellest kujutisest omakorda kujutise, mille kauguse (läätselt) x saame läätse valemist

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{l} - \frac{1}{x}.$$

On lihtne näha, et suurendus on kahe kujutise kauguste suhe:

$$\frac{1}{k} = \frac{l}{x} = 1 - \frac{l}{f},$$

seega suurendus on maksimaalne, kui l on maksimaalne:

$$\frac{1}{k_{\max}} = 1 - \frac{2(n-1)}{n} = \frac{2-n}{n} \quad \Rightarrow \quad k_{\max} = \frac{n}{2-n} \approx 1,86.$$

L228 Kuup ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2007, G 8

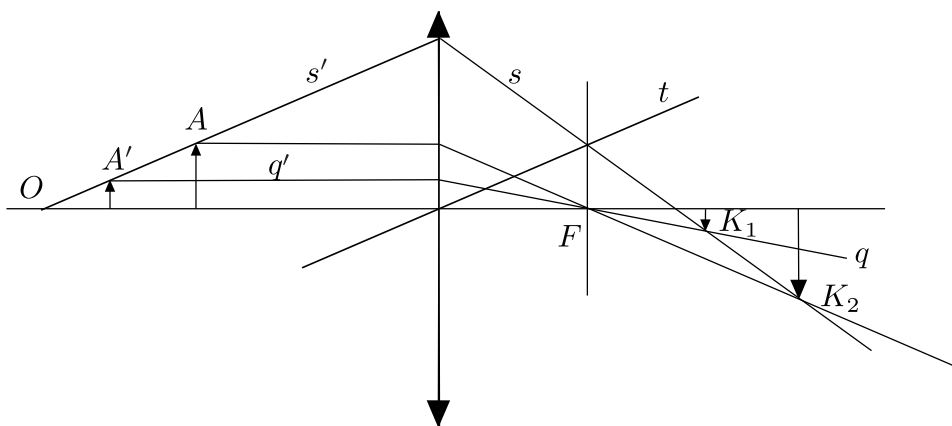
Välimine ringjoon on loomulikult kera välimine kontuur, tema raadius R_A on võrdne kera raadiusega foto mastaabis. Kerast eemal, piirkonnas D , näeb läbi kuubi pörandat, st piirkond D on valge. Piirkonnas A toimub täielik sisepeegeldumine kera pinnal, seega näeme me sealt pöranda peegeldust, mis on samuti valge. Mõõtmise teel võib veenduda, et piirkondade A ja B eraldusjoone raadius R_B on umbes $\sqrt{2}$ korda väiksem R_A -st, st tegemist on pöranda ja seinte eraldusjoone peegeldusega. Sestap on piirkond B kollane. Piirkondade B ja C eraldusjoon peab vastama täieliku sisepeegeldumise lõppemisele, st piirkonnas C on näha kera sisemust, mis on sinine, valge pöranda taustal. Niisiis on piirkond C sinine. On lihtne näha, et täieliku sisepeegeldumise piirjuhul langemisnurka siinus on $\sin \alpha = R_C/R_A = 1/n$. Seega murdumisnäitaja $n = R_A/R_C \approx 1,8$.

L229 Nõguspeegel ★★★★★

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2007, G 9

Paneme tähele, et kõverutsenter O , objekt A ning kujutis A' kumerpeeglis asuvad samal sirgel. Seega, kui meil õnnestub leida sirge AA' , siis selle lõikepunkt optilise teljega annaks punkti O . Teisest küljest, kiir, mis läbib punkti A kujutist läätses, K_2 , ja punkti A' kujutist, K_1 , jätkub peale murdumist läätses sirgena s' ja läbib nii punkti A kui A' . Tänu sellele leiamegi sirge AA' ja punkti O .

Punkti A' leidmiseks konstrueerime esmalt fokaaltasandi F . Selleks leiame fokaaltasandis lebava punkti – sirge s lõikepunkti sirgega t , mis on paralleelne sirgega s' ja läbib läätses keskpunkti. Kujutisi K_1 ja K_2 ühendav sirge murdub nii, et selle pikenduse lõikepunkt optilise peateljega ongi otsitav kõverutsenter. Punkti A' leiame kui sirge s' lõikepunkti sirgega q' , mis peale murdumist läbib fookuse ja punkti K_1 (sest K_1 on A' kujutiseks).



L230 Kärbes ★★★★★

Autor: Aigar Vaigu, piirkonnavor, 2008, G 10

Olgu O pinna kõverusraadiuse keskpunkt ning K ja A vastavalt kärbse näiline ja tegelik asukoht. Allpool toodud joonis kujutab kärbsest alguse saanud kahe kiire AB ja AC edasist käiku. Kärbse näiline asukoht K vastab kärbsest alguse saanud murdunud kiirte pikenduste lõikepunktile (joonisel KB ja KC).

Arvestades väikeste nurkade korral kehtivat lähendust $\tan \alpha \approx \sin \alpha \approx \alpha$, võime murdumisseaduse kirjutada kujul:

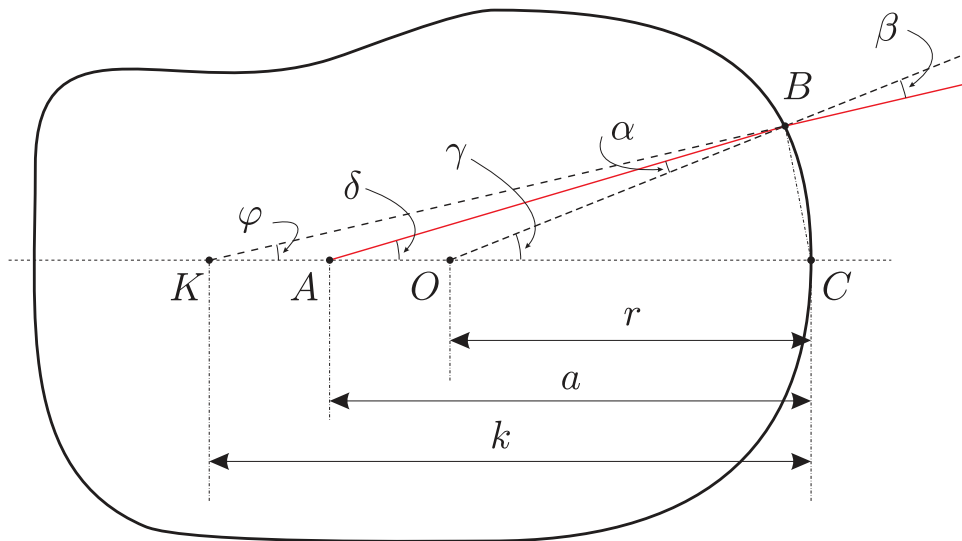
$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = n \approx \frac{\beta}{\alpha}$$

Kolmnurkade $\triangle OCB$, $\triangle ACB$ ja $\triangle KCB$ kaudu avaldame kaare \widehat{BC}

$$\gamma r = \delta a = \varphi k = \widehat{BC}.$$

Kolmnurkade $\triangle KAB$ ja $\triangle AOB$ kaudu avaldame nurga $\angle BOC$

$$\alpha + \delta = \gamma \quad \text{ja} \quad \beta + \varphi = \gamma.$$



Saame

$$\begin{aligned}(\gamma - \alpha)a &= \gamma r \Rightarrow \gamma(a - r) = \alpha a \\(\gamma - \beta)k &= \gamma r \Rightarrow \gamma(k - r) = \beta k.\end{aligned}$$

Paneme tähele, et need kaks võrrandit oleks saanud otse siinusteoreemist kolmnurkade $\triangle AOB$ ja $\triangle KOB$ arvestusega, et tänu nurkade φ , δ ja γ väiksusele $|KB| \approx k$ ja $|AB| \approx a$.

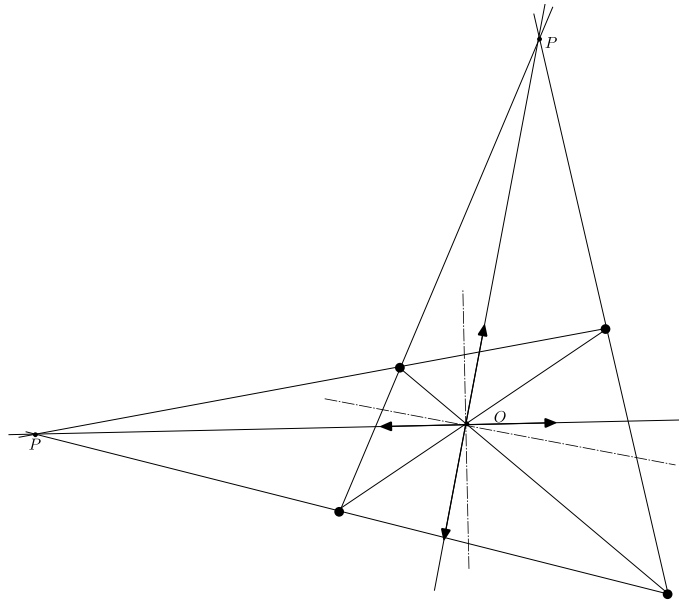
Arvestades, et $\beta/\alpha \approx n$, saame

$$\frac{a - r}{k - r} = \frac{a}{nk} \Rightarrow a = \frac{nrk}{nk - k + r} = \frac{1,6 \cdot 3 \cdot 5}{1,6 \cdot 5 - 5 + 3} = 4 \text{ mm}.$$

L231 Punktallikad ★★★★★

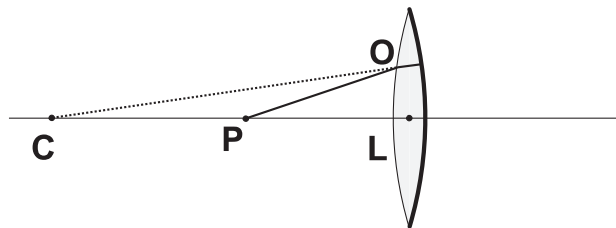
Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2010, G 9

Allikat ja kujutist ühendav sirge läheb läbi läätses keskpunkti ning see punkt peab jääma allika ja kujutise vahele, sest kujutis on tõeline. Seetõttu saame läätses keskpunkti O leida kui lõikude $S_1S'_1$ ning $S_2S'_2$ lõikepunkti, kus S_1 ja S_2 on allikad ning S'_1 ja S'_2 on vastavad kujutised. Et lõikepunkt tekiks, peavad S_1 ja S'_1 paiknema diagonaalselt. Edasi paneme tähele, et sirge kujutis on sirge, kusjuures need kaks sirget lõikuvad läätses tasandis. Et sirge S_1S_2 kujutis on $S'_1S'_2$, siis nende lõikepunkt P võimaldab meil leida juba läätses tasandi OP ; optiline peatelg on punktist O tõmmatud ristsirge Läätses tasandi seisukohast pole oluline, kumb sirgetest (S_1S_2 või $S'_1S'_2$) on kujutis ja kumb originaal. Seetõttu tekib meil kaks oluliselt erinevat võimalust: kas need kaks sirget paiknevad ligikaudu horisontaalselt või ligikaudu vertikaalselt, vt joonist.

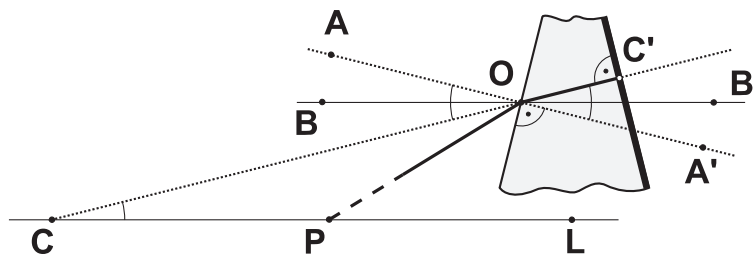


L232 Optiline süsteem ★★★★★

Autor: Andreas Valdmann, lõppvoor, 2011, G 8



Iga süsteemile langev valguskiir murdub läätse eesmisel pinnal, peegeldub tagumisel pinnal ja murdub uuesti. Lahenduse lihtsustamiseks vaatleme olukorda, kus kiirte käik on sümmeetriline. Sel juhul langeb murdunud kiir peegelpinnale risti, peegeldub otse tagasi ja teine murdumine on esimesega identne. Süsteemi sisenev ja sealt väljuv kiir lõikavad optilist peatelge ühes ja samas punktis P . Seal asuva punktobjekti kujutis langeb kokku objekti endaga.



Võtame vaatluse alla teljelähedase kiire PO , mille korral võime nurga $\angle LPO$ lugeda väikeseks. Lõik OC' on optilise peateljega veelgi väiksema nurga all ja punktide O ning C' kaugus optilisest peateljest on ligikaudu võrdne. Uurime lähemalt läätse õhukest kihti, mille kõrgus on palju väiksem kõverusraadiusest r . Sel juhul võime kõverpinnad asendada nende puutujatega. Pindade ristsirged on joonisel tähistatud punktiirjoonega ning need lõikavad optilist peatelge läätse kõverustsentrites. Optiline kõrvaltalg BB' on paralleelne optilise peateljega ning

$$\angle LCO = \angle B'OC' = \angle A'OB' = \angle BOC = \angle AOB \equiv \phi$$

ja murdumisnurk $\angle A'OC' = 2\phi$. Langemisnurgaks on $\angle AOP$. Murdumiseaduse rakendamisel kasutame väikese nurga lähendust

$$\frac{\sin(\angle AOP)}{\sin(\angle A'OC')} = n \approx \frac{\angle AOP}{\angle A'OC'},$$

millest

$$\angle AOP = n\angle A'OC' = 2n\phi.$$

Järgmisteks arvutusteks on vaja teada nurka

$$\angle LPO = \angle BOP = \angle AOP - \angle AOB = 2n\phi - \phi = (2n - 1)\phi.$$

Kuna lääts on õhuke ja punkt O ei ole kaugel optilisest peateljest, siis $|CO| \approx |CL|$ ja $|PO| \approx |PL|$ ning $|CL| = r - \frac{d}{2} \approx r$, kus d on läätse paksus keskkohas. Jällegi väikese nurga lähendust kasutades saame

$$|LO| = \angle LCO|CL| = \angle LPO|PL|,$$

millest

$$|PL| = \frac{\angle LCO}{\angle LPO}|CL| = \frac{\phi}{(2n - 1)\phi}r = \frac{r}{2n - 1}.$$

Viimaseks rakendame läätse valemit

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}$$

ja seost

$$|PL| = a = k = \frac{r}{2n - 1}$$

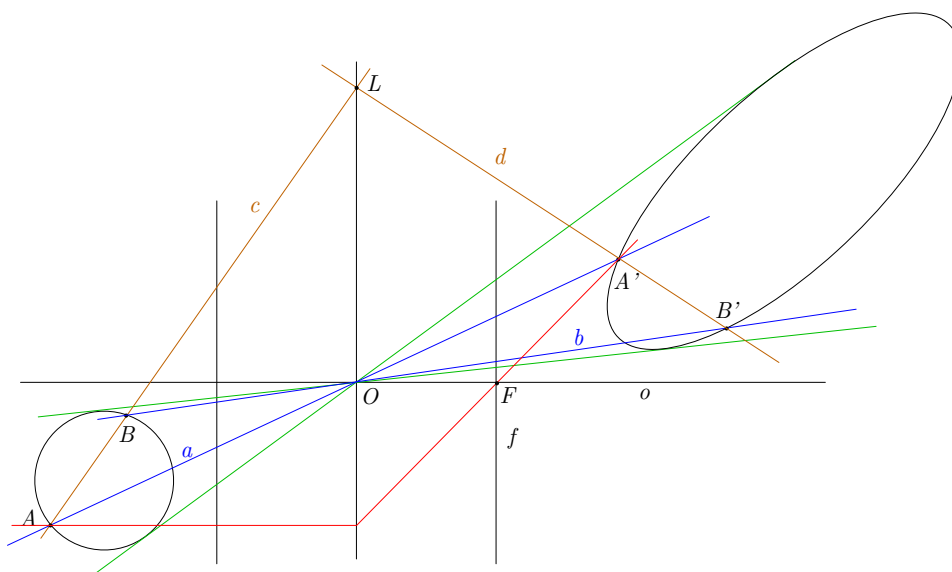
ning saame, et

$$f = \frac{|PL|}{2} = \frac{r}{2(2n - 1)}.$$

L233 Ring ja ellips ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2015, G 7

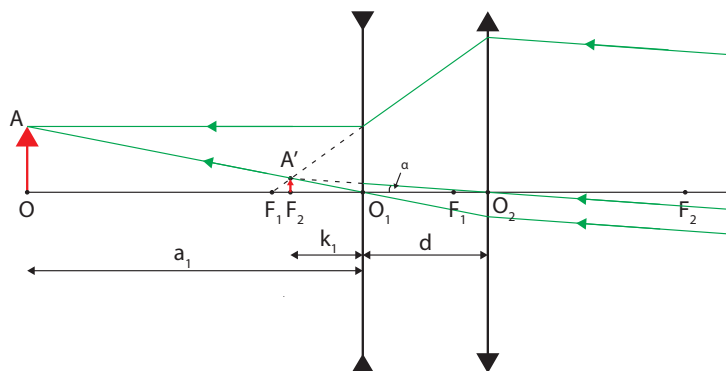
Läätse keskpunkt O on ringile ja ellipsile tõmmatud puutujate lõikepunkt, kuna puutepunktid peavad olema originaalkujutise paarid ning neid ühendavad sirged peavad läbima läätse keskpunkti. Läätse tasandi leidmiseks valime ringil kaks punkti, A ja B , ning leiame nende kujutised ellipsil A' ja B' sirgete AO ja BO ning ellipsi lõikepunktidena. Kui originaal on ringi kahest lõikepunktist see, mis asub läätsest kaugemal, siis selle kujutis on see, mis on läätsele lähemal (ja vastupidi), sest tõeline kujutis on pööratud tagurpidi. Kiir AB peab murduma läätse kiireks $A'B'$, murdepunkt annab meile punkti L läätisel ning sirge OL on läätse tasandiks. Optilise peatelje o leiame sirgele OL punktist O tõmmatud ristsirgenä. Fookuse leidmiseks tõmbame punktist A kiire, mis on paralleelne o -ga ja murdub läätsele punkti A' läbivaks kiireks, mille lõikepunkt o -ga annab fookuse F .



L234 Kaamera ★★★★★

Autor: Ardi Loot, lõppvoor, 2017, G 8

On selge, et kuna virmalised asuvad kaugel, peab terava kujutise tekkimiseks olema valgustundlik element esialgse läätse fookuses, st kaugusel $f = 14 \text{ cm}$. Kuna läätse keskpunkti läbiv kiir suunda ei muuda, saame esialgseks vaatenurgaks $2\alpha = 2 \arctan(h/f)$.



Joonisel on kujutatud kompaktses kaamera skeem. Vaatleme lihtsuse huvides olukorda tagurpidi, vaadeldav objekt asub fototundliku elemendi asemel ning kujutis konstrueeritakse lõpmatuses (kiirte pööratavuse printsiip). Nõgusläätis, mis on paigutatud kaugusele d kumerläätselt, tekitab objektist A näiva kujutise A' . Seda näivat kujutist vaadeldakse kumerläätsel, mis konstrueerib sellest kujutise lõpmatuses. Kirja saab panna järgnevad võrrandid:

$$\frac{1}{k_1} - \frac{1}{a_1} = \frac{1}{f_1}, \quad (1)$$

$$k_1 + d = f_2, \quad (2)$$

$$a_1 + d = L_m. \quad (3)$$

Neist esimene määrab nõgusa läätse poolt näiva kujutise asukoha. Teine võrrand garanteerib, et kumerlääts konstrueerib sellest kujutise lõpmatuses. Kolmas võrrand tagab, et kogu süsteem oleks kompaktne. Lisaks eeltoodud võrranditele on vaja säilitada ka esialgse kaamera vaatenurk. Selleks märkame, et joonisel toodud nurk $\angle A'O_2F_2 = \alpha$. Seetõttu saame kirja panna:

$$\frac{h'}{f_2} = \frac{h}{f}, \quad (4)$$

kus h' tähistab kujutise A' kõrgust, mille saame leida kolmnurkade OAO_1 ja $F_2A'O_1$ sarnasusest

$$h' = h \frac{k_1}{a_1}. \quad (5)$$

Lahendades võrranditest (1) - (5) tekkinud süsteemi, saame

$$f_1 = \frac{f_2 f (L_m - f_2)}{(f - f_2)^2} \approx 1,39 \text{ cm},$$

$$d = \frac{f_2 (f - L_m)}{f - f_2} \approx 1,91 \text{ cm}.$$

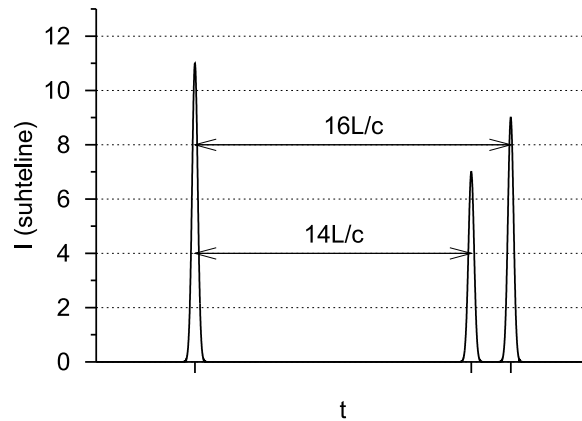
L235 Sähvatus ★★★★★

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2006, G 9

Alustuseks paneme tähele suurepärasest seost arvandmetes. Nimelt ühtivad peeglite fookused, sest peeglite vahemaa on võrdne peeglite fookuskauguste summaga. Nõguspeegli fookuskaugus on teatavasti pool raadiusest. Paralleelne kiirtekimp koondub peegli fookuses. Seepärast jääb paralleelne kiirtekimp antud süsteemis pärast kahekordset peegeldumist ikkagi paralleelseks. Kuid paneme tähele, et kiire laius väheneb kaks korda, sest ühe läätse fookuskaugus on kaks korda suurem teise omast.

Valguskiir jääb niisiis peeglite vahele pendeldama seniks, kuni tema kaugus teljest on väiksem kui $d_0/2 = 0,5 \text{ mm}$, kusjuures esialgne kauguste vahemiks, mis jõuab peegliteni on $d_2/2 = 48 \text{ mm}$ kuni $d_1/2 = 80 \text{ mm}$, ehk pilu läbimiseks peab valgusvihk koonduma $d_2/d_0 = 96$ kuni $d_1/d_0 = 160$ korda. Pärast n -kordset edasi-tagasi peegeldumist väheneb kiire kaugus teljest 2^n korda. Paneme tähele, et 128 on kahe aste ($2^7 = 128$). Seepärast väljub peeglile langenud kiir pilust kahes järjus: esimene osa pärast seitsmendat edasi-tagasi liikumist ning teine osa pärast kaheksandat. Üks edasi-tagasi liikumine peeglite vahel tekitab ajalise viivise $2L/c$. Kumerläätselangev paralleelne kiirtekimp koondub fookuses, kusjuures fookuseni jõudmise aeg ei sõltu kiire asukohast (teljelähedased kiired läbivad paksema klaasikihi kui kaugemad kiired, klaasi läbib valgus aga aeglasemalt). Niisiis on fookuses oodata kolme impulssi: peegli ümbert tulnud osa, pärast seitset edasi-tagasi peegeldumist tulnud osa ning pärast kaheksat. Nende impulsside ajaline vahe on vastavalt $14L/c$ ja $2L/c$.

Nüüd tuleb veel leida impulsside suhtelised intensiivsused, mis on võrdsed vastavate rõngaste pindaladega esialgse kiire ristlõikes. Esimese peegli läbimõõdust väiksem osa ei läbigi süsteemi. Kõige välimise rõnga pindala on võrdeline arvuga $192^2 - 160^2$, järgmisele impulsile vastav rõnga pindala $128^2 - 96^2$ ning viimasele impulsile vastava rõnga korral $160^2 - 128^2$. Need arvud suhtuvad kui: $32^2(6^2 - 5^2) : 32^2(4^2 - 3^2) : 32^2(5^2 - 4^2) = 11 : 7 : 9$.



L236 Klaasilinder ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2014, G 10

Tähistame märgitud punkti A -ga ning murdugu sealt lähtunud kiir punktis B nii, et suundub eemale läbi punkti C (vt joonist). Sihi BC suunast kaugelt vaadatuna näeme tumeda punkti asukohana punkti B . Uurime, kuidas sõltub kiire BC levikusuund, mida kirjeldame AO ja BC vahelise nurga $2\alpha - \beta$ abil, kiire algsest levikusuunast α :

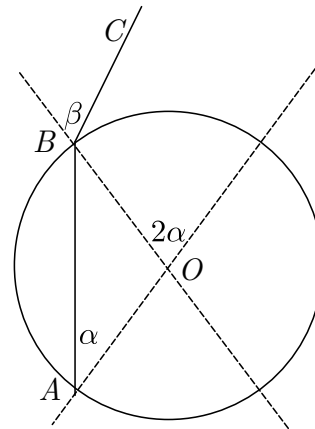
$$2\alpha - \beta = 2\alpha - \arcsin(n \sin \alpha).$$

Silindri algasendi korral $2\alpha - \arcsin(n \sin \alpha) = 0$, mille üks lahend $\alpha = 0$ annab keskmise näiva punkti ning kaks külgmist tumedat punkti vastavad võrrandi $\sin(2\alpha) = n \sin \alpha$ ülejäänud lahenditele vahemikus $-45^\circ < \alpha < 45^\circ$. Kui pöörata nüüd silindrit nurga δ võrra, siis vastavad näivad punktid võrrandi

$$2\alpha - \arcsin(n \sin \alpha) = \delta$$

lahenditele. Võrrandi vasakul pool on funktsioon, mis väikeste nurkade puhul käitub kui $(2 - n)\alpha$; suuremate nurkade puhul teise liidetava suhteline mõju kasvab. Seega juhul $2 > n$, on tegemist väikeste nurkade puhul kasvava funktsiooniga, mis läheb suuremate nurkade puhul üle kahanevaks; juhul $2 < n$ on see aga monotoonselt kahanev funktsioon. Kuivõrd $\delta = 0$ puhul on kolm lahendit, siis peab olema tegemist esimese juhtumiga, $2 > n$. Nende pöördenurkade δ puhul, mis on suuremad selle funktsiooni lokaalsest maksimumist, on võrrandil vaid üks lahend. Funktsioon saavutab globaalse maksimumi täieliku sisepeegelduse piirjuhul

$$n \sin \alpha = -1,$$



mis annab pöördenurga

$$90^\circ - 2 \arcsin \frac{1}{n} = 15^\circ \Rightarrow n = 1/\sin 37,5^\circ = 1,64.$$

L237 Autod ★

Autor: Oleg Košik, piirkonnavor, 2006, G 1

Vaatleme jalgratturi liikumist talle vastu sõitvate autode suhtes. Tema kiirus autode süsteemis on $v = v_1 + v_2 = 120$ km/h. Seega katavad $n_0 = 20$ autot vahemaa $vt_0 = 10$ km ning terve maantee ulatuses on autosid

$$n = n_0 \frac{s}{vt_0} = 360.$$

L238 Ummik ★

Autor: Jaan Kalda, piirkonnavor, 2007, G 2

Lõigul C on teatud punkti ajaühikus läbivate autode arv N_C võrdne lõikude A ja B vastavate arvude summaga: $N_C = N_A + N_B$. Olgu autode vahemaa a ja vaadeldav ajavahemik τ . Siis $N_i = v_i\tau/l$, ehk

$$\frac{v_C\tau}{l} = \frac{v_A\tau}{l} + \frac{v_B\tau}{l} \Rightarrow v_C = v_A + v_B.$$

Et $v_B = L_B/t_B$, siis toodud arvude põhjal leiame

$$v_B = \frac{3 \text{ km}}{36 \text{ min}} = 5 \text{ km/h}$$

ning seega $v_C = 8$ km/h. Lõpetuseks, $t_A = L_A/v_A = 20$ min ja $t_C = L_C/v_C = 15$ min. Niisiis kulub autol aega $T = t_A + t_C = 35$ min.

L239 Auto ★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2008, G 1

Olgu s läbitud vahemaa, a auto kiirendus ning τ aeg, millega auto läbis esimese $4/5$ teest. Kehtivad võrdused

$$s = \frac{at^2}{2}, \quad \frac{4}{5}s = \frac{a\tau^2}{2}.$$

Siit $\tau = 2t/\sqrt{5} \approx 13,4$ s. Seega otsitav ajavahemik on $t - \tau \approx 1,6$ s.

L240 Ratturid ★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2009, G 1

Olgu esimese ratturi sõiduaeg tundides t , siis teise ratturi sõiduaeg on $t + 1$ ning kolmanda ratturi oma $t + 2$. Et esimene ja teine rattur sõitsid läbi sama pika vahemaa, saame võrrandi

$$30t = 20(t + 1),$$

kust saame $t = 2$ tundi. Järelikult linnade A ja B vaheline kaugus on $s = 30t = 60$ km kilomeetrit. Kolmanda ratturi keskmine kiirus oli seega

$$v_3 = \frac{s}{t + 2} = 15 \text{ km/h.}$$

L241 Rong ★

Autor: Koit Timpmann, piirkonnavor, 2013, G 1

Olgu rongi maksimaalne kiirus v ning kogu sõiduaeg t . Kiirendamise jooksul on keskmine kiirus $v/2$ ning sellele kulub aega $\frac{2t}{5}$. Pidurdamine võtab aega $\frac{t}{5}$ ning ka selle jooksul on keskmine kiirus $v/2$. Kogu sõidu keskmine kiirus on seega

$$v_k = \frac{\frac{2t}{5} \frac{v}{2} + \frac{2t}{5} v + \frac{t}{5} \frac{v}{2}}{t} = \frac{7}{10} v.$$

Kokku,

$$v = \frac{10}{7} v_k \approx 51 \text{ km/h.}$$

L242 Veok ★

Autor: Valter Kiisk, piirkonnavor, 2005, G 1

Tähistagu x teepikkust, mille sõiduauto läbib möödasõidu lõpuks (vt joonist) ja olgu t möödasõiduks kuluv ajavahemik. Vahemaa x läbib sõiduauto ühtlase kiirendusega a , alustades algkiirusega v_1 , seega

$$x = v_1 t + \frac{at^2}{2}.$$

Teiselt poolt, veoauto liikumise põhjal

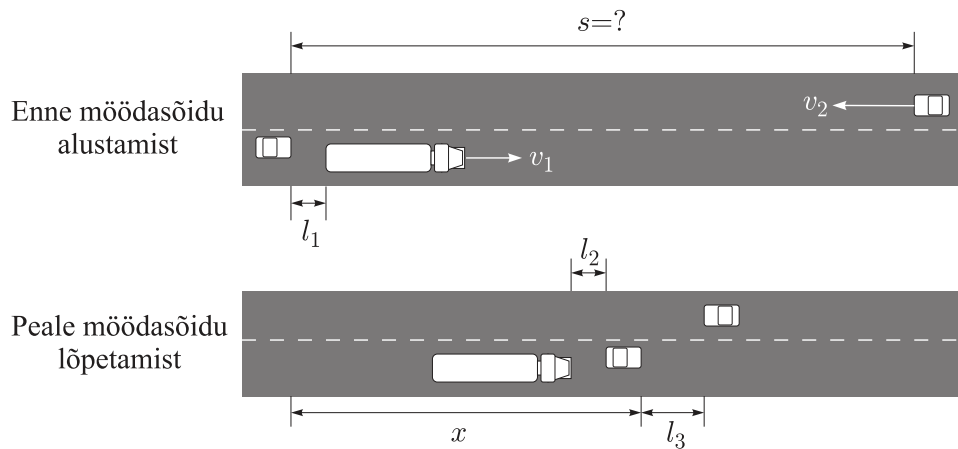
$$x = v_1 t + L_1 + L_2 + l_1 + l_2.$$

Kahe viimase avaldise võrdsustamisel saame

$$\frac{at^2}{2} = L_1 + L_2 + l_1 + l_2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2(L_1 + L_2 + l_1 + l_2)}{a}} \Rightarrow$$

$$s = v_1 t + L_1 + L_2 + l_1 + l_2 + v_2 t + l_3$$

$$s = (v_1 + v_2) \sqrt{\frac{2(L_1 + L_2 + l_1 + l_2)}{a}} + L_1 + L_2 + l_1 + l_2 + l_3 \approx 349 \text{ m}$$



Alternatiivne lahendus

Kasutame möödasõidu aja leidmiseks veoauto taustsüsteemi, kus möödasõitva auto algkiirus on $u = 0$:

$$\frac{at^2}{2} = L_1 + L_2 + l_1 + l_2.$$

Selle aja jooksul lähenevad veoauto ja vastutulev auto vahemaa

$$s_1 = (v_1 + v_2)t$$

võrra, mis tähendab, et möödasõitja algvahemaa on

$$s = s_1 + L_1 + L_2 + l_1 + l_2 + l_3,$$

st (asendades s_1 ja t eelnevatest võrranditest)

$$s = (v_1 + v_2) \sqrt{\frac{2(L_1 + L_2 + l_1 + l_2)}{a}} + L_1 + L_2 + l_1 + l_2 + l_3 \approx 349 \text{ m.}$$

L243 Rongiõnnetus ★

Autor: Oleg Košik, piirkonnavor, 2011, G 4

Teisendades kiirusühikuid, saame $v_1 = 17,5 \text{ m/s}$ ning $v_2 = 5 \text{ m/s}$. Olgu t aeg, mis möödus kokkupõrkeni. Kaubarong läbis teepikkuse $s_1 = v_1 t + \frac{1}{2} a_1 t^2$. Elektrirong läbis teepikkuse $s_2 = v_2 t + \frac{1}{2} a_2 t^2$. Kuna $s = s_1 + s_2$, siis

$$s = (v_1 + v_2) t + \frac{1}{2} (a_1 + a_2) t^2.$$

Lahendades ruutvõrrandi, leiame $t = 109 \text{ s}$. Seega kaubarongi kiirus oli kokkupõrke hetkel $v_k = v_1 + a_1 t = 6,6 \text{ m/s}$ ehk 24 km/h , elektrirongi oma $v_e = v_2 + a_2 t = 21,4 \text{ m/s}$ ehk 77 km/h .

L244 Rongivile ★

Autor: Mihkel Kree, lahtine, 2015, G 1

Tähistagu L veduri kaugust jaamaülemast hetkel, mil vedurijuht alustab vile laskmisega. Heli levimiseks jaamaülemast kulub sel juhul aeg $\tau_A = L/c$. Vile lõppedes on veduri kaugus jaamaülemast $L - vt_0$, kus v on rongi liikumise kiirus. Heli levimiseks sellelt kauguselt kulub aeg $\tau_B = (L - vt_0)/c$. Alustagu vedurijuht vile laskmisega hetkel τ_0 ning lõpetagu hetkel $\tau_0 + t_0$. Jaamaülem kuuleb vile algust hetkel $\tau_0 + \tau_A$ ning vile lõppu hetkel $\tau_0 + t_0 + \tau_B$. Nende ajahetkede vahe t_1 on mõistagi jaamaülema mõõdetud vile kestus. Seega saame võrrandi

$$t_1 = t_0 + \tau_B - \tau_A = t_0 - \frac{v}{c}t_0,$$

millest

$$v = \frac{t_0 - t_1}{t_0}c = 34 \text{ m/s}.$$

L245 Kaubarong ★

Autor: Erkki Tempel, piirkonnavor, 2015, G 1

Leiame ajad, mille jooksul rong pidurdas ning kiirendas:

$$t_p = \frac{v - v_h}{a_p}, \quad t_k = \frac{v - v_h}{a_k}.$$

Rong läbis selle ajaga vahemaa

$$s_p = \frac{v^2 - v_h^2}{2a_p}, \quad s_k = \frac{v^2 - v_h^2}{2a_k}.$$

Sõites ühtlaselt 72 km/h, oleks rong läbinud selle vahemaa ajaga

$$t_{py} = \frac{s_p}{v}, \quad t_{ky} = \frac{s_k}{v}.$$

Seega aja kaotus pidurdamisel ning kiirendamisel on

$$\Delta t_p = t_p - t_{py}, \quad \Rightarrow \quad \Delta t_p = \frac{(v - v_h)^2}{2va_p} = 28,125 \text{ s},$$

$$\Delta t_k = t_k - t_{ky}, \quad \Rightarrow \quad \Delta t_k = \frac{(v - v_h)^2}{2va_k} = 56,25 \text{ s}.$$

Kuna rong hilines aja Δt , siis saame leida aja Δt_h , mille rong kaotas ühtlaselt sõites:

$$\Delta t_h = \Delta t - \Delta t_p - \Delta t_k = 215,625 \text{ s}.$$

Kui rong läbis aeglaselt (18 km/h) sõites vahemaa s_h , siis kulus tal selleks aega

$$t_h = \frac{s_h}{v_h}.$$

Sõites kiirusega 72 km/h oleks ta selle vahemaa läbinud ajaga

$$t_{hy} = \frac{s_h}{v}.$$

Teades, et $\Delta t_h = t_{hy} - t_h$, saame avaldada teepikkuse s_h :

$$s_h = \frac{vv_h \Delta t_h}{v - v_h} = 1437,5 \text{ m} \approx 1,4 \text{ km}.$$

L246 Kiirabiauto ★

Autor: Sandra Schumann, lahtine, 2017, G 1

Olgu kiirabiauto kiirus v ja auto poolt tekitatava heli sagedus f_0 . Rakendame valemite kahel juhul: auto lähenemisel ja eemaldumisel.

Auto lähenemisel:

$$f_1 = \left(\frac{v_s}{v_s - v} \right) f_0.$$

Auto eemaldumisel:

$$f_2 = \left(\frac{v_s}{v_s + v} \right) f_0.$$

Kuna helisageduste erinevus kuue tooni võrra vastab kahekordsele erinevusele sagedustes, siis vastab ühetoonine erinevus $2^{\frac{1}{6}}$ -kordsele erinevusele ja pooleteistoonine erinevus $\left(2^{\frac{1}{6}}\right)^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{1}{4}}$ -kordsele erinevusele. Seega saame:

$$2^{\frac{1}{4}} = \frac{f_1}{f_2} = \frac{\left(\frac{v_s}{v_s-v}\right)f_0}{\left(\frac{v_s}{v_s+v}\right)f_0} = \frac{v_s+v}{v_s-v},$$

$$v_s + v = 2^{\frac{1}{4}}v_s - 2^{\frac{1}{4}}v,$$

$$(2^{\frac{1}{4}} + 1)v = (2^{\frac{1}{4}} - 1)v_s,$$

$$v = \frac{2^{\frac{1}{4}} - 1}{2^{\frac{1}{4}} + 1}v_s = \frac{2^{\frac{1}{4}} - 1}{2^{\frac{1}{4}} + 1} \cdot 343 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 29,64 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 107 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Saame vastuseks $107 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

L247 Pidurdus ★

Autor: Mihkel Rähn, piirkonnavor, 2017, G 2

a) Kuna autod pidurdavad maksimaalselt, siis on nende aeglustused võrdsed ning pidurdamise teepikkused on sama pikad. Seega, kui tagumise auto nina on pidurite rakendumisel samas kohas, kus eesmise auto saba oli piduritulede süttides, siis sellel piirjuhul veel otsasõitu ei toimu. Leiame vahemaa, millal see täpselt nii on:

$$s = vt = 50 \text{ km/h} \cdot 1,5 \text{ s} = 20,8 \text{ m.}$$

b) Vaatleme liikumist taustüsteemis, mis liigub kiirusega v autodega samas suunas. Selles taustüsteemis on autode esialgne kiirus null ja esimese auto pidurdamisel hakkab ta selle taustüsteemi suhtes ühtlaselt kiirenema kiirendusega, mis on leitav seosest $F = ma$, kus $F = \mu mg$, seega $a = \mu g$. Esmalt tuleb kindlaks teha, kas kokkupõrge leiab aset enne või pärast tagumise auto pidurite rakendumist. Kui kokkupõrge toimuks enne tagumise auto pidurdama hakkamist, siis kehtiks kokkupõrke ajal $l = at^2/2$, millest

$$t = \sqrt{2l/ug} = 1,0 \text{ s.}$$

Kuna see on väiksem kui 1,5 sekundit, siis toimub autode kokkupõrge enne teise auto pidurite rakendumist autodevahelise kiirusega $\Delta v = at = 36 \text{ km/h}$.

L248 Sonar ★★

Autor: Oleg Košik, piirkonnavor, 2006, G 3

Sonarist saadetakse välja heli lainepikkusega $\lambda_1 = v_h/f_1$. Helilaine läheneb laevale kiirusega $v_h - v$, seega jõuab laevani helisignaali sagedusega

$$f_L = \frac{v_h - v}{\lambda_1} = f_1 \frac{v_h - v}{v_h}.$$

Peegeldudes laevalt tagasi liigub helisignaali laeva suhtes kiirusega $v_h + v$. Kuna laevalt peegeldunud kiirt saab vaadelda kui saanud alguse laeva pardalt olevalt signaali allikalt sagedusega f_L , on signaali lainepikkus $\lambda_2 = (v_h + v)/f_L$. Sonari vastuvõtjasse rannikul jõuab signaal sagedusega

$$f_2 = \frac{v_h}{\lambda_2} = f_L \frac{v_h}{v_h + v} = f_1 \frac{v_h - v}{v_h + v}.$$

Avaldame viimasest võrdusest v :

$$v = v_h \frac{f_1 - f_2}{f_1 + f_2}.$$

Alternatiivne lahendus

Kasutame Doppleri valemit

$$f_2 = f_1 \frac{1 + v_2/v_h}{1 + v_1/v_h},$$

kus saatja ja vastuvõtja lähenevad üksteisele kiirustega vastavalt v_1 ja v_2 . Kui signaal jõuab rannikult laevani, siis antud olukorras on saatja kiirus $v_1 = 0$ ja vastuvõtja kiirus $v_2 = -v$, sest vastuvõtja (laev) kaugeneb saatjast. Doppleri valem saab sel juhul kuju

$$f_L = f_1 \frac{v_h - v}{v_h},$$

kus f_1 on laevani jõudva signaali sagedus.

Olukorras, kus signaal läheb laevalt tagasi rannikule, on saatja kiirus $v_1 = -v$, sest saatja (laev) kaugeneb vastuvõtjast (rannikult). Vastuvõtja kiirus on aga $v_2 = 0$. Vastavalt Doppleri valemile jõuab sonari vastuvõtjasse rannikul signaal sagedusega

$$f_2 = f_L \frac{v_h}{v_h + v} = f_1 \frac{v_h - v}{v_h + v}.$$

Avaldame viimasest võrdusest v :

$$v = v_h \frac{f_1 - f_2}{f_1 + f_2}.$$

Märkus. kui võrd iga realistliku laeva kiiruse puhul $v \ll v_h$, siis on lubatud kasutada ligikaudset Doppleri valemit

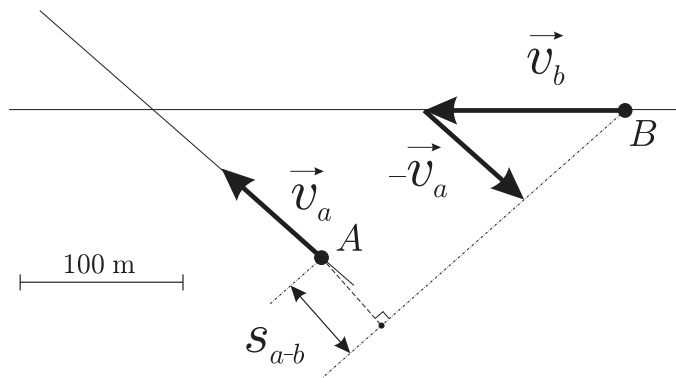
$$f \approx f_0 \left(1 + \frac{v}{v_h} \right).$$

Sama lähendust saab kasutada ka esimese lahenduse puhul.

L249 Autod ★★

Autor: Jaan Kalda, piirkonnavor, 2008, G 2

Kanname joonisele autode A ja B kiirusvektorid suvalises mõõtkavas (st vektorite moodulid suhtuvad nagu 40:60). Leiame nende vektorite vahe, see on autode suhteline kiirus. Tõmmates ühe auto juurest selle vektori sihilise sirge leiame tema trajektoori teise autoga seotud süsteemis. Teise auto kaugus sellest sirgest annabki vastuse. Mõõtkava arvestamine ja mõistlik numbriline tulemus annab 60 m.



L250 GPS ★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2009, G 5

Ajahetkel $t_1 = 75$ s tervisesportlane veel jooksis, sest eelmise perioodi keskmine kiirus polnud veel alanenud ($v_0 = 11$ km/h); et ajahetkeks $t_2 = 90$ s oli keskmine kiirus langenud kiiruseni $v_1 = 8$ km/h, siis oli ta seisnud juba ajavahemiku τ_1 , kus $v_1 T = v_0(T - \tau_1)$ ning $T = 15$ s. Seega,

$$\tau_1 = \left(1 - \frac{v_1}{v_0}\right) T.$$

Analoogselt, peale ajahetke t_2 seisis sportlane veel ajavahemiku τ_2 , kus $v_2 T = v_3(T - \tau_2)$ ning $v_2 = 3$ km/h ja $v_3 = 14$ km/h. Seega,

$$\tau_2 = \left(1 - \frac{v_2}{v_3}\right) T$$

ning kogu peatusaeg

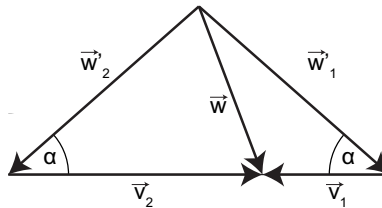
$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = T \left(2 - \frac{v_1}{v_0} - \frac{v_2}{v_3}\right) \approx 16 \text{ s.}$$

L251 Jalgrattur ★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2013, G 3

Jalgratturi mõõdetav tuul \vec{w}' on tuule kiirusvektori \vec{w} ja jalgratturi kiirusvektori \vec{v} vahe $\vec{w}' = \vec{w} - \vec{v}$. Olgu jalgratturi kiirusvektorid \vec{v}_1 ja \vec{v}_2 ning tuule kiirusvektorid \vec{w}'_1 ja \vec{w}'_2 vastavalt ühele ja teisele poole sõites.

Antud juhul teame ainult kiirusi, mitte nende suundi. Teades eelnevalt, et mõõdetud tuule kiirus on sama suur mõlemas suunas liikudes, saab kiirusvektorid esitada võrdhaarse kolmnurgana. (Kolmnurga mõlemad pooled vastavad erinevas suunas sõitmisele ning vastavad ülal mainitud valemile. Kuna tuule vektor on mõlemal juhul sama ja kiirused paralleelsed, saab selle konstrueerida nagu joonisel.)



Koosinusteoreemist:

$$\begin{cases} |\vec{w}|^2 = |\vec{w}'_1|^2 + |\vec{v}_1|^2 - 2|\vec{w}'_1||\vec{v}_1| \cos \alpha \\ |\vec{w}|^2 = |\vec{w}'_2|^2 + |\vec{v}_2|^2 - 2|\vec{w}'_2||\vec{v}_2| \cos \alpha. \end{cases}$$

Teades, et $|\vec{v}_2| = 2|\vec{v}_1|$ ja et $|\vec{w}'_1| = 2|\vec{w}'_2|$, saame esimese võrrandi korrutada kahega ja teise sellest lahutada.

$$|\vec{w}|^2 = |\vec{w}'_1|^2 - 2|\vec{v}_1|^2.$$

Ehk tuule tegelik kiirus on:

$$|\vec{w}| = \sqrt{|\vec{w}'_1|^2 - 2|\vec{v}_1|^2} \approx 14 \text{ km/h.}$$

L252 Viiul ★★

Autor: Jaan Toots, lõppvoor, 2014, G 2

Tekkival seisulainel peavad olema sõlmed mõlemas keele võnkumise osa otspunktis, seega võngub alla vajutades osa pikkusega $\frac{3}{7}L$, millele vastab lainepikkus $\lambda_0 = \frac{6}{7}L$. Puudutades võngub kogu keel ning on kolm tingimust: sõlmpunktid on mõlemas otsas ning lisaks puudutatavas punktis. Seega peab sellest punktist mõlemale poole mahtuma täisarv poollainepikkusi. Võnkuvate osade suhe on $\frac{3/7}{1-3/7}$ ehk $\frac{3}{4} \cdot 3$ ja 4 on ühistegurita. Seega peab jääma võnkuvatele pooltele vastavalt 3 ja 4 poollainepikkust. Vaadeldes pikkusega $\frac{3}{7}L$ keele poolt, taipame et $\lambda = \frac{2L}{7}$ ning

$$\frac{\nu}{\nu_0} = \frac{\lambda_0}{\lambda} = 3.$$

L253 Pöördlava ★★★

Autor: Taavi Pungas, piirkonnavor, 2012, G 4

Kettaga kaasapöörlevas taustsüsteemis peab näitleja liikuma mööda sirgjoont (et maksimeerida vahemaa). Aja t jooksul liigub ketas edasi nurga $360^\circ \frac{t}{T} = 2\pi \frac{t}{T}$ võrra. Ketta peale astudes ja mööda seda kõndides saab näitleja ise edasi liikuda nurga $2 \arcsin \frac{vt}{2r}$ võrra (näitleja peab jõudma tagasi ketta äärele ja sestap moodustab tema trajektoori ketta kõõlu). Kokku saame, et

$$\alpha = 360^\circ \frac{t}{T} + 2 \arcsin \frac{vt}{2r} = 2\pi \frac{t}{T} + 2 \arcsin \frac{vt}{2r}.$$

L254 Pallivise ★★★

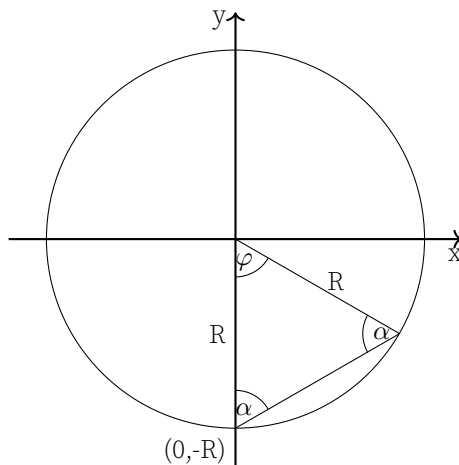
Autor: Eero Vaher, lõppvoor, 2015, G 5

Vaatleme palli lendu jaama teljega seotud inertsiaalses taustsüsteemis. Olgu Juku koordinaadid palli viskamise hetkel $(0, -R)$. Sellisel juhul liigub pall pärast viset ühtlaselt ning sirgjooneliselt, kusjuures selle kiiruse vertikaalsihiline komponent on v ning horisontaalsihiline komponent ωR . Järelikult $\tan \alpha = \frac{\omega R}{v}$, millest saame $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Kuna kehtib $\varphi = \pi - 2\alpha$, siis saame järeldada, et ka $\varphi = \frac{\pi}{3}$ ning pall läbib enne jaama pinnani jõudmist teepikkuse R . Palli kiirus on

$$\sqrt{v^2 + \omega^2 R^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \omega R,$$

seega on pall õhus aja $t = \frac{\sqrt{3}}{2\omega}$, mille jooksul jõuab jaam pöörduda nurga $\theta = \omega t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ võrra. Järelikult näeb Juku otse üles visatud palli maanduvat enda ees kaugusel

$$(\varphi - \theta) R = \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) R.$$



L255 Tsunami ★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2005, G 6

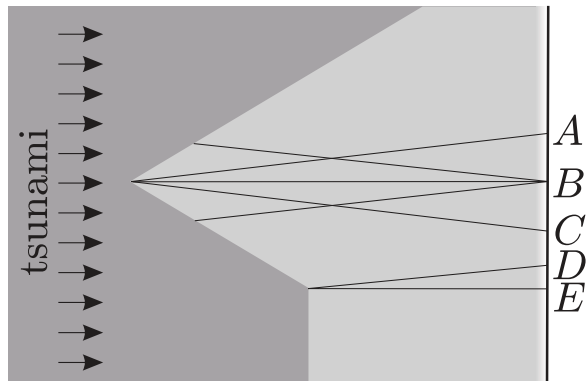
Laine levik toimub geomeetrilise optika seaduste kohaselt: astangu juures on laine langemisnurga ja murdumisnurga suhe

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\sqrt{gh_1}}{\sqrt{gh_2}} = \sqrt{\frac{h_1}{h_2}} \Rightarrow \alpha_2 = \arcsin \left(\sin \alpha_1 \sqrt{\frac{h_2}{h_1}} \right).$$

Seal astangu osas, kus langemisnurk on 0° , murdumist ei toimu. Seal aga, kus $\alpha_1 = 60^\circ$, on murdumisnurk

$$\alpha_2 = \arcsin \left(\sin 60^\circ \sqrt{\frac{3200}{5000}} \right) \approx 44^\circ.$$

Seega kaldub laine esialgselt levimissuunast kõrvale nurga $\beta = \alpha_1 - \alpha_2 = 16^\circ$ võrra. Niisiis jõuab rannalõigule AC kaks lainet ning rannalõigule DE ei jõua üldse lainet. Punkti B jõuavad mõlemad lained üheaegselt (sümmeetria tõttu) ning seal ongi laine kõige kõrgem.



L256 Hävituslennuk ★★★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2011, G 7

Olgu hetkel, mil Mati käivitab stopperi lennuki horisontaalsuunaline kaugus temast x_1 . Tähistame lennuki lennukõrguse H , posti pikkuse h ja kauguse L . Tekib kaks kujutletavat täisnurkset sarnast kolmnurka, mille ühise nurga tipus asub Mati. Nendest saame (kasutades eeldust, et ilmselt $l \ll H$):

$$\frac{H-l}{x_1} \approx \frac{H}{x_1} = \frac{h-l}{L}.$$

Kui lennuk on jõudnud üle Mati pea, jõuab temani lööklaine hetkel, mil lennuki horisontaalkaugus x_2 Matist on

$$x_2 = \frac{H}{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{H}{\tan\left(\arcsin\left(\frac{u}{v}\right)\right)} = \frac{H}{u} \sqrt{v^2 - u^2}.$$

Olgu τ mõõdetud aeg. Stopperi käivitamise hetkest seiskamiseni liikus lennuk vahemaa

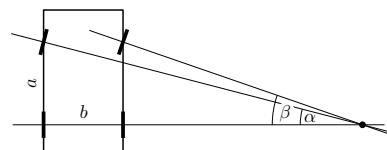
$$x_1 + x_2 = H \left(\frac{\sqrt{v^2 - u^2}}{u} + \frac{L}{h-l} \right) = v\tau \Rightarrow H = \frac{v\tau}{\left(\frac{\sqrt{v^2 - u^2}}{u} + \frac{L}{h-l} \right)} \approx 1630 \text{ m}.$$

L257 Rehvid ★★★

Autor: Siim Ainsaar, lõppvoor, 2012, G 5

Rattad tuleb pöörata suunda, mis ühtib nende liikumissuunaga. Ilmselt asub auto pöörlemisel tagarataste telgedega samal sirgel. Samas asub see optimaaljuhul ka nii vasaku kui ka parema esiratta teljel. Seega otsitav nurk

$$\beta = \operatorname{arccot} \left(\frac{a \cot \alpha - b}{a} \right) = \operatorname{arccot} \left(\cot \alpha - \frac{b}{a} \right).$$



L258 Kammid ★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2014, G 5

Kui hall kamm liigub ühe pii võrra, on uus pilt identne esialgsuga ning järelikult on tüme laik liikunud ühe "lainepikkuse" võrra. Ühe laikude "lainepikkuse" kohta tuleb 7 halli kammi piide "lainepikkust", seega liiguvad hallid laigud 7 korda kiiremini kui hall kamm: $v = 7 \text{ cm/s}$.

L259 Fotograaf ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2011, G 6

Olgu pilu laius d , katiku kiirus u ja piisa kujutise kiirus sensori tasandis v . Katiku taustsüsteemis liigub piisa kujutis kiirusega $u \pm v$; kui fotoaparaat on päripidi, siis tuleb võtta märk "+" ja kui tagurpidi, siis "-". Seega on piisa jälje tekkimise aeg $d/|u \pm v|$ ning jälje pikkus $l = vd/|u \pm v|$. Olgu $u \geq v$; siis

$$l_1 = \frac{vd}{u+v}, \quad l_2 = \frac{vd}{u-v}.$$

Jagades teise võrrandi esimesega saame

$$\frac{u+v}{u-v} = \frac{l_2}{l_1} = \frac{5}{3},$$

millest

$$3u + 3v = 5u - 5v,$$

ehk

$$u = 4v.$$

Kui fotoaparaat on portreeasendis, siis viibib piisa kujutis pilus ajavahemiku d/u jooksul ja jälje pikkus on seega

$$l_3 = vd/u.$$

Esimese võrrandiga läbi jagades leiame, et $l_3/l_1 = 1 + \frac{v}{u} = \frac{5}{4}$ ning

$$l_3 = \frac{5}{4}l_1 = 150 \text{ pikselit}.$$

Kui $u < v$, siis muutub ainult teine võrrand,

$$l_2 = \frac{vd}{v-u},$$

mistõttu $3u + 3v = 5v - 5u$ ja $u = v/4$, mistõttu

$$l_3 = 5l_1 = 600 \text{ pikselit}.$$

Märkus. Ülesande teksti põhjal on see üks kahest võimalikust vastusest; reaalselt, arvestades tüüpilist katiku liikumiskiirust (18 mm läbimisaeg $\frac{1}{125} \text{ s} \implies u = 2,25 \text{ m/s} \implies v = 4u = 9 \text{ m/s}$) on siiski üsna raske saavutada, et $v = 4u$: pildistamine peaks toimuma ohtlikult lähedalt. Kui joa kõrgus oleks nt 100 m, siis

vaba-langenud piisa kiirus oleks ca 44 m/s, mistõttu pildistamiskauguse ja objektiivi fookuskauguse suhe (st suurendustegur) tuleks $44/9 \approx 5$ ning isegi teleobjektiivi (nt $f = 300$ mm) korral peaks fotograaf olema joast vaid 1,5 m kaugusel.

Märkus 2. Eeldusest, et "pilu laius on d " võib jääda mulje, justkui eeldanuks me vaikimisi, et sensor ei jõua säritamise ajal täielikult avaneda. Ometigi kehtib lahendus ka siis, kui säriaeg on nii pikk, et sensor jõuab täielikult avaneda: piltlikult võib ette kujutada, et ikkagi mõlemad kardinal liiguvad samaaegselt, kuid pilu laius on suurem sensori kõrgusest, st esimene kardinal jõuab sensori kohalt eemale minna enne teise kardina saabumist.

L260 Laev ★★★★★

Autor: Tundmatu autor, lõppvoor, 2007, G 5

Näitame, et laev peab sõitma nii, et voolukiirused stardihetkel t_s ja finišihetkel t_f on võrdsed, $v(t_s) = v(t_f)$. Teeme seda vastuväiteliselt. Vaatleme konkreetse mõttes liikumist B suunas, mil laeva kiirus kalda suhtes on $v_0 + v(t)$. Sellisel juhul on läbitud vahemaa L graafiku $v(t)$ ja joone $v = -v_0$ vahelise piirkonna pindala. Nihutame stardi ja finišiaega väikese ajavahemiku Δt võrra. Läbitav vahemaa muutub seejuures $\Delta t(v_f - v_s)$ võrra. Kui $v(t_s) \neq v(t_f)$, siis saame valida Δt märgi selliselt, et $\Delta t(v_f - v_s) > 0$, st sama aja jooksul läbitud vahemaa kasvab saades suuremaks Lst . Seega saaks sõiduaega vähendada ning stardihetk polnud optimaalne.

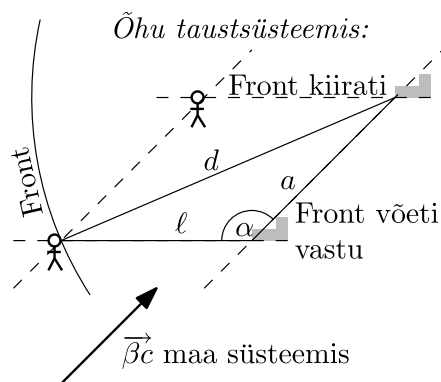
Eelpoolselgitatud tingimustele (stardi- ja finišihetke kiirused on võrdsed, graafiku ja joone $v = -v_0$ vaheline pindala võrdub 20 km-ga) vastavad stardiajad punktist A 22.20 ja punktist B 04.20.

L261 Müra ★★★★★

Autor: Siim Ainsaar, lahtine, 2009, G 10

Õhu taustsüsteemis on helilainefronnid kiirusega c kasvava raadiuse ja paigaloleva keskmega poolsfäärid. Helivõimsus jaotub ühtlaselt üle terve frondipinna, seega on tajutav võimsus pöördvõrdeline frondi pindalaga ehk pöördvõrdeline frondi raadiuse ruuduga. Lisaks on võimsus ka võrdeline frontide vastuvõtmise sagedusega ehk võrdeline helisagedusega, aga nagu peagi leiame, on sagedus konstant.

Õhu taustsüsteemis liiguvad nii matkaja kui ka jaam vastu esialgsele tuule suunale kiirusega βc . Järelikult kui front oli vastuvõtmise hetkeks raadiusega $d = ct$, siis selle kiirgamise algepunkt oli liikunud jaama suhtes allatuult kaugusele $a = (\beta c)t = \beta d$. Et see kaugus on kõigile frontidele ühesugune, on sama ka frontide teeloleku aeg ning aeg kahe frondi kiirgamise vahel võrdub ajaga nende vastuvõtmise vahel. Seega helisagedus ei muutu. Olgu jaama kaugus ℓ . Rakendame tekkinud



kolmnurgale koosinusteoreemi:

$$d^2 = a^2 + \ell^2 - 2a\ell \cos \alpha.$$

Kuna $x = \left(\frac{\ell}{d}\right)^2$ ja $\cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, saame \sqrt{x} leidmiseks ruutvõrrandi, kusjuures ℓ taandub välja (karakteristlik pikkusmõõde puudub).

$$\begin{aligned} \frac{\ell^2}{x} &= \frac{\beta^2 \ell^2}{x} + \ell^2 + \frac{\sqrt{2}\beta \ell^2}{\sqrt{x}} \\ x + \sqrt{2}\beta\sqrt{x} + \beta^2 - 1 &= 0 \\ x &= \left(\frac{-\sqrt{2}\beta \pm \sqrt{2\beta^2 - 4\beta^2 + 4}}{2}\right)^2 = \frac{(-\beta \pm \sqrt{2 - \beta^2})^2}{2} = 1 \mp \beta\sqrt{2 - \beta^2}. \end{aligned}$$

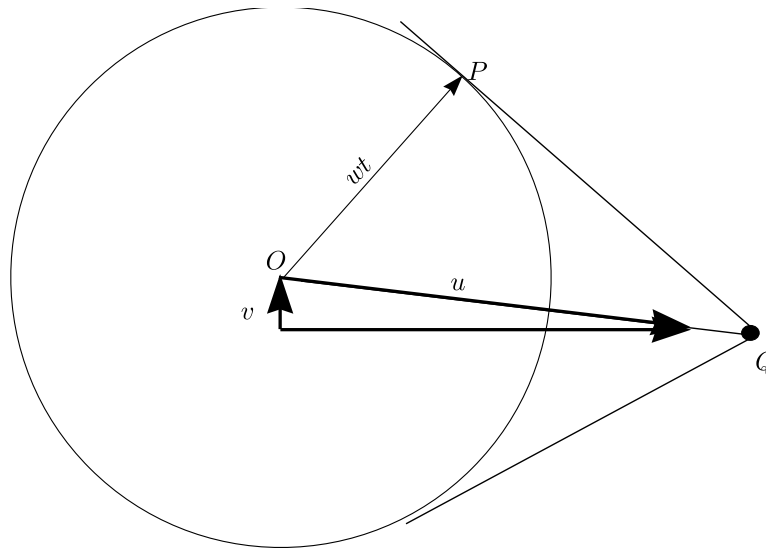
Heli jääb vaiksemaks, mistõttu $x < 1$ ja peame valima miinusmärgiga lahend

$$x = 1 - \beta\sqrt{2 - \beta^2}.$$

L262 Kaater ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2009, G 8

a) Veega seotud taustsüsteemis liiguvad lained paadi trajektoori suhtes sümmeetriliselt. Seega, veega seotud taustsüsteemis on paadi trajektoor lainetest moodustatud nurga poolitaja. Paadi kiirusest \vec{u} , jõe voolukiirusest \vec{v} ja paadi kiirusest maa suhtes moodustub kiiruste kolmnurk, vt joonis. Jooniselt mõõdame selle kolmnurga teravama nurga siinuse, $\sin \alpha = v/u = 0,26$, millest $v = 1,8$ m/s.



b) Kui paat tekitas teatud punktis häirituse, siis levis see ajaga t kaugusele wt (nähtavaks paadilaineks on selliste ringide mähisjoon), paat aga liikus kaugusele ut . Seega leiame jooniselt pikkuste suhte abil $w/u = |OP|/|OQ| = 0,64$, millest $w = 4,5$ m/s. Järelikult on vee sügavus $h = w^2/g = 2$ m.

L263 Päikese pöörlemine ★★★★★

Autor: Mihkel Kree, lahtine, 2014, G 10

Olgu Päikese pöörlemise joonkiirus ekvaatoril v . Kuna punktid A ja B lähenevad meile ja kaugenevad meist kiirusega v , siis mõõdetavad lainepikkused λ_A ja λ_B erinevad algsest lainepikkusest λ_0 Doppleri nihke tõttu. Punktist A näib kiirguvat lühem lainepikkus $\lambda_A = \lambda_0(1 - v/c)$ ning punktist B pikem $\lambda_B = \lambda_0(1 + v/c)$.

Kes Doppleri valemit peast ei tea, võib arutleda ka järgnevalt. Liikugu kiirguse allikas meie poole kiirusega v . Lainepikkusele λ_0 vastava laine sagedus on $f_0 = \frac{c}{\lambda_0}$, järelikult võime mõelda, et lainehari kiiratakse iga intervalli $\tau = 1/f_0 = \lambda_0/c$ järel, mis vastab laine perioodile. Kiiratagu mingil hetkel esimene lainehari. Ühe perioodi jooksul liigub see kaugusele $x = c\tau$; allikas ise liigub aga selle aja jooksul meile lähemale $\Delta x = v\tau$ võrra ja kiirgab sealt järgmise laineharja. Niisiis tundub meile kui vaatlejale, et kahe laineharja vaheline kaugus ehk lainepikkus on

$$\lambda' = x - \Delta x = (c - v)\tau = \lambda_0(1 - v/c).$$

Punktidest A ja B mõõdetud lainepikkuste erinevus avaldub niisiis kui

$$\Delta\lambda = \lambda_B - \lambda_A = 2\lambda_0 v/c,$$

kust saame lihtsalt avaldada joonkiiruse $v = c\Delta\lambda/2\lambda_0$ ning selle abil ka pöörlemisperioodi:

$$T_p = \frac{2\pi r}{v} = \frac{4\pi r \lambda_0}{c\Delta\lambda} = \frac{4 \cdot 3.14 \cdot 7 \cdot 10^8 \cdot 5.9 \cdot 10^{-7}}{3 \cdot 10^8 \cdot 7.8 \cdot 10^{-12}} \text{ s} \approx 26 T_m.$$

Päike ei ole tahke keha, selle erinevad laiuskraadid pöörlevad erineva nurkkiirusega. Pooluselähedastel piirkondadel kulub ühe täispöörde tegemiseks umbes 34 päeva.

L264 Traatrõngad ★★★★★

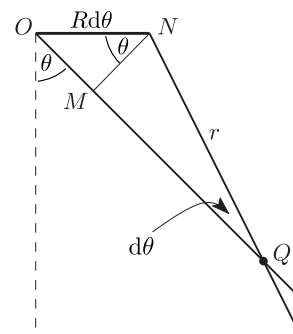
Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2014, G 9

Läheme süsteemi, mis pöörleb nurkkiirusega $\omega/2$; seal on näha, et löikepunkt ei pöörle, vaid liigub radiaalselt. Seega, laboratoorses süsteemis on selle nurkkiirus $\omega/2$; sellise nurkkiirusega pöörleb kõõl AB ; et kesknurk on kahekordne piirde-nurk, siis raadius OB (kus O on seisva rõnga keskpunkt) pöörleb nurkkiirusega ω ning järelikult on löikepunkti kiirus samaselt võrdne ωR -ga.

L265 Kodarad ★★★★★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2011, G 10

Kodara antud punkt näib kujutisel terav, kui selle kiirusvektor on suunatud pikki kodarat, st antud punktis kodar ei liigu enese ristsihis. Olukorda võib selgitada juuresoleva joonise abil. Olgu R ratta raadius ja olgu selle keskpunkt O . Kui kodara pöördenurk on θ ning see nurk muutub pildistamise jooksul nurga $d\theta$ võrra, siis O on läbinud teatud vahe-maa ($R d\theta$), aga kodar on samuti pöördunud sama nurga ($d\theta$) võrra. Jooniselt on näha, et uuel ja vanal kodara

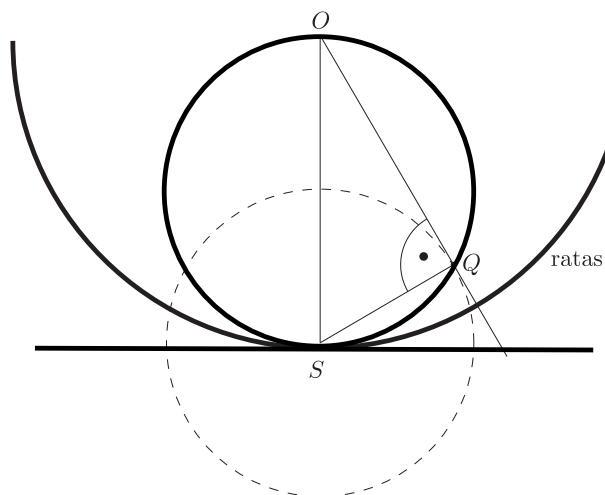


asendil on üks ühine punkt, olgu see punkt Q . Nii pildistamise alg- kui ka lõpphetkel asus selles punktis kodar, mistõttu kujutisel jääb see punkt selgelt näha (erinevalt teistest punktidest, kus kodar viibis vaid lühiajaliselt).

Kasutades eeltoodud joonist (kus tähistasime $OQ = r$) võime avaldada lõigu MN pikkuse kahel viisil: $R d\theta \cos \theta = r d\theta$, kus paremal pool kasutasime väikese nurga lähendust $\sin d\theta \approx d\theta$. Seega $R \cos \theta = r$, mis tähendab, et (a) punkt Q on leitav kodara lõikepunktina ratta ja maa kontaktpunktist S kodarale tõmmatud ristsirgega (vt järgnev joonis); (b) vaadeldes seda võrdust kui raadiuse r sõltuvust polaarnurgast θ näeme, et ülejäänud kodarate teravalt kujutuvad punktid asuvad ringjoonel, mille diameetriks on ratta raadius OS .

Alternatiivne lahendus

Pildistamise hetkel pöörleb kogu ratas ümber hetkelise pöörlemistelje, mis läbib ratta ja maa puutepunkti S (vt. joonist). Sellel hetkel liigub iga ratta osake mööda ringjoone kaart, mille keskpunktiks on S . Kui ühe sellisel moel liikuva punkti kiirus on mööda kodarat (OP), siis see punkt kujutub fotol selgena. Seega me otsime selliseid punkte Q , mille juures $\angle OQS$ on täisnurk. Piirdenurga omaduse põhjal peab selline punkt Q lebama ringjoonel, mille diameetriks on OS – sõltumata kodara kaldenurgast θ .



L266 Anemomeeter ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2016, G 9

Leviaegade suhtelised erinevused on väikesed, seega võime lugeda, et helikiirus on hulga suurem tuule kiirusest. Vaatleme heli levikut õhuga seotud taustsüsteemis, kus sensorite suhtelise nihke x - ja y -telje sihilised komponendid ($s_x = u_x \frac{a}{c_s}$ ja $s_y = u_y \frac{a}{c_s}$) on samuti väikesed: $s_x, s_y \ll a$; u_x ja u_y tähistavad tuule kiiruse komponente ning c_s - heli kiirust. Rangelt võttes pidanuksid siin valemis olema täpsed lennuajad t_A, t_B ja t_C , kuid nihked ise on väikesed ning leviaegade väikeste vahede tõttu tuleb viga juba tühiselt väike. Niisiis saame leviaegade jaoks avaldised:

$$\begin{aligned} t_A &= \frac{1}{c_s} \left(a + u_y \frac{a}{c_s} \right), \\ t_B &= \frac{1}{c_s} \left(a + u_x \frac{a}{c_s} \right) \text{ ja} \\ t_C &= \frac{1}{c_s} \left(a - u_x \frac{a}{c_s} \right), \end{aligned}$$

millest $\frac{a}{c_s} = \frac{1}{2}(t_B + t_C)$,

$$u_x = \frac{c_s^2}{a} \left[t_B - \frac{1}{2}(t_B + t_C) \right] = c_s \frac{t_B - t_C}{t_B + t_C} = 2a \frac{t_B - t_C}{(t_B + t_C)^2} \approx 6,1 \text{ m/s}$$

ning

$$u_y = \frac{c_s^2}{a} \left[t_A - \frac{1}{2}(t_B + t_C) \right] = 2a \frac{2t_A - t_B - t_C}{(t_B + t_C)^2} \approx 7,1 \text{ m/s}.$$

Seega on tuule kiirus $u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} \approx 9,4 \text{ m/s}$.

L267 Kaater ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2016, G 9

Vaatleme kaatri liikumist õhu suhtes: alguses $l_1 = t_1 v_1 = 2700 \text{ m}$ itta, siis $l_2 = t_2 v_2 = 900 \text{ m}$ kagusse ning lõpuks $l_3 = t_3 v_3 = 450 \text{ m}$ edelasse. Kokkuvõttes nihkuti lõunasuunas

$$L_S = \frac{l_2 + l_3}{\sqrt{2}} \approx 955 \text{ m}$$

ning idasuunas

$$L_E = l_1 + \frac{l_2 - l_3}{\sqrt{2}} \approx 3018 \text{ m},$$

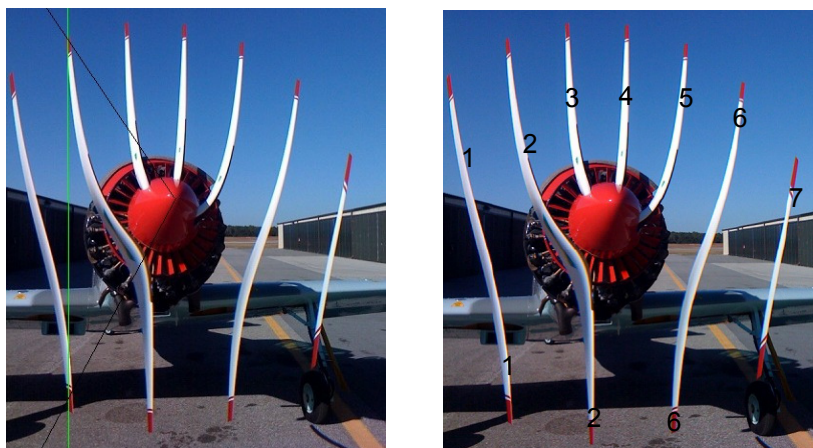
maa suhtes aga nihkuti l võrra lõunasse. Seetõttu pidi õhk liikuma L_E võrra läände ning $l - L_S$ võrra lõunasse. Siit saame tuule tugevuseks

$$v_t = \frac{\sqrt{L_E^2 + (l - L_S)^2}}{t_1 + t_2 + t_3} \approx 11,9 \text{ m/s} \approx 12 \text{ m/s}.$$

L268 Propeller ★★★★★

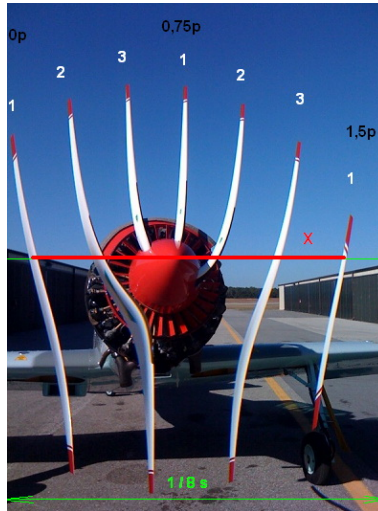
Autor: Andreas Valdmann, lõppvoor, 2010, G 10

- a) Propeller pöörleb vastupäeva, sest pildi ülaosas liiguvad labad vastu parajasti salvestatavale pikseliveerule ja seetõttu paiknevad seal labade kujutised tihedamalt.
- b) Vasakpoolsel joonisel on ülalt alla tõmmatud üks veerg millel on korruga peal maksimaalset 2 laba. Kui labasid oleks 2, peaks veerus paistma korruga vaid üks laba. Labad ise on kantud joonisele mustaga. Näha on, et labade vaheline nurk on suurem kui 90 kraadi ja seega propeller on 3-labaline.

*Alternatiivne lahendus*

Tähistame labade tekitatud jooned numbritega 1 kuni 7 nii nagu näidatud parempoolsel joonisel. Joonise alumises servas eelneb joonele 6. See tähendab, et joonele 2 vastav laba peab eelnema joonele 6 vastavale labale. Joonise ülemise serva põhjal võime analoogselt väita, et joonele 5 vastav laba peab eelnema joonele 6 vastavale labale. Järelikult peavad jooned 5 ja 2 vastama samale labale. Ülemises servas jääb joonte 5 ja 2 vahele veel 2 joont, st sellele labale vastavad jooned korduvad perioodiga 3 joont. See periood peab olema propelleri labade arvu n kordne. Et 3 on algarv, siis ainus variant on $n = 3$.

c) Iga kolmas triip pildil kujutab sama propellerilaba. Järgneval joonisel on valgega nummerdatud labad; propelleri telje kõrgusel on tõmmatud joon mille kogupikkus moodustab pildistamise aja jooksul ehk kogupikkus on $1/8$ s. Punasega on märgitud aeg millega laba number üks jõudis liikuda 1,5 pööret. (joonisel mustaga) Punase osa pikkus moodustab ligikaudu $4/5$ pildi kogulaiusest. Seetõttu moodustab ka nende punktide ajaline intervall $4/5$ pildi tegemise koguajast. Selle aja jooksul teeb propeller poolteist pööret. Ühes sekundis teeb propeller $1,5 / (1/8 \cdot 4/5) = 15$ pööret ja ühes minutis $15 \cdot 60 = 900$ pööret.



L269 Kile ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2008, G 8

Valgus peegeldub tagasi kile ülemiselt ja alumiselt pinnalt. Risti langeva valguse puhul on nende vaheline optiliste teede pikkuse erinevus $2n_1d$, kus d on (otsitav) kile paksus. Peegeldus on minimaalne, kui need kiired liituvad vastasfaasis, st

$$2n_1d = \left(N + \frac{1}{2}\right) \lambda.$$

Kui tahetakse, et peegeldunud valgus oleks nõrk ka punase ja sinise valguse jaoks, siis tuleb täisarvu N väärtus võtta võimalikult väike. Olgu $\lambda - \Delta\lambda$ selline lainepikkus, mille puhul peegeldunud kiired liituvad samas faasis, st peegeldunud valgus on maksimaalse intensiivsusega. Sellisel juhul $2n_1d = N(\lambda + \Delta\lambda)$. Kahest võrdusest saame $\Delta\lambda = \lambda/2N$. Et antud juhul oleme huvitatud võimalikult suurest $\Delta\lambda$ väärtusest, siis tuleb valida $N = 1$. Niisiis $d = \lambda/4n_1 \approx 102 \text{ nm}$.

L270 Kunstinäitus ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2009, G 10

Kile ülemiselt ja alumiselt pinnalt peegeldunud kiirte optiliste teepikkuste erinevus on maksimaalne, kui kiir langeb pinnaga risti ning võrdne $\Delta l_{\max} = 2n_1d$, kus, d on kile paksus. Minimaalne on see siis, kui kiir langeb peaaegu paralleelselt kilega (st horisontaalsel); sellisel juhul on optiliste teepikkuste vahe $\Delta l_{\min} = 2n_1d/\cos\alpha - 2d\tan\alpha$, kus α on kiles leviva kiire nurk vertikaali suhtes, $\sin\alpha = 1/n_1$. Seega

$$\Delta l_{\min} = 2d/\cos\alpha(n_1 - \sin\alpha) = 2n_1d(1 - n_1^{-2})/\sqrt{1 - n_1^{-2}} = 2n_1d\sqrt{1 - n_1^{-2}}.$$

Kui muuta vaatesuunda vertikaalsest horisontaalseks, siis muutub optiliste teepikkuste vahe $N\lambda$ võrra (sest selle protsessi käigus on võimalik registreerida N

interferentsimaksimumi, mil optiliste teepikkuste vahe on lainepikkuse täisarv-
kordne). Seega $2n_1d(1 - \sqrt{1 - n_1^{-2}}) = N\lambda$, millest

$$d = N\lambda/2n_1(1 - \sqrt{1 - n_1^{-2}}) \approx 13 \mu\text{m}.$$

L271 Magnetpeegel ★★

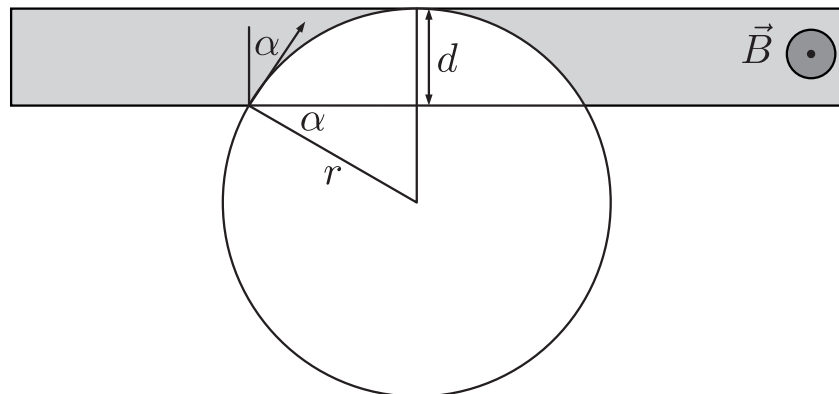
Autor: Kristian Kuppert, lahtine, 2013, G 2

Magnetvälja sattununa hakkab osake liikuma mööda ringjoone kaart, mille kõve-
rusraadiuse saame leida, kui mõtleme, et ringliikumiseks vajaliku kesktõmbejõu
annab Lorentzi jõud:

$$m \frac{v^2}{r} = qvB, \quad \text{millest} \quad r = \frac{mv}{qB}.$$

Kui langemisnurk α on piisavalt väike, läbib osake magnetvälja riba. Kui hakkame
 α -t suurendama, saabub olukord, kus ühel hetkel osake enam magnetvälja riba ei
läbi, vaid "peegeldub" tagasi. Sellel piirjuhul (vt joonist):

$$r \sin \alpha_{\max} + d = r, \quad \text{millest} \quad \alpha_{\max} = \sin^{-1} \left(1 - \frac{d}{r} \right).$$



L272 Solenoid ★★

Autor: Andres Laan, lõppvoor, 2011, G 5

Väljatugevus solenoidi sees on $B = \mu n I$, kus n on solenoidi traadi keerete arv pikkusühiku kohta, I seda läbiv vool ja μ vaakumi magnetiline läbitavus. Väli on suunatud piki solenoidi telge. Kui selle välja suunaga on risti mingisugunegi kiirus v , siis ühe pöörde tegemiseks kulub aeg $T = 2\pi m/eB$ (tuletatav Lorentzi ja tsentrifugaaljõu tasakaalust), kus m ja e on vastavalt elektroni mass ja laeng. Olgu elektronil ka solenoidi telje sihiline kiirus v . Ühikulises ajas läbib ta distantsi $1/v$. Selle aja sees teeb ta $1/(vT)$ pööret. Nende pöörete arv ülesande püstituse kohaselt peab olema n . Seega

$$n = \frac{1}{vT} = \frac{eB}{2v\pi m} = \frac{e\mu n I}{2v\pi m}.$$

Siit saame $v = e\mu I/(2\pi m)$.

Telje sihiline komponent kiirusel on üheselt määratud. Teljega risti olev kiiruse komponent peab olema nullist suurem.

L273 Generaator ★★

Autor: Andreas Valdmann, lahtine, 2013, G 5

a) Elektrivool generaatori mähises (juhtmekontuuris) tekib elektromagnetilise induktsiooni toimel ning seda protsessi kirjeldab Faraday seadus

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t},$$

kus ε on voltides mõõdetav elektromotoorjõu suurus ning $\Delta\Phi$ on juhtmekontuuri läbiva magnetvoo muutus, mis toimub ajavahemiku Δt jooksul. Magnetvoo suurus Φ sõltub mähise asendist generaatori magnetite suhtes. Mähise pöörlemisageduse suurendamisel 2 korda kulub magnetvoo muutmiseks $\Delta\Phi$ võrra 2 korda vähem aega ja seetõttu suureneb elektromotoorjõud 2 korda. Kuna generaatoris kaod puuduvad, siis võib tema sisetakistuse lugeda nulliks ning antud juhul on generaatori klemmipinge U alati võrdne tema elektromotoorjõuga. Lambis eralduv võimsus avaldub kujul

$$P = UI = \frac{U^2}{R},$$

Kus I on voolutugevus lambis ning R on lambi takistus. Kuna viimane ei muutu, siis järelikult suureneb pinge kahekordsel suurendamisel võimsus $2^2 = 4$ korda. Seega $P_1 = 4P_0$.

b) Jõumomendi avaldamise näitlikustamiseks kujutame ette, et generaatorit pööratakse vändaga, mille õla pikkus on l ning mille otsale avaldatakse tangentsiaalselt jõudu F . Pöördemoment M avaldub kui $M = Fl$. Kadude puudumisel on generaatori pööramise võimsus võrdne lambil eralduva võimsusega. Definitsioonist teame, et mehaaniline võimsus on töö tegemise kiirus ehk

$$P = \frac{A}{\Delta t},$$

kus A on ajavahemiku Δt jooksul tehtud töö, mis avaldub omakorda jõu ja nihke korrutisena $A = F\Delta s$. Nihe Δs kujutab antud juhul vända otspunkti tangentsiaalset liikumist, milleks kulus ajavahemik Δt . Vända otspunkti nihe avaldub kui

$\Delta s = \Delta\phi l$, kus $\Delta\phi$ on nihkele vastav pöördenurk. Niisiis saame avaldada mehaanilise võimsuse:

$$P = F \frac{\Delta s}{\Delta t} = Fl \frac{\Delta\phi}{\Delta t}.$$

Paneme tähele, et avaldises esinev $\Delta\phi/\Delta t$ on väнда pöörlemise nurkkiirus ω . Kõrvutades tulemust varem leitud jõumomendi avaldisega, saame lihtsa seose $P = M\omega$. Esiälgstel juhul oli generaatorit pöörav jõumoment seega $M_0 = P_0/\omega_0$. Kuna $\omega_1 = 2\omega_0$ ja $P_1 = 4P_0$, siis oli pöördemoment pärast sageduse suurendamist

$$M_1 = P_1/\omega_1 = 2P_0/\omega_0.$$

L274 Tiirlev kuulike ★★★

Autor: Eero Vaher, lahtine, 2013, G 6

Olgu positiivse laenguga kuulikese laeng Q . Kuulikesele mõjuks kirjeldatud magnetväljas Lorentzi jõud suurusega $F_L = QvB$. See jõud oleks kuulikesele mõjuvaks kesktõmbejõuks $F_k = \frac{mv^2}{r}$. Saame $QvB = \frac{mv^2}{r}$. Kaks isoleeritud võrdse massiga kuulikest tiirlevad ümber ühise massikeskme, seega on nende omavaheline kaugus $d = 2r$. Kuulikesi ringorbiidil hoidvaks kesktõmbejõuks on kuloniline jõud suurusega

$$F_C = \frac{kqQ}{d^2} = \frac{kqQ}{4r^2}.$$

Kuna teineteise ümber tiirlevad laengud peavad olema vastasmärgilised, siis $|F_C| = -F_C$. Võrdsustades kesktõmbejõu ning kulonilise jõu suuruse, saame

$$\frac{mv^2}{r} = -\frac{kqQ}{4r^2}$$

ehk

$$QvB = -\frac{kqQ}{4r^2}.$$

Lõpptulemuseks saame

$$q = -\frac{4vBr^2}{k}.$$

L275 Langev takisti ★★★

Autor: Andres Laan, piirkonnavor, 2011, G 8

Raami läbiva magnetvoo suuruse muutus põhjustab raamis elektromotoorjõu $\mathcal{E} = d\Phi/dt = Blv$. Elektromotoorjõud põhjustab raamis voolu $I = \mathcal{E}/R$. Magnetväljas mõjub vooluga juhtmele jõud $F = BIl$, mis peab olema tasakaalus raskusjõuga mg . Elimineerides I ja \mathcal{E} leiame

$$mg = \frac{B^2 l^2 v}{R} \Rightarrow v = \frac{mgR}{B^2 d^2}.$$

Alternatiivne lahendus

Lahendus lähtub energia jäävuse seadusest. Gravitatsioonijõu poolt tehtud töö võimsus on $P = mgv$. Elektrilise töö võimsus peab sellega võrduma, seega $P = mgv = U^2/R$. Pinge on leitav Faraday seadusest, mille kohaselt on pinge võrdne kontuuri läbiva magnetvoo muutumise kiirusega. Magnetvoo muutumise kiirus on $d\Phi/dt = Bdv$. Asendades selle eelmisesse võrrandisse ja avaldades v saame

$$v = \frac{mgR}{B^2 d^2}.$$

L276 Tsüklotron ★★★

Autor: Kristian Kuppart, piirkonnavor, 2018, G 10

Osakesed hakkavad tsüklotronis liikuma päripäeva mööda järjest suureneva raadiusega poolringjooni. Osakese trajektoori raadius avaldub kui $r = mv/qB$, kus v on osakese kiirus. Osake väljub tsüklotronist, kui tema trajektoori raadius kasvab sama suureks tsüklotroni raadiusega R , sel juhul tema kiirus $v = qBR/m$. Ühe täisringi jooksul saab osake elektriväljalt kineetilise energia $\varepsilon_k = 2qEd$, kuna osake läbib selle aja jooksul riba 2 korda. Seega on osakese kiirus tsüklotronist väljumisel

$$\frac{mv^2}{2} = 2qEdn, \quad v^2 = \frac{4qEdn}{m}.$$

Avaldades neist võrranditest n , saame $n = \frac{qB^2 R^2}{4mEd}$.

L277 Laengud ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2011, G 6

Kuna Lorentzi jõud mõjub alati risti liikumissuunaga, liiguvad laengud mööda ringjooni, mille raadiuse leiame Newtoni teisest seadusest:

$$qvB = m \frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad R = mv/qB,$$

kusjuures ühe ringjoone keskpunkt on punktis $(0, R)$ ja teisel $(-R, 0)$. Nende kiirusvektorid on alghetkel risti ja kui võrd need pöörlevad ühesuguse kiirusega, siis jäävad risti ka edasise liikumise käigus, kusjuures suhtelise kiiruse vektor $\vec{w} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$ moodustab kummagi kiirusvektoriga 45-kraadilise nurga. Vahekaugus on

maksimaalne, kui \vec{w} on risti laenguid ühendava sirgega, st laenguid ühendav sirge moodustab laengu asukohast tõmmatud puutujaga (st laengu kiirusvektoriga) 45-kraadilise nurga; on lihtne näha, et see juhtub hetkel, mil laengud on punktides $(0, 2R)$ ja $(-2R, 0)$, mis annab maksimaalseks vahekauguseks $l = 2\sqrt{2}R = 2\sqrt{2}mv/qB$.

Alternatiivne lahendus

Esitame laengute asukohad ajalises sõltuvuses kompleksarvudena kompleksstasandil:

$$z_1 = Ri - Rie^{i\omega t} \text{ ja } z_2 = -R + Re^{i\omega t},$$

kus ω on tsüklotronsagedus. Nende vahekaugus

$$l = |z_1 - z_2| = |R(1+i)(1 - e^{i\omega t})| = R\sqrt{2}|1 - e^{i\omega t}|$$

on maksimaalne, kui $e^{i\omega t} = -1$, mil $l = 2\sqrt{2}R = 2\sqrt{2}mv/qB$.

L278 Mass-spektromeeter ★★★★★ Autor: Kristian Kuppert, piirkonnavor, 2013, G 10
Potentsiaalide vahes U saab kiirendatud laetud osake kineetilise energia

$$\frac{mv^2}{2} = qU,$$

siit avaldame osakese kiiruse:

$$v = \sqrt{\frac{2qU}{m}}.$$

Kuna magnetväli on kiirusega risti, hakkab laetud osake magnetvälja jõudes liikuma seal mööda ringjoone kaart, kus ringjoone raadius $R = \frac{mv}{qB}$. Selleks ajaks, kui osake jõuab detektorini, on ta läbinud pool ringjoonest. Olgu m_2 raskema isotoobi mass ja m_1 kergema isotoobi mass. Sel juhul

$$2 \left(\frac{m_1 v_1}{qB} - \frac{m_2 v_2}{qB} \right) = d,$$

ehk

$$m_2 v_2 = \frac{qBd}{2} + m_1 v_1.$$

Arvestades, et $v_1 = \sqrt{\frac{2eU}{m_1}}$ ja $v_2 = \sqrt{\frac{2eU}{m_2}}$, kus e on elementaarlaeng, saame eelmise võrrandi ümber kirjutada kui

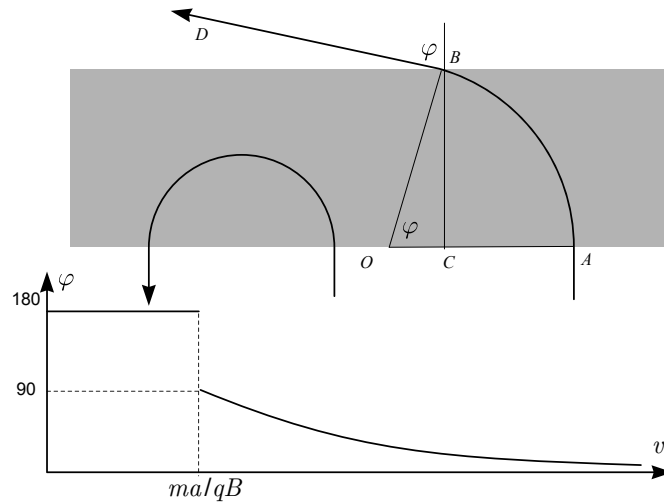
$$\sqrt{m_2} = \sqrt{m_1} + \frac{Bd}{2} \sqrt{\frac{e}{2U}}.$$

Võttes arvesse, et $m_2 = \frac{\mu_2}{N_A}$ ja $m_1 = \frac{\mu_1}{N_A}$, kus N_A on Avogadro arv, saame:

$$\mu_2 = N_A \left(\sqrt{\frac{\mu_1}{N_A}} + \frac{Bd}{2} \sqrt{\frac{e}{2U}} \right)^2.$$

L279 Magnetväli ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, piirkonnavoore, 2015, G 9



Laeng sooritab magnetväljas ringliikumist, vt joonis; ringi raadiuse leiame Newtoni II seadusest $Bqv = mv^2/R$, millest $R = \frac{mv}{qB}$. Enne ja pärast ringliikumist on trajektooriks sirge, kusjuures üleminek ringjooneks on ilma murdepunktita, st sirgjooned on ringile puutujaks. Väikeste kiiruste korral, kui $R < a$, st $v < \frac{Bqa}{m}$, siis läheb osake otse tagasi, st väljumisnurk $\varphi = \pi \text{ rad} = 180^\circ$.

Väljudes on kiirusvektor risti ringi raadiusega, st $\angle OBD = \frac{\pi}{2}$, mistõttu $\varphi = \angle COB$. Seega,

$$\varphi = \arcsin \frac{BC}{BO} = \arcsin \frac{a}{R} = \arcsin \frac{qBa}{mv}.$$

L280 Traat ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoore, 2007, G 10

Traat võtab kaare kuju (sest Amper'i jõud mõjub analoogselt täispuhutud palli puhul pallikestale ülerõhu poolt mõjuva jõuga: lühikesele mõttelisele traadijupile mõjuv jõud on risti traadijupiga). Kaare raadiuse R saab leida järgmisest võrrandist:

$$a = 2R \sin(L/2R).$$

Väikese kaare-elementi jaoks (pikkusega αR) välja kirjutatud Amper'i jõu ja mehaanilise pinge tasakaalust leiame pinget traadis: $\alpha RIB = T\alpha$. Eeldusel, et $L \gg a$, moodustub kaarest peaaegu täisring, st $R = L/2\pi$; seega

$$T = LIB/2\pi.$$

L281 Pool ★★★★★

Autor: Siim Ainsaar, lõppvoor, 2008, G 10

Venitame pooli väikese $\Delta\ell$ võrra pikemaks ja avaldame tehtud töö (A) kahel eri viisil. Ühelt poolt $A = F_1\Delta\ell$. Samas salvestub osa kulutatud energiat (ΔE_m) magnetväljas ja ülejäänud (ΔE_v) kas eraldub vooluallika sisetakistusel (see peab nt. lühise korral jääva voolu hoidmiseks alati olemas olema) või, kui $A < \Delta E_m$, täiendatakse vooluallika tööga. Igal juhul:

$$A = \Delta E_m + \Delta E_v.$$

ℓ suurenedes B väheneb, mistõttu ilmselt $\Delta E_m < 0$ ja vooluallika sisetakistusel eraldub energiat:

$$A > 0 \implies \Delta E_v > 0.$$

Vajalikud energiamuudused võime leida mitmel eri viisil.

Esimene meetod. Olgu kogu magnetvälja energia E_m . Selle energia ruumtihedus:

$$w = \frac{B^2}{2\mu_0} \implies E_m = w\ell S = \frac{\ell S B^2}{2\mu_0} \implies \Delta E_m = \frac{S\Delta(\ell B^2)}{2\mu_0} = \frac{INS \cdot \Delta B}{2}.$$

Toimugu pooli pikenemine ajaga Δt ja indutseerigu magnetvoo muutus poolil elektromotoorjõu absoluutväärtusega E . Faraday induksiooniseadusest:

$$\mathcal{E} = N \frac{|\Delta B| \cdot S}{\Delta t}.$$

Siit saamegi ΔE_v :

$$\Delta E_v = I\mathcal{E}\Delta t = INS|\Delta B|.$$

Teine meetod. Leiame tiheda pooli induktiivsuse L :

$$NBS = LI \implies L = \frac{NBS}{I}.$$

Magnetvälja energia:

$$E_m = \frac{LI^2}{2} = \frac{NBSI}{2} \implies \Delta E_m = \frac{INS \cdot \Delta B}{2}.$$

Toimugu pooli pikenemine ajaga Δt ja indutseerigu magnetvoo muutus poolil elektromotoorjõu absoluutväärtusega \mathcal{E} . Eneseinduksioonielektromotoorjõud tuleneb Faraday induksiooniseadusest:

$$\mathcal{E} = \frac{|\Delta(NBS)|}{\Delta t} = \frac{|\Delta(LI)|}{\Delta t} = \frac{NS|\Delta B|}{\Delta t},$$

kust saame:

$$\Delta E_v = I\mathcal{E}\Delta t = INS|\Delta B|.$$

Ühine osa mõlemale lahendusele. Leiame ΔB , eeldades, et $\Delta\ell$ on väike:

$$\Delta B = \mu_0 IN \Delta \left(\frac{1}{\ell} \right) = \mu_0 IN \left(\frac{1}{\ell + \Delta\ell} - \frac{1}{\ell} \right) = -\mu_0 IN \frac{\Delta\ell}{(\ell + \Delta\ell)\ell} \approx -\mu_0 IN \frac{\Delta\ell}{\ell^2}.$$

Lõpuks:

$$F = \frac{A}{\Delta\ell} = \left(-\frac{INS}{2} + INS\right) \frac{|\Delta B|}{\Delta\ell} = \frac{INS|\Delta B|}{2\Delta\ell} = \frac{\mu_0 I^2 N^2 S}{2\ell^2}.$$

Märkus. Paar sõna ülesande tekstis tehtud eelduse kohta, et kõik keerud hakkavad otstest tõmbamisel eemalduma võrdse vahemaa võrra. Tegelikult see ei kehti, otstest tõmbamisel hakkaksid kõigepealt lahti hargnema otsmised keerud (ja märksa väiksema jõu juures). Ilmselt oleks võimalik keerdude ühtlane eemaldumine spetsiaalse mehaanilise konstruktsiooni abil, kui keerud poleks mitte klaaspulgal, vaid vastava raamistiku peal. Aga selgub, et antud ülesande vastus realiseerub lihtsamas olukorras ka. Kui võtta kinni poolist kahest lähestikku asuvas kohas keskpäiga läheduses, siis allpoolleitat jõud on ühtlasi selline jõud, millega tõmbamisel saab natuke eemaldada pika poolikeskkohast vasakule- ja paremale poole jäävaid keerde (seda väidet me siinkohas tõestama ei hakka).

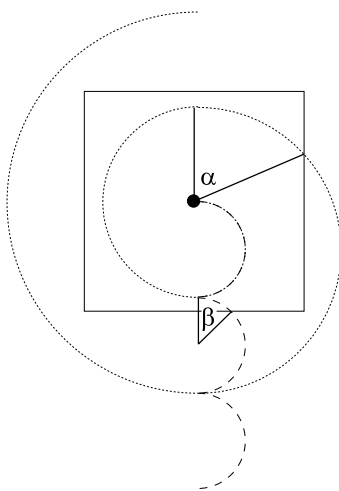
L282 Laeng ★★★★★

Autor: Oleg Košik, lahtine, 2010, G 8

Paneme tähele, et ajavahemik T on võrdne poolega tsüklotronperioodist (ajaga, mis kulub sellel laengul magnetväljas täistiiru tegemiseks). Seega antakse impulsimuut $\Delta p = Eq\tau$ iga kord kiirusega paralleelselt (ii) või antiparalleelselt (i). Seega hakkab juhtumil (ii) impulss kasvama lineaarses sõltuvuses lülituste arvuga $n = [t/T]$ (kus t on vaadeldav ajahetk ja nurksulud tähistavad täisosa): $p = Eq\tau[t/T]$. Et trajektoori kõverusraadius on võrdeline impulsiiga, $R = v/\omega = p/qB$, siis kasvab kõverusraadius samuti lineaarselt n -ga, vt punktiirjoont joonisel. Juhtumil (i) paneb esimene jõuimpulss laengu liikuma, teine aga peatab liikumise. Tulemuseks on joonisel toodud laineline trajektoor (katkendjoont joonisel). Tuginedes nendele trajektooreidele saame teha tabeli osakese eemaldumuse $l = \max(x, y)$ jaoks x või y -teljest erinevatel ajahetkedel.

t/T	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
l/R (i)	1	2	2	2	3	4	4	4	5	6
l/R (ii)	1	2	2	2	3	4	4	4	5	6

Nagu näha, toimub eemaldumine mõlemal juhul vaadeldavate ajahetkede jaoks täpselt ühekiiruselt. Siiski, kui kuubi poolkülpikkus ei ole mitte R -i täisarvkorrdne, siis väljub (i) juhtumi korral osake pisi-natuke varem. Sellest võib aru saada uurides võrdlevalt kauguse l kasvufaase juhtumil (i) ja (ii) ja juuresolevat joonist: antud ruudukujulise piirkonna jaoks väljumisaeg $2T + \Delta t$, kus täiendav ajavahemik juhtumil (ii) $\Delta t = \pi\alpha/T$ juhtumil (i) $\Delta t = \pi\beta/T$. Kuivõrd $\alpha > \beta$, siis saamegi järeldada, et juhtumil (i) väljub osake varem. On võimalik näha, et võrratus $\alpha > \beta$ kehtib peaaegu alati – välja arvatud siis, kui kuubi külje pikkus on R -i paarisarvukordne. Ülesandes antud eelduse $t \gg T$ tõttu muutub see väike väljumisaja erinevus tühiseks: aegade suhe sellel piirjuhul on 1.



L283 Magnetväli ★★★★★

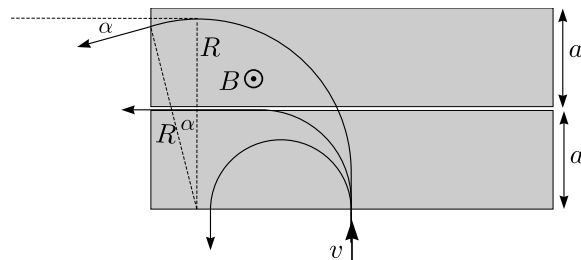
Autor: Jaan Kalda, piirkonnavor, 2010, G 9

Magnetväljas mõjub elektronile Lorentzi jõud $F = Bev$, mis on kiirusega kogu aeg risti ning annab elektronile kesktõmbekiirenduse v^2/R , kus R on trajektoori kõverusraadius. Newtoni teisest seadusest $Bev = mv^2/R$, millest $R = vm/Be$.

Et elektroni kiirus ei muutu (energia säilib!), siis ka kõverusraadius ei muutu, st elektron liigub mööda ringjoont raadiusega R . Tuues sisse tähistuse $v_0 = aBe/m$, saame eelmise avaldise kirjutada kujul $R = vm/Be = va/v_0$.

Kui $v < v_0$, siis elektron teeb magnetväljas poolringi ning väljub tuldud suunas tagasi, st pöördenurk on π rad. Vastava graafikuosa eest.

Kui $v \approx v_0$, siis saab elektron väljuda mööda kitsast pilu, vt joonist, st pöördenurk on $\pi/2$ rad. Vastava graafikuosa eest.

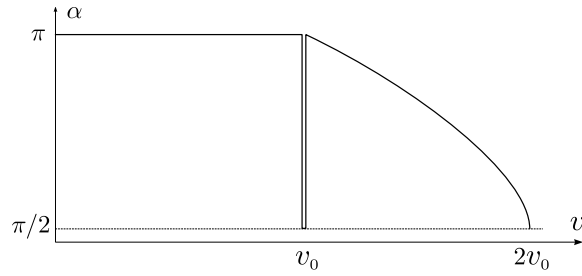


Kiiruse edasisel suurenemisel väljub elektron külgsuunas; joonise abil on lihtne näha, et väljumisnurk on

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{2a - R}{R} = \frac{\pi}{2} + \arcsin \left(2\frac{v_0}{v} - 1 \right).$$

Kvalitatiivselt mõistliku graafikuosa eest, st graafikuosa algab väärtuselt π rad ja lõppeb väärtuse $\pi/2$ rad juures.

Kokkuvõtvalt on sõltuvus $\alpha(v)$ esitatud järgmisel leheküljel oleval graafikul.



L284 Laetud pendel ★★★★★

Autor: Eero Vaher, lahtine, 2015, G 10

Kuulikesele mõjuvad raskusjõud F_g , niidi pinge T ning Lorentzi jõud F_L . Kuulike püsib ringjoone kaarekujulisel trajektooriga seni, kuni sellele mõjuvate jõudude projektsioonid niidi sihile rahuldavad võrrandit $T + F_L - F_g \cos \alpha = F_k$, kus α on niidi kõrvalekaldenurk tasakaaluasendist ning F_k on ringjoone kaarel püsimiseks tarvilik kesktõmbejõud. Kuulikesel ringjoone kaarekujulisest trajektooriga kõrvalekaldumisel ei saa niit olla pinges. Järelikult pole kuulikesel trajektooriga enam ringjoone kaar juhul $F_L > F_g \cos \alpha + F_k$. Olgu v kuulikesel kiirus nurga α korral, mille saame leida energia jäävusest

$$\frac{mv^2}{2} = -mg\Delta h,$$

kus $\Delta h = l \cos \alpha - l + H$ on kuulikesel kõrguse muut. Järelikult

$$v = \sqrt{2g(l \cos \alpha - l + H)} = \sqrt{2gl \left(\cos \alpha - \frac{1}{8} \right)}$$

ning lahendamist vajav võrrand on $qBv = mg \cos \alpha + \frac{mv^2}{l}$ ehk

$$qB \sqrt{2gl \left(\cos \alpha - \frac{1}{8} \right)} = mg \cos \alpha + 2mg \left(\cos \alpha - \frac{1}{8} \right).$$

Mõlemal poolel ruutu võttes saame

$$2q^2 B^2 gl \left(\cos \alpha - \frac{1}{8} \right) = m^2 g^2 \left(3 \cos \alpha - \frac{1}{4} \right)^2.$$

Kuna $2q^2 B^2 l = \frac{3}{2} m^2 g$, siis võime selle võrrandi viia kujule

$$\frac{3}{2} \cos \alpha - \frac{3}{16} = 9 \cos^2 \alpha - \frac{3}{2} \cos \alpha + \frac{1}{16}.$$

Saame ruutvõrrandi $9 \cos^2 \alpha - 3 \cos \alpha + \frac{1}{4} = 0$ ehk $9 \left(\cos \alpha - \frac{1}{6} \right)^2 = 0$. Kuna selle ruutvõrrandi kaks lahendit on võrdsed, siis kas $F_L \leq F_g \cos \alpha + F_k$ või $F_L \geq F_g \cos \alpha + F_k$ iga α korral. Vaadeldes juhtu $\cos \alpha = \frac{1}{8}$ näeme, et $F_L \leq F_g \cos \alpha + F_k$ ning järelikult on kuulikesel trajektooriga ringjoone kaar raadiusega l , mille otspunktide kõrgus tasakaaluasendist on $\frac{7}{8}l$.

L285 Silinder ★★★★★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2007, G 10

Vaatleme mõttelist ringikujulist kontuuri, mis ühtib silindri külgpinna ristlõikega. Muutuv magnetväli tekitab suletud kontuuris elektromotoorjõu

$$\mathcal{E} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{S\Delta B}{\Delta t} = \frac{\pi R^2 \Delta B}{\Delta t}.$$

Sellise elektromotoorjõu olemasolu tähendab, et meil on teatud keeris-elektriväli E , mis on telgsümmeetrilisel juhtumil konstantne piki kontuuri ning seotud elektromotoorjõuga:

$$E = \frac{\mathcal{E}}{2\pi R} = \frac{1}{2} \frac{R\Delta B}{\Delta t}.$$

See elektriväli mõjub silindri külgpinnal olevale laengule q_i jõuga $F_i = Eq_i$, mis on risti teljelt tõmmatud raadiusvektoriga. Seega on selle jõumoment telje suhtes $M_i = Eq_i R$. Summeerides üle kõikide laengute, saame tuua ER sulgude ette ning summaarne jõumoment avaldub kui $M = EQR$, kus Q on summaarne laeng. See tekitab nurkkiirenduse

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{M}{I_0},$$

kus $I_0 = \frac{1}{2}mR^2$ on silindri inertsimoment telje suhtes. Asendades siia M ja E avaldised leiame

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{2EQR}{mR^2} = \frac{2QR}{mR^2} \frac{1}{2} \frac{R\Delta B}{\Delta t} = \frac{Q}{m} \frac{\Delta B}{\Delta t}.$$

Seega

$$\Delta\omega = \frac{Q}{m} \Delta B$$

ning võttes arvesse, et algne nurkkiirus ning lõpp-magnetväli on nullid, saame

$$\omega = \frac{Q}{m} B = \frac{2\pi R l \sigma}{\rho \pi R^2 l} B = \frac{2\sigma B}{\rho R}.$$

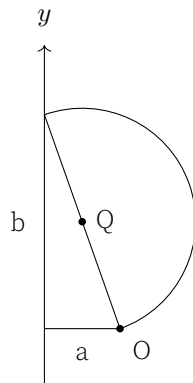
L286 Elektronid ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2017, G 10

Maksimaalse y -telje sihilise läbimõõdu leidmiseks vaatleme osakesi, mis liiguvad $x - y$ -tasandis. Sellisel juhul on elektroni trajektooriks ringjoon, sest magnetvälja poolt mõjuv jõud $F = evB$ on konstantse suurusega ja kiirusega kogu aeg risti. Raadiuse saame leida, pannes magnetvälja poolt mõjuva jõu võrduma kesktõmbejõuga:

$$\frac{mv^2}{R} = evB \quad \Rightarrow \quad R = \frac{mv}{Be}.$$

Kõik selles tasandis olevad elektronid liiguvad sama raadiusega ringjoonel ja eri nurkade all liikuva elektronide trajektoorid saab leida seda ringjoont lihtsalt pöörates ümber punkti O . Kõige kaugemale y -telje positiivses suunas jõuab elektron siis, kui ekraani tabades on ta algpunktist võimalikult kaugel ehk läbinud täpselt pool ringjoone kaart, vaata joonist:

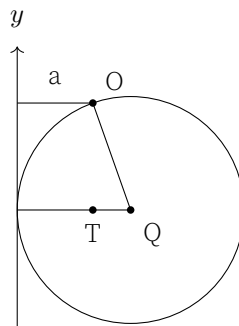


Kuna ekraan on kaugusel a elektronide allikast, siis Pythagorase teoreemi järgi saame laigu maksimaalseks y väärtuseks

$$b = \sqrt{4R^2 - a^2} = \sqrt{4\left(\frac{mv}{Be}\right)^2 - a^2}.$$

Siit näeme, et väiksemale R -ile vastab väiksem läbimõõt ja maksimaalne y -telje sihiline läbimõõt on tõesti siis, kui osake liigub $x - y$ -tasandis, nagu ka alguses väitsime.

Ringjoone kaart ümber punkti O pöörates näeme, et minimaalne y -suunalise väärtuse korral on ringjoon ekraanile puutujaks, vaata joonist:



Kuna lõigu QT pikkus on $R - a$, siis lõigu OQ y -suunalise komponendi saab leida Pythagorase teoreemi abil

$$y_{\min} = -\sqrt{R^2 - (R - a)^2} = -\sqrt{2aR - a^2} = -\sqrt{\frac{2amv}{Be} - a^2}.$$

Seega laigu y -suunaline läbimõõt on

$$L = \sqrt{\frac{2amv}{Be} - a^2} + \sqrt{4\left(\frac{mv}{Be}\right)^2 - a^2}.$$

Selle laigu peal on heledus kõige suurem maksimaalse y väärtuse korral, sest see vastab elektroni y -telje sihilise kõrvalekalde Δ_y ekstreemumile. Kui tähistame elektroni stardinurga α abil, siis

$$\frac{d\Delta_y}{d\alpha} = 0,$$

st väikeses stardinurga vahemikus $\Delta\alpha$ saavad kõik elektronid peaaegu täpselt samasse sihtpunkti.

Leiame z -telje sihilise läbimõõdu tasandis $y = 0$. Kõige kaugemale z -teljel jõuavad need on osakesed, mille heeliksikujuline trajektoor puudutab tasandit $x = -a$ ("üaltpaates" $x - y$ -tasandile puudutab ringjoonekujuline trajektoor raadiusega $r = \frac{a}{2}$ joont $x = -a$) ja mis stardivad $y - z$ -tasandis, st algiirusega, mille x -projektsioon $v_x = 0$. Edasi leiame

$$\frac{a}{2} = \frac{mv_y}{Be} \Rightarrow v_y = \frac{aBe}{2m} \Rightarrow v_z = \sqrt{v^2 - \left(\frac{aBe}{2m}\right)^2}.$$

Sellise algiirusega elektronide teekond kestab pool tsüklotronperioodist. Perioodi saab leida seosest

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{Be}.$$

Pool perioodi on seega

$$t = \frac{T}{2} = \frac{\pi m}{Be}$$

ning laigu z -telje sihiliseks mõõtmeks saame

$$2 \cdot tv_z = \pi \sqrt{\left(\frac{2mv}{Be}\right)^2 - a^2}.$$

L287 Pendel ★

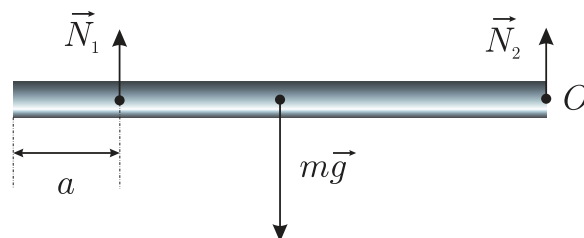
Autor: Mihkel Heidelberg, piirkonnavor, 2008, G 1

Koormisele mõjub raskusjõu moment $mgl \sin \alpha$. Kang püsib paigal, kui see on väiksem hõõrdejõu momendist M , seega $mgl \sin \alpha < M$, millest $\sin \alpha < \frac{M}{mgl}$.

L288 Toru ★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2007, G 2

Newtoni kolmanda seaduse kohaselt on toru toereaktsioonid N_1 ja N_2 suuruse poolest võrdsed otsitavate rõhumisjõududega (vt joonist).



Kuna jõudude summa peab tasakaalu asendis olema võrdne nulliga, siis

$$N_1 + N_2 - mg = 0.$$

Jõumomentide võrrand punkti O suhtes (võib valida suvalist punkti) on

$$N_1(l - a) = \frac{mgl}{2},$$

kust saame

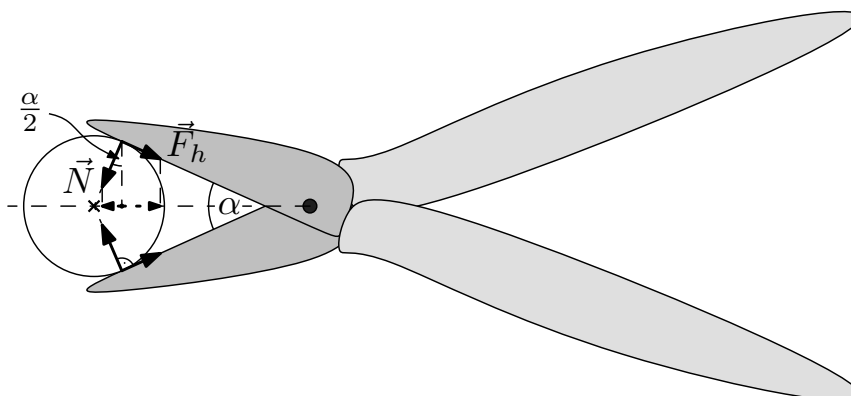
$$N_1 = \frac{mgl}{2(l - a)} = \frac{80 \cdot 9,8 \cdot 5}{2 \cdot (5 - 1)} = 490 \text{ N}.$$

Asendades N_1 esimesse võrrandisse, saame avaldise N_2 jaoks:

$$N_2 = \frac{mg(l - 2a)}{2(l - a)} = \frac{80 \cdot 9,8 \cdot (5 - 2 \cdot 1)}{2 \cdot (5 - 1)} = 294 \text{ N}.$$

L289 Nürinenud käärid ★

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2009, G 1



Hõõrdejõud peab tasakaalustama toereaktsiooni käärde telje sihilise komponendi (joonis). Lihtsast geomeetriast saame, et $\mu = \tan \frac{\alpha}{2}$.

L290 Kuul ★★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2005, G 3

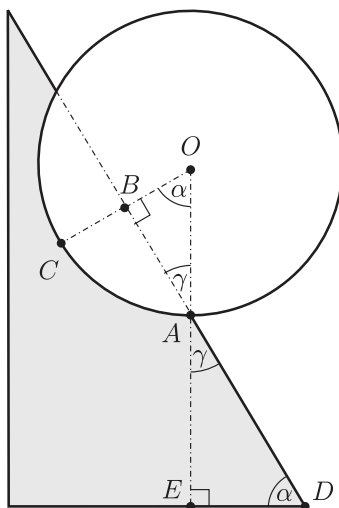
Kuuli hoiab augus või “lökkab” august välja üks ja sama jõud – kuulile mõjuv raskusjõud, mis on suunatud vertikaalselt alla. Kuul on augus, kui raskusjõu vektor läbib augu põhja ja kukub, kui see väljub sellest. Esimesel juhul on raskusjõu moment suunatud augu poole, teisel juhul – august välja. Piirjuhul on kuul tasakalus, toetudes vaid punktile A (vt joonist). Sellel juhul on kuulile mõjuv raskusjõud suunatud otse punkti A poole, jõu õlg ning, järelkult ka jõumoment on võrdne nulliga. Vaatleme piirjuhtu (vt joonist). Kuna lauaaugu sugavus $|BC|$ on 2 korda väiksem, kui kuuli raadius r , saame kolmnurga AOB kohta kirjutada järgneva tingimuse:

$$\sin \gamma = \frac{r/2}{r} = \frac{1}{2} \Rightarrow \gamma = \arcsin \frac{1}{2} = 30^\circ.$$

Kuna punkti A tipunurgad on võrdsed, siis ka täisnurkse kolmnurga ADE üsnurkadest on 30° . Järelikult

$$\alpha = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ.$$

Kui laua kaldenurk ületab 60° , kukub kuul lauaaugust välja.



L291 Katus ★★

Autor: Ott Krikmann, piirkonnavor, 2005, G 2

Vaatleme lund katusel kui kahte vastasmõjus olevat keha: üheks kehaks on lumi, mille all on vesi ning millele hõrdejõud ei mõju ja teiseks kehaks kuival katusel olev lumi. Nende kahe osa vahel mõjuva jõu F võime lugeda katuse sihiliseks (selle sihi valime x -teljeks, y -telg on katuse sihiga risti). Arvestame, et lumi on ühtlase paksusega ja seega osade massid on võrdselised nende pikkustega:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{l}{L-l}.$$

y -telje sihiline tasakaaluvõrrand kuiva osa jaoks:

$$N_2 = m_2 g \cos \alpha,$$

kus N_2 on kuivale osale mõjuva katuse rõhumisjõud. x -telje sihiline tasakaaluvõrrand vesise ja kuiva osa jaoks:

$$F = m_1 g \sin \alpha,$$

$$\mu N_2 = F + m_2 g \sin \alpha.$$

Elimineerides kahest viimasest võrrandist F -i leiame

$$\mu N_2 = (m_1 + m_2) g \sin \alpha.$$

Asendades siia N_2 leiame

$$m_2 \mu g \cos \alpha = (m_1 + m_2) g \sin \alpha.$$

Jagades läbi $m_2 g$ -ga ja asendades esimesest võrrandist suhte m_1/m_2 , saame

$$\frac{L}{L-l} = \mu \cot \alpha,$$

millest

$$\frac{l}{L} = 1 - \mu^{-1} \tan \alpha \approx 0,16.$$

Alternatiivne lahendus

Vaatleme lund katusel tervikliku süsteemina. Valime x -teljeks katuse sihi, y -telg olgu katuse sihiga risti. Lumekihile mõjuvad järgnevad jõud: raskusjõud mg , katusepinna toereaktsioonijõud N ning hõõrdejõud

$$F_h = \frac{L-l}{L} \mu N.$$

Kordaja $(L-l)/L$ tuleb sellest, et hõõrdejõud mõjub vaid $(L-l)$ -pikkusel katuseosal. Tasakaaluvõrrand y -telje jaoks on

$$N = mg \cos \alpha,$$

x -telje jaoks aga

$$mg \sin \alpha = F_h = \frac{L-l}{L} \mu N.$$

Elimineerides kahest viimasest võrrandist N -i leiame

$$mg \sin \alpha = \mu mg \cos \alpha \frac{L-l}{L}.$$

Saame, et

$$\frac{L-l}{L} = \frac{\tan \alpha}{\mu}.$$

Seega

$$\frac{l}{L} = 1 - \frac{\tan \alpha}{\mu} \approx 0,16.$$

L292 Kast kaubikus ★★

Autor: Oleg Košik, lõppvoor, 2009, G 2

Kaubiku kiirendus on $a = v_0/t = 2,5 \text{ m/s}^2$. Newtoni II seaduse põhjal

$$\vec{N} + \vec{T} + \vec{F}_h + m\vec{g} = m\vec{a}.$$

Nööri pinge on minimaalne, kui hõõrdejõud F_h saavutab maksimaalse väärtuse μN . Projektsioon x -teljele:

$$T \sin \alpha + \mu N = ma;$$

 y -teljele:

$$N + T \cos \alpha - mg = 0.$$

Lahendades süsteemi leiame, et

$$T = m \frac{a - \mu g}{\sin \alpha - \mu \cos \alpha} \approx 14 \text{ N}.$$

L293 Liivahunnik ★★

Autor: Roland Matt, piirkonnavor, 2011, G 5

Liivahunniku maksimaalse kõrguse saavutamiseks peavad pindmised liivakihid olema libisemise äärel, ehk kehtib $\tan(\alpha) = \frac{h}{R} = \mu$, kus α on nurk maa ja koonuse moodustaja vahel, R hunniku aluse raadius ja h hunniku kõrgus. Liiva ruumala on

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \pi R^3 \mu,$$

millest

$$R = \sqrt[3]{\frac{3V}{\pi\mu}}$$

ning seega hunniku aluse pindala on

$$S = \pi R^2 = \sqrt[3]{9\pi \left(\frac{V}{\mu}\right)^2} \approx 76,2 \text{ m}^2.$$

L294 Tormituul ★★

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2011, G 3

Tuule poolt avaldatav horistonaalsuunaline jõud F peab olema niisugune, et selle poolt tekitatud jõumoment $Fb/2$ ületab raskusjõu poolt tekitatud jõumomendi $Mga/2$. Jõumomentide võrdsuse korral $F = Mga/b$. Et niisugune jõud autot libisema ei paneks, peab hõõrdejõud $F_h = \mu Mg$ selle tasakaalustama, millest saame nõutud tingimuseks: $\mu > a/b = 2/3$.

L295 Rõngas ★★

Autor: Taavi Pungas, piirkonnavor, 2014, G 6

Et süsteem oleks tasakaalus, peab mutter asuma täpselt nööri kinnituspunkti all. Teiseks: maksimaalse mutri kõrguse korral on rõnga kaldenurk mutri asukohas α , kus $\tan \alpha = \mu$ - siis on mutter täpselt libisemise piiril. Sel juhul on ka mutrini tõmmatud raadiuse ja vertikaali vahel nurk α . Tekkinud kolmnurgast näeme, et

$$h = L + 2R \cos \alpha = L + \frac{2R}{\sqrt{1 + \mu^2}}.$$

L296 Hammasrattad ★★★

Autor: Siim Ainsaar, lõppvoor, 2010, G 4

Kasutame virtuaalse nihke meetodit: oletame, et nöör pole siiski päris venimatu ning saame esimest ratast pöörata väikese nurga α võrra. Hõõre puudub, mistõttu salvestub kogu välise jõumomendi töö nööri elastsusjõu potentsiaalseks energiaks. Välisjõumomendi töö on $M\alpha$ (kui jõumomenti avaldab üks jõud õlaga δ ja suurusga M/δ , siis nihkub ta rakenduspunkt $\alpha\delta$ võrra ja töö on $\alpha\delta M/\delta = M\alpha$). Väikesel nihkel ei jõua T oluliselt muutuda, seega peab nööri venitamise töö olema Ts , kus s on nööri pikenemine. Hambumusse jäävate hammasrattaste pinnapunktide läbitavad teepikkused on võrdsed – mõlemal αr_1 , järelikult $s = 2\alpha r_1$ ja $M\alpha = 2\alpha r_1 T$, kust $T = \frac{M}{2r_1}$.

Alternatiivne lahendus

Ratastele mõjuvad jõud ja jõumomendid on tasakaalus. Lihtsaim on kirjutada jõumomentide tasakaalud rataste tsentrite suhtes, kuna siis on võllide poolt avaldatava tundmatute jõudude õlad nullid. (Muidu saame lahenduse, kui avaldame need jõud jõudude tasakaaluvõrranditest.) Rattad mõjutavad teineteist puutujasihilise jõuga; kui teine ratas avaldab esimesele jõudu \vec{F} , siis avaldab Newtoni III seaduse järgi esimene teisele $-\vec{F}$. Jõumomentide tasakaal esimesele rattale on nii $M = (F + T)r_1$ ning teisele $T = F$, sestap $T = \frac{M}{2r_1}$.

L297 Poldilõikur ★★★

Autor: Mihkel Rähn, piirkonnavor, 2015, G 7

Jõu ülekandmine toimub kangil põhiolemel, kus jõumoment pöördtelje suhtes summaarselt on võrdne nulliga. Käepideme korral

$$600 \text{ mm} \cdot 90 \text{ N} - 100 \text{ mm} \cdot F_k = 0 \quad \Rightarrow \quad F_k = 540 \text{ N},$$

kus F_k on käepidemelt löiketeradele mõjuv jõud. Analoogselt löiketerade korral

$$160 \text{ mm} \cdot F_k - 80 \text{ mm} \cdot F_l = 0 \quad \Rightarrow \quad F_l = 2F_k,$$

kus F_l on lõikuri poolt poldile avaldatud jõud.

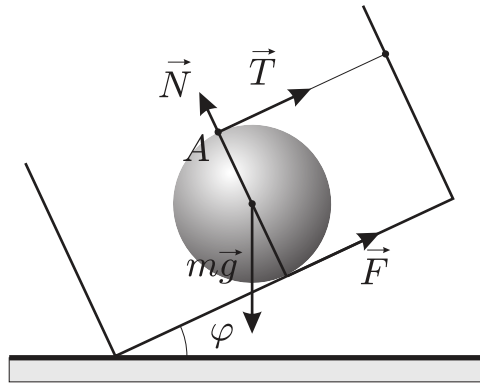
Nendest võrranditest saame leida löiketeradele mõjuva jõu F_l

$$F_l = 1080 \text{ N}.$$

L298 Kuul ★★★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2006, G 7

Kõigepealt uurime kuulile mõjuvate jõudude projektsioone kasti põhjaga risti olevale teljele (vt joonist).



Nende projektsioonide summa peab olema võrdne nulliga. Projektsioone sellele teljele omavad vaid raskusjõud $m\vec{g}$ ja kasti põhja toereaktsioon \vec{N} . Järelikult $N = mg \cos \varphi$ ja hõõrdejõud

$$F \leq \mu mg \cos \varphi. \quad (1)$$

Kuuli tasakaal sõltub selle võrratuse täitumisest.

Nüüd tuleb valida punkt, mille suhtes me hakkame määrama jõumomente. Valime punkti nii, et hõõrdejõu moment selle suhtes oleks nullist erinev, aga niidi tõmbepinge T moment oleks võrdne nulliga (niidi pinge arvutamise vältimiseks). Sellele tingimusele vastab punkt A , milles niit kinnitub kuuli külge. Selle punkti suhtes on hõõrdejõu õlg $2r$ (kus r on kuuli raadius), raskusjõu õlg $l = r \sin \varphi$, ning jõudude N ja T õlad võrdsed nulliga. Jõumomentide summa on tasakaalu puhul võrdne nulliga, järelikult

$$2rF - mgr \sin \varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad F = \frac{mg \sin \varphi}{2}.$$

Arvestades võrratust (1) leiame, et tasakaalu puhul

$$\mu mg \cos \varphi \geq \frac{mg \sin \varphi}{2} \Rightarrow \tan \varphi = 2\mu,$$

ehk

$$\varphi = \arctan(2\mu).$$

L299 Toru ★★★

Autor: Aigar Vaigu, lõppvoor, 2010, G 5

Prussi võnkumine torul on stabiilne, kui prussi kõrvalekallutamisel väikese nurga α võrra prussi massikeske tõuseb kõrgemale, kui alguses. Esialgne prussi massikeskme kõrgus on $R + L/2$. Masskeskme kõrgus kõrvalekallutamisel on

$$\left(R + \frac{L}{2}\right) \cos \alpha + R\alpha \sin \alpha,$$

ning peab kehtima

$$\left(R + \frac{L}{2}\right) \cos \alpha + R\alpha \sin \alpha > R + \frac{L}{2}.$$

Kuna kõrvalekalde nurk on väike, siis võime arvestada, et $\sin \alpha \approx \alpha$ ja $\cos \alpha \approx 1 - \alpha^2/2$. Lihtsustades ning avaldades L -i, saame, et võnkumised on väikeste kõrvalekallete korral stabiilsed, kui

$$L < 2R.$$

L300 Klotsid ★★★

Autor: Mihkel Rähn, piirkonnavor, 2014, G 7

Ülemine klots ei libise, kui kiirendusest põhjustatud jõud ei ületa seisuhõrdejõudu. Ülemise klotsi jaoks saab avaldada maksimaalse kiirenduse, mille korral klots veel ei libise, Newtoni teisest võrrandist $a_2 = \mu_2 g$. Kui ülemine klots ei libise, siis võib kahte klotsi käsitleda ühe kehana. Newtoni teine võrrand klotsisüsteemi kohta on

$$(m_1 + m_2)a_{12} = -\mu_1(m_1 + m_2)g + F.$$

Piirjuhul on kiirendused a_{12} ja a_2 võrdsed. Asendades eelnevalt leitud kiirenduse a_2 võrrandisse liikmena a_{12} , saame

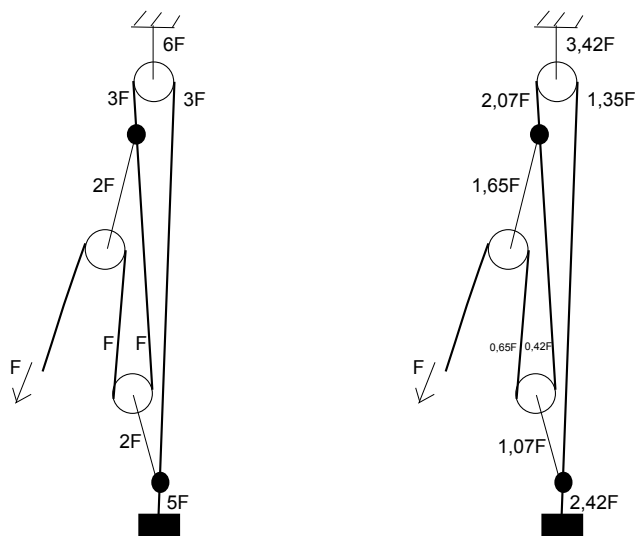
$$F = (m_1 + m_2)(\mu_1 + \mu_2)g.$$

Ülesannet võib lahendada ka koostades Newtoni teise võrrandi alumise klotsi kohta, võttes arvesse mõlemad hõrdejõud.

L301 Polüspast ★★★

Autor: Mihkel Rähn, lõppvoor, 2014, G 6

Hõrdevaba ploki korral on pinge põhikõies jääv, muutub vaid selle suund. Hõrdeva ploki korral osa põhikõie pingest kandub plokile, kusjuures esimeses lähenduses alla ja ülesse suunatud hõrdejõud kompenseerivad üksteist. Tasakaalutimise rahuldamiseks peab ploki kinnituse pinge olema võrdne plokki läbiva põhikõie pingete summaga. Mittelibisevate sõlmede korral peab alla ja üles suunatud pingete vahel valitsema tasakaal. Lahendamist on mugav alustada, kui määrata päästjapoolseks tõmbejõuks F ning alustada sellest otsast polüspasti läbimist. Hõrdevabal juhul on jõuülekanne $\frac{5}{1}$, hõrde korral $\frac{2,4}{1}$.



L302 Kelk ★★★

Autor: Andreas Valdmann, piirkonnavor, 2018, G 9

Esiteks näeme, et kui Juku tõmbaks kelgunööri horisontaalselt, siis ei hakkaks kelk liikuma ükskõik kui suure tõmbejõu korral, sest Jukule mõjuv hõõrdejõud on väiksem kui kelgu liikumapanemiseks vajalik jõud:

$$\mu_1 m_1 g < \mu_2 m_2 g.$$

Esimesena hakkavad libisema hoopis Juku tallad.

Kui Juku tõmbab nööri teatud nurga all ülespoole, siis tekib nööris vertikaalne jõu komponent F_v , mis tõstab kelku ülespoole ja surub Jukut allapoole. Seega mõjub Jukule tema libisemise piiril hõõrdejõud $F_{h1} = \mu_1 (m_1 g + F_v)$ ja kelgule tema libisemise piiril hõõrdejõud $F_{h2} = \mu_2 (m_2 g - F_v)$. Kuna küsiti minimaalset nurka, siis peab kelk olema libisemise piiri napilt ületanud ja Juku sellele napilt alla jääma ehk piirjuhul $F_{h1} = F_{h2} = F_h$, kus F_h tähistab nööris tekkiva jõu horisontaalset komponenti. Jõudude tasakaalu võrrandist

$$\mu_1 (m_1 g + F_v) = \mu_2 (m_2 g - F_v)$$

saame avaldada nööris tekkiva jõu vertikaalse komponendi:

$$\mu_1 m_1 g + \mu_1 F_v = \mu_2 m_2 g - \mu_2 F_v,$$

$$F_v (\mu_1 + \mu_2) = g (\mu_2 m_2 - \mu_1 m_1),$$

$$F_v = g \frac{\mu_2 m_2 - \mu_1 m_1}{\mu_1 + \mu_2}.$$

Jõu horisontaalkomponendi leidmiseks asendame saadud tulemuse näiteks Jukule mõjuva hõõrdejõu võrrandisse

$$F_h = \mu_1 \left(m_1 g + g \frac{\mu_2 m_2 - \mu_1 m_1}{\mu_1 + \mu_2} \right)$$

ja avaldame:

$$\begin{aligned} F_h &= g\mu_1 \frac{m_1(\mu_1 + \mu_2) + \mu_2 m_2 - \mu_1 m_1}{\mu_1 + \mu_2} = \\ &= g\mu_1 \frac{\mu_2 m_1 + \mu_2 m_2}{\mu_1 + \mu_2} = g\mu_1 \mu_2 \frac{m_1 + m_2}{\mu_1 + \mu_2}. \end{aligned}$$

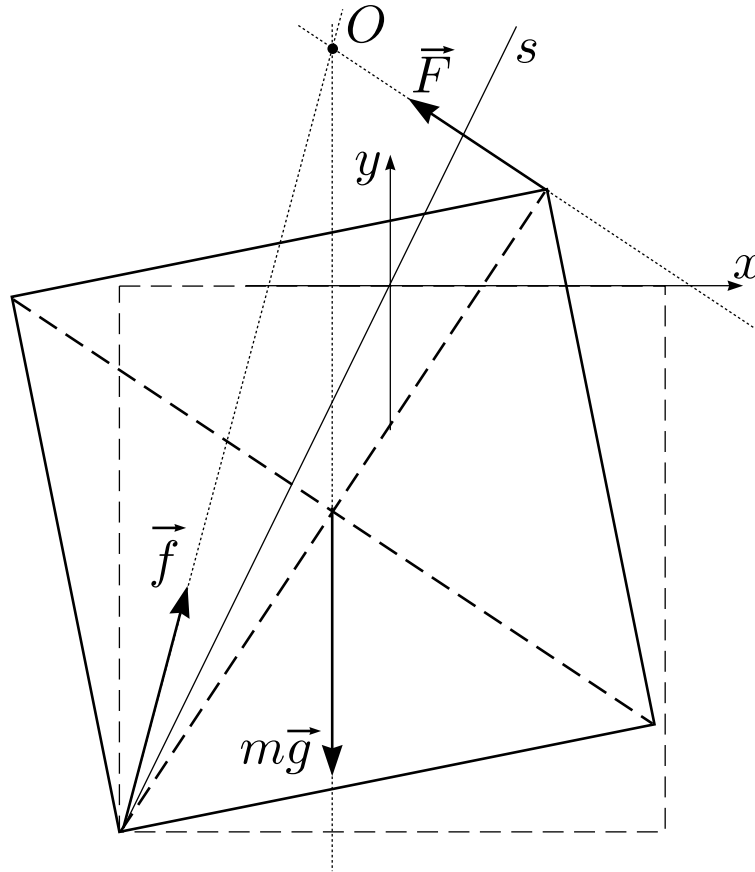
Nurk kelgunööri ja maapinna vahel on

$$\alpha = \arctan \left(\frac{F_v}{F_h} \right) = \arctan \left(\frac{\mu_2 m_2 - \mu_1 m_1}{\mu_1 \mu_2 (m_1 + m_2)} \right) = 21^\circ.$$

L303 Kuubik ★★★★★

Autor: Riho Taba, piirkonnavoore, 2007, G 9

Ülesande lahendamine jaguneb kaheks osaks: (a) kas antud jõust piisab üle serva kantamiseks; (b) ega klots seejuures libisema ei hakka. Analüüsisides oletame, et klots on juba kallutatud teatud nurga φ ($0 \leq \varphi \leq 45^\circ$) võrra; seejuures selgub, et $\varphi = 0$ on kõige ohtlikum olukord. Alternatiiv oleks väita intuiitiivselt, et ohtlikum on olukord $\varphi = 0$ ning uurida ainult seda juhtumit;



(a) Vaatleme jõumomentide tasakaalu toetava nurga suhtes. Kompenseerimist vajab raskusjõu moment $M_{1\max} = Fa \cos(45^\circ) \cos(\varphi + 45^\circ)$, mille maksimaalväärtus on

$$M_{1\max} = \frac{mga}{2}, \quad M_{1\max} = \frac{10 \cdot 9,8 \cdot 0,1}{2} = 4,9 \text{ N m.}$$

Rakendatav jõud annab seda suurema momendi, mida suurem on õlg; õla maksimaalne pikkus ei sõltu nurgast φ ning on alati $l = a\sqrt{2}$. See väärtus saavutatakse siis, kui jõud on rakendatud maha toetava serva suhtes vastasserva külge ning on

risti ruudu diagonaaliga. Seega on antud jõu abil alati võimalik tekitada raskusjõudu kompenseeriv moment väärtusega kuni

$$M_2 = Fl = Fa\sqrt{2} = 5,6 \text{ N m.}$$

Näeme, et $M_{1\max} < M_2$, st antud jõud on piisav kuubi keeramiseks.

(b) Vaatleme jõudude tasakaalu raskusjõu $m\vec{g}$ ja rakendatud jõu \vec{F} pikenduste lõikepunkti O suhtes, vt joonist. Aeglasel pööramisel on jõud tasakaalus, st hõõrdejõu ja toereaktsiooni resultantjõud \vec{f} peab minema samuti läbi selle punkti. Et hõõrdeegur $\mu = 0,5$, siis nurk toetuspinna normaali (st vertikaalsihi) ja jõu \vec{f} vahel ei tohi olla suurem, kui $\arctan \mu$, st jõud \vec{f} ei tohi olla vähem püstine, kui sirges. Nii see ka tõepoolest on, sest punkt O jääb alati piirkonda $x \leq 0$ ja $y > 0$.

Alternatiivne lahendus osa (b) jaoks

Meil on vaja tõestada, et aeglasel pööramisel kehtib kogu aeg võrratus

$$|F_x| = F \cos(45^\circ - \varphi) \leq N\mu,$$

kus N on laua toereaktsioon. Paneme tähele, et vertikaalsest tasakaalutingimusest

$$N = mg - |F_y| = mg - F \sin(45^\circ - \varphi).$$

Me kasutame osast (a) teada olevat asjaolu, et kui hõõrdumist ei oleks, siis tasakaalu tagava jõu jaoks kehtib võrratus $F < F_{\max}$, seda asjaolu kasutame alljärgnevalt võrratuste ümber kirjutamisel.

Meile piisaks, kui suudaksime tõestada, et

$$\mu[mg - F_{\max} \sin(45^\circ - \varphi)] \geq F_{\max} \cos(45^\circ - \varphi), \quad (1)$$

sest sellisel juhul

$$\begin{aligned} N\mu &= \mu[mg - F \sin(45^\circ - \varphi)] \geq \mu[mg - F_{\max} \sin(45^\circ - \varphi)] \geq \\ &\geq F_{\max} \cos(45^\circ - \varphi) \geq F \cos(45^\circ - \varphi) = |F_x|. \end{aligned}$$

Tõepoolest, $N\mu \geq |F_x|$. Võrratuse (1) tõestamiseks kirjutame selle ümber ekvivalentsel kujul

$$1 \geq \frac{F_{\max}}{\mu mg} [\mu \sin(45^\circ - \varphi) + \cos(45^\circ - \varphi)],$$

mis tõepoolest kehtib, sest

$$\begin{aligned} &\frac{F_{\max}}{\mu mg} [\mu \sin(45^\circ - \varphi) + \cos(45^\circ - \varphi)] = \\ &= \frac{F_{\max} \sqrt{\mu^2 + 1}}{\mu mg} \sin\left(45^\circ - \varphi + \arcsin\left[(\mu^2 + 1)^{-1}\right]\right) \leq \\ &\leq \frac{F_{\max} \sqrt{\mu^2 + 1}}{\mu mg} = \frac{40 \text{ N} \cdot \sqrt{5/4}}{49 \text{ N}} \approx 0,91 < 1. \end{aligned}$$

L304 Kuulid ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2009, G 9

Et kuuli C kiirusvektor on risti sirgega AC , siis hetkeline pöörlemiskese O asub sellel sirgel. Seega, kui kuul A hakkab libisema, siis on selle kiirusvektor samuti (ning järelkult ka hõõrdejõu vektor) risti sirgega AC . Piirjuhtumil, kui kuulide masside suhe on selline, et kuul A hakkab vaevu liikuma, on punkt O väga lähedal punktile A ning seega on punkti B kiirusvektor (ja hõõrdejõu suund) risti sirgega AB . Hõõrdejõudude jõumomentide summa punkti C suhtes peab olema null; et punkti A rakendatud hõõrdejõu õlg on $|AC|$ ning punkti B puhul on õlg $|AC|/2$, saame kriitiliseks masside suhteks $1/2$, st kuul A jääb paigale, kui $M_A/M_B > 1/2$. Märkus. Uurides olukorda edasi ja vaadeldes üha vähenevaid M_A väärtusi (alustades $M_B/2$ -st ja lõpetades tühiselt väikeste massidega) paneme tähele, et punkt O nihkub piki sirget AC , alustades punkti A juurest, üha kaugemale punktidest A ja C ning läheneb piiril $M_A \rightarrow 0$ punktile D , mis asub punktist A kaugusel $|AC|$ – nõnda, et kolmnurk BCD on täisnurkne ning seetõttu punkti B rakendatud hõõrdejõu õlg läheneb nullile.

L305 Rõngas ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2011, G 7

Olgu rõnga keskpunkt O ja massikese M ning võlli ja rõnga puutepunkt P . Vaadeldes jõumomentide tasakaalu punkti P suhtes näeme, et raskusjõud peab andma sarnaselt kõigi teiste jõududega null-momendi, st lõik PM peab olema vertikaalne. Toereaktsiooni \vec{N} ja hõõrdejõu \vec{F}_h resultant peab kompenseerima raskusjõu ja olema samuti vertikaalne. Pinnanormaali ja nimetatud resultantjõu vaheline nurk ei saa olla suurem kui $\arctan \mu$, vastasel korral algaks libisemine. Et pinnanormaaliks on sirge OP , siis

$$\angle OPM \leq \arctan \mu.$$

Rõnga pöörlemise käigus $|OP| = R$ ja $|OM| = R/2$; seega moodustub kolmnurk OPM lõikudest pikkusega R ja $R/2$ ning järelkult on tipu P juures olev nurk maksimaalne, kui tipu M juures on täisnurk. Sel juhul

$$\mu = \tan \angle OPM = |MO|/|MP| = \frac{R}{2} / \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}R^2} = 1/\sqrt{3} \approx 0,58.$$

L306 Niidirull ★★★★★

Autor: Mihkel Kree, lahtine, 2013, G 8

Vaatleme silindrile mõjuvate jõumomentide tasakaalu telje suhtes, mis läbib toetuspunkti. Pinna toereaktsiooni ja hõõrdejõu vektorid läbivad toetuspunkti, mistõttu need jõumomendi ei tekita. Jõumomendi tekitavad kaks jõudu: silindri keskele rakendatud raskusjõud mg ja nõõri tõmbejõud F . Arvutades lihtsast kolm-nurgast raskusjõu õla, saame jõumomendiks $\tau = mgr \sin \alpha$. Tasakaalu korral tekitab tõmbejõud F sama suure, kuid vastassuunalise jõumomendi $-\tau$. Minimaalsele jõule peab vastama maksimaalne jõuõlg. Veendume, et kui jõud F rakendada

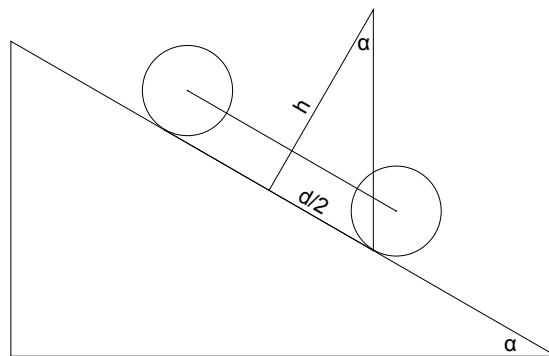
toetuspunktist diametraalselt vastas olevasse punkti, saame maksimaalse õla $2r$, millele vastab minimaalne tõmbejõud

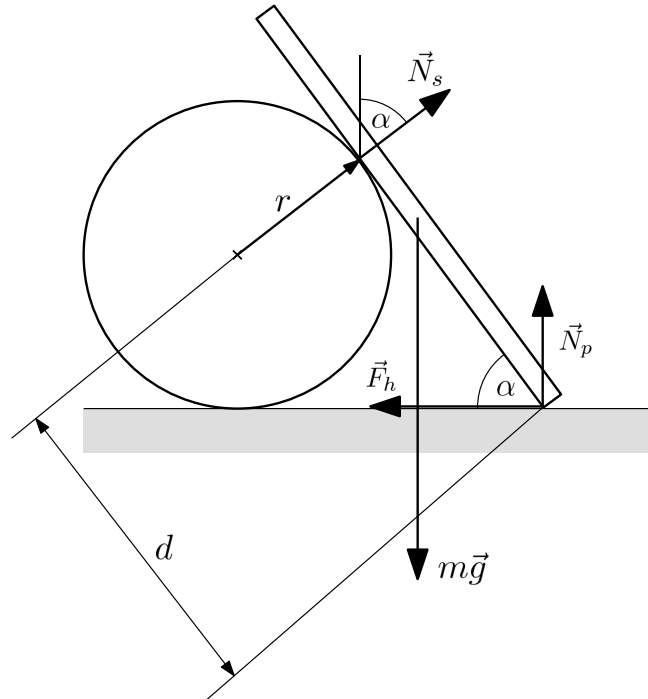
$$F_{\min} = \frac{\tau}{2r} = \frac{mg \sin \alpha}{2}.$$

L307 Jalgrattur ★★★★★

Autor: Andres Põldaru, lahtine, 2014, G 8

Kuna tagumine ratas on õhku tõusmas, siis sellele jõude ei rakendu. Ainsad jalgrattale mõjuvad jõud on raskusjõud ning jõud esiratta ja maapinna kontaktpunktis. Kuna jalgratas liigub ühtlase kiirusega ning ei hakka pöörlema ega ümber kukkuma, peab jalgrattast ja ratturist koosnevale süsteemile mõjuvate jõudude summa ja ka jõumoment iga punkti suhtes olema null. Raskusjõu tugevus ja suund on teada. Teine jõud peab olema sama suur ja vastassuunaline, et raskusjõudu tasakaalustada. Lisaks peavad jõud paiknema ühel sirgel, et jalgratas koos ratturiga ei hakkaks pöörlema. Järelikult peab massikeske olema esiratta ja maapinna kontaktpunkti kohal ning hõõrdejõu ja toereaktsiooni summa on vertikaalne. Lihtsast geometriast saame $\alpha = \arctan\left(\frac{d}{2h}\right)$ ja $\mu \geq \frac{d}{2h}$.





Vardale mõjuvad põranda ja silindri toereaktsioonid (vastavalt \vec{N}_p ja \vec{N}_s), hõõrdejõud \vec{F}_h ja raskusjõud $m\vec{g}$ (vt ülalist joonist). Asend on stabiilne, kui jõudude ja jõumomentide tasakaalu tingimustest avaldatav hõõrdejõud ei ületa maksimaalset seisuhõõrdejõudu:

$$F_h \leq \mu N_p \quad (1)$$

ja varda alaots ei tõuse õhku:

$$N_p \geq 0. \quad (2)$$

Siin ja edaspidi võiksime sama hästi rangeid võrratusi kasutada, täpne libisemise piir on reaalselt saavutamatu.

Jõudude tasakaal horisontaalsihis:

$$F_h = N_s \sin \alpha \quad (3)$$

ja varda sihis (võinuksime soovi korral valida ka muu sihi):

$$N_p \sin \alpha + F_h \cos \alpha = mg \sin \alpha. \quad (4)$$

Olgu d kaugus varda alaotsast toetuspunktini. Jõumomentide tasakaal varda alumise otsa suhtes annab (jällegi oleksid muud punktid võrdväärselt kasutatavad):

$$mg \frac{\ell}{2} \cos \alpha = N_s d. \quad (5)$$

Avaldame jõud ja asendame võrratustesse:

$$(5), (3) \implies F_h = \frac{mg\ell}{2d} \sin \alpha \cos \alpha, \quad (6)$$

$$(6) \rightarrow (4) \implies N_p = mg \left(1 - \frac{\ell}{2d} \cos^2 \alpha \right), \quad (7)$$

$$(6), (7) \rightarrow (1) \implies \frac{\ell}{2\mu d} \sin \alpha \cos \alpha \leq 1 - \frac{\ell}{2d} \cos^2 \alpha \implies \\ \implies \ell \leq \frac{2\mu d}{\cos \alpha (\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}, \quad (8)$$

$$(7) \rightarrow (2) \implies 1 - \frac{\ell}{2d} \cos^2 \alpha \geq 0 \implies \\ \implies \ell \leq \frac{2d}{\cos^2 \alpha} = \frac{2\mu d}{\mu \cos^2 \alpha}. \quad (9)$$

(9) on leebem võrratus kui (8), mis on niisiis ℓ ülempiiriks (paremal nimetajas on selleks positiivne liige, $\sin \alpha$, juures). Kuna rangemat alampiiri ei ole, jääb selleks d .

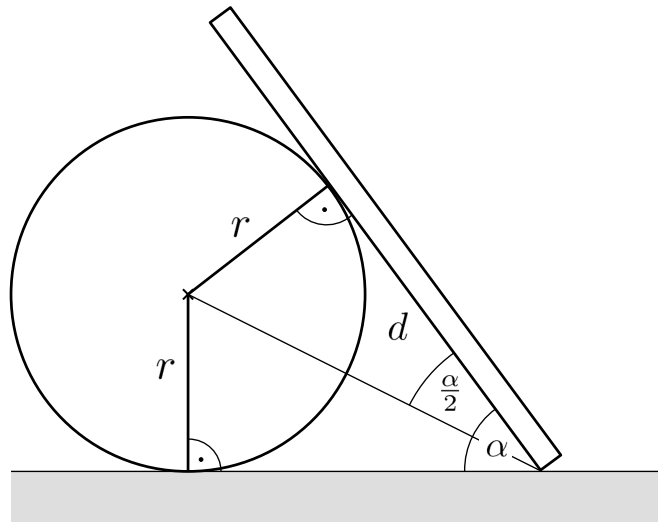
d leidmiseks ühendame varda alaotsa silindri teljega (joonis 2). Tekib kaks võrdset kolmnurka, millest:

$$d = \frac{r}{\tan \frac{\alpha}{2}} = \frac{r \sin \alpha}{1 - \cos \alpha}, \quad (10)$$

$$(10) \rightarrow (8) \implies \ell \leq \frac{2\mu r}{(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) \cos \alpha \tan \frac{\alpha}{2}} = \\ = \frac{2\mu r}{(1 + \mu \cot \alpha)(1 - \cos \alpha) \cos \alpha}.$$

Kokkuvõttes

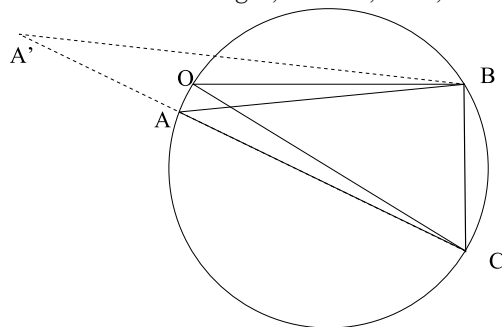
$$\frac{r \sin \alpha}{1 - \cos \alpha} \leq \ell \leq \frac{2\mu r}{(1 + \mu \cot \alpha)(1 - \cos \alpha) \cos \alpha}.$$



L309 Konn ★★★★★

Autor: Taavi Pungas, lahtine, 2010, G 9

Konnale mõjub kolm jõudu: raskusjõud $m\vec{g} = \vec{BC}$, mis on suunatud vertikaalselt alla, jõud $\vec{F} = \vec{CA'}$, mis on suunatud kaldpinna pinnanormaali sihis (pinna sisse) ning rõhumisjõu ja hõõrdejõu resultant $\vec{A'B}$, mille nurk pinnanormaliga $\alpha = \angle CA'B$ ei ületa väärtust $\arctan \mu$. Need kolm vektorit moodustavad tasakaalu korral joonisel toodud kolmnurga $A'BC$. Jooniselt on ilmne, et antud kaldenurga ($A'C$ sihi) puhul saab konn minimeerida vajalikku jõudu (st lõigu $A'C$ pikkust) suurendades nurga α maksimaalse võimaliku väärtuseni $\alpha = \arctan \mu$ (mil $A' = A$). Kui nüüd muuta pinna kaldenurka, siis joonistab punkt A ringjoone kaare (sest punktid B ja C on fikseeritud ning $\angle BAC$ on konstantne ($\arctan \mu$)). Vajalik jõud (lõik AC) on maksimaalne, kui lõik AC on ringi diameetriks OC , st pinnanormal moodustab horisondiga nurga $\arctan \mu$ (sest $\angle OBC = 90^\circ$). Seega, sein on vertikaali suhtes kaldus $\arctan \mu$ võrra, moodustades põrandaga teravnurga.



Alternatiivne lahendus

Olgu iminapa tekitatud tõmbejõud F , hõõrdejõud F_h ja normaaljõud N . Jõudude tasakaalu tingimusest saame $F_h = mg \sin \theta$ ja $F = N + mg \cos \theta$. Kui putukas rakendab minimaalset tarvilikku jõudu, siis

$$F_h = \mu N = mg \sin \theta,$$

ehk

$$N = \frac{mg \sin \theta}{\mu}.$$

Niisiis,

$$F = N + mg \cos \theta = \frac{mg \sin \theta}{\mu} + mg \cos \theta = mg \left(\frac{\sin \theta}{\mu} + \cos \theta \right).$$

Nüüd on vaja leida, millise θ korral on F maksimaalne. Selleks katsume siinuse ja koosinuse summa avaldada ühe siinusena.

Otsime A ja B nii, et kehtiks võrdus

$$A \sin(\theta + B) = \frac{\sin \theta}{\mu} + \cos \theta.$$

Kuna

$$A \sin(\theta + B) = A \sin \theta \cos B + A \sin B \cos \theta,$$

siis $A \sin B = 1$ ja $A \cos B = \frac{1}{\mu}$. Siit saame $\tan B = \mu$ ja

$$A = \sqrt{\frac{1}{\mu^2} + 1} = \frac{1}{\mu} \sqrt{1 + \mu^2}.$$

Seega

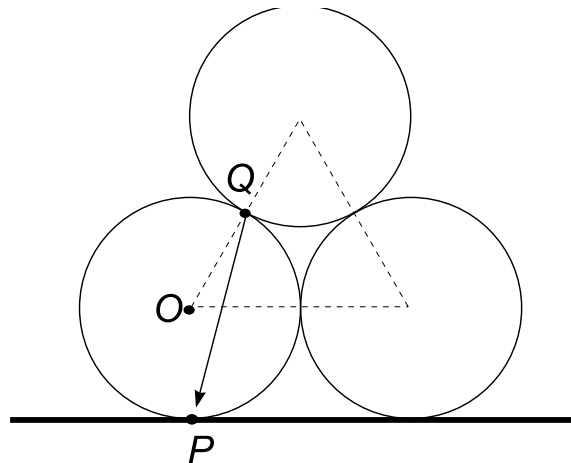
$$F = \frac{mg}{\mu} \sqrt{1 + \mu^2} \sin(\theta + \arctan \mu).$$

Siinuse suurim võimalik väärtus on $\sin(90^\circ) = 1$, ehk $\theta + \arctan \mu = 90^\circ$. Seega on otsitav nurk $\theta = 90^\circ - \arctan \mu$.

L310 Torud ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, piirkonnavor, 2010, G 10

Kõigepalt paneme tähele, et põhimõtteliselt võiks antud süsteemis toimida rõhujõud kahe alumise silindri vahel, kuid see kaob niipea, kui alumised silindrid natukenegi üksteisest eemalduvad; niisiis võime sellega mitte arvestada.



Esmalt oletame, et μ on piisavalt suur, nii et vastu pörandat toetuvad torud pigem veerevad kui libisevad (kui k pole piisavalt suur). Vaatleme vastu pörandat toetuvale torule mõjuvate jõumomentide tasakaalu tingimust toru ja pörandat kontakt-punkti P suhtes. Pörandat rõhumis- ja hõõrdeju õlg on null; ka raskusjõud mg õlg on null. Vaadeldavale torule mõjub veel vaid üksainus jõud – ülemise toru põhjustatud hõõrde- ja rõhumisjõu resultant, mis on rakendatud puutepunkti Q (vt joonist) ja kui tegemist on libisemise piirjuhuga (st veidigi väiksem hõõrdetegur k viiks libisemisele), siis moodustab see vektor pinnanormaliga nurga $\arctan k$ (sest antud vektor moodustub üksteisega risti olevate rõhumisjõu N ja hõõrdejõu F_h vektorite resultandina ning nurga tangens on $F_h/N = k$). Et ülejäänud jõudude moment oli null, siis peab ka selle jõu moment olema null, st jõu vektor peab olema suunatud punkti P . Et kolmnurk OQP on võrdhaarne (vt joonist), siis

$$k \geq \tan 15^\circ \approx 0,27.$$

Nüüd oletame, et $k \geq \tan 15^\circ$ ning vaatleme libisemise piirjuhtu punktis P . Selleks vaatleme jõumomentide tasakaalu punkti Q suhtes. Silindrile mõjuv raskusjõud mg ning punktis P toimiv rõhumisjõud $\frac{3}{2}mg$ (mis kompenseerib poolteise silindri raskusjõu) on rakendatud sirge OP sihis ning nende summaarne jõumoment $\frac{1}{4}mgR$ (kus R on silindri raadius) tasakaalustab hõõrdejõu momendi

$$\frac{3}{2}mg\mu(R + R \sin 60^\circ).$$

Siinjuures arvestasime, et punktis P toimiv hõõrdejõud on μ -kordne rõhumisjõud $\frac{3}{2}mg$ ning on horisontaalne ja omab seetõttu õlga $R + R \sin 60^\circ$. Seega,

$$\mu \geq \frac{1}{6(1 + \sin 60^\circ)} = \frac{1}{6\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \approx 0,09.$$

L311 Tungraud ★★★★★

Autor: Valter Kiisk, lõppvoor, 2011, G 10

a) Olgu a tungraua vertikaalne ja b horisontaalne diagonaal; Pythagorase teoreemi põhjal $a^2 + b^2 = \text{Const}$, millest diferentseerides saame

$$2a\Delta a + 2b\Delta b = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta a = \frac{-b\Delta b}{a} = -\cot \alpha \Delta b.$$

Siinjuures Δa ja Δb on tungraua kõrguse ja laiuse väikesed muutused. Vändaga ühe täispöörde tegemisel $\Delta b = -3 \text{ mm}$. Võrrutades tehtud töö $2\pi l F_k$ (kus l on vända pikkus) potentsiaalse energia muuduga $F\Delta a$, saame

$$F_k = \frac{F \cot \alpha \Delta b}{2\pi l} \approx 24 \text{ N}.$$

Alternatiivne lahendus

Kui vändale rakendatakse pöördemomenti M , siis keerates seda väikese nurga $\Delta\Phi$ võrra tehakse tööd $M\Delta\Phi$. Kuivõrd hõõrdumine puudub, siis see töö peab olema sama mis $F\Delta H$, kus ΔH on tungraua kõrguse muutus. Niisiis

$$M = F \frac{dH}{d\phi} = F \times \frac{dH}{d\alpha} \times \frac{d\alpha}{dL} \times \frac{dL}{d\phi},$$

kus L on tungraua äärmiste šarniirsete kinnituste vahekaugus. Ilmselt $H = 2a \sin \alpha$, kus $a = 17$ cm. Seega $dH/d\alpha = 2a \cos \alpha$. Teiselt poolt, $L = 2a \cos \alpha$, millest $dL/d\alpha = -2a \sin \alpha$. Vända üks täispööre tingib L muutuse kruvikeerme sammu h võrra: $\Delta L = -(\Delta\Phi/2\pi)h$. Kokkuvõttes

$$M = F \times (2a \cos \alpha) \times \frac{1}{-2a \sin \alpha} \times \frac{-h}{2\pi} = \frac{Fh \cot \alpha}{2\pi}.$$

Tähistades vända õla pikkuse l , saame avaldada otsitava jõu:

$$F_k = \frac{M}{l} = \frac{Fh \cot \alpha}{2\pi l} \approx 24 \text{ N}.$$

b) Kui hõõrdumist ei ole, siis läheb vändast pööramisele tehtav töö puhtalt auto potentsiaalse energia kasvatamiseks. Kui hõõrdumine on olemas tekstis kirjeldatud määral, siis vastupidises suunas pööramisele ei ole jõudu peaaegu vaja rakendada (tungraud püsib libisemise piiri peal) ja seega on potentsiaalse energia muut oma moodulilt võrdne hõõrdejõudude tööga. Kui vända päripidi (auto kergitamiseks), siis hõõrdejõu töö ei muutu (võrreldes sama nurga võrra vastupidi pööramisega) ja on seetõttu endiselt võrdne potentsiaalse energia muuduga. Niisiis tuleb võrreldes hõõrdevaba pööramisega sooritada kaks korda suuremat tööd, st rakendatav jõud peab olema täpselt kaks korda suurem, kui esimeses osas. Seega $F_1 = 2F = 48$ N.

L312 Nöör rennis ★★★★★

Autor: Stanislav Zavjalov, lahtine, 2012, G 9

Olgu kogu nööri mass m . Vaatleme nööri paremat poolt. Nööri pinge vertikaalkomponent nööri ja plaadi kokkupuutepunktis, $T \sin \theta$, peab tasakaalustama õhus rippuva osa kaalu $\frac{f}{2}mg$. Nüüd vaatleme plaadil lebavat osa, selle mass on $\frac{1-f}{2}m$. Seega nii toereaktsioon kui ka maksimaalne hõõrdejõud (kuna $\mu = 1$) on $\frac{1-f}{2}mg \cos \theta$. Hõõrdejõud peab olema tasakaalus raskusjõu komponendiga piki nööri, $\frac{1-f}{2}mg \sin \theta$, ning pingega $T = \frac{fmg}{2 \sin \theta}$:

$$\frac{fmg}{2 \sin \theta} + \frac{1-f}{2}mg \sin \theta = \frac{1-f}{2}mg \cos \theta.$$

Siit saame avaldada vastuse

$$f = \frac{1 - \tan \theta}{1 + \tan \theta} \tan \theta.$$

L313 Katus ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2017, G 9

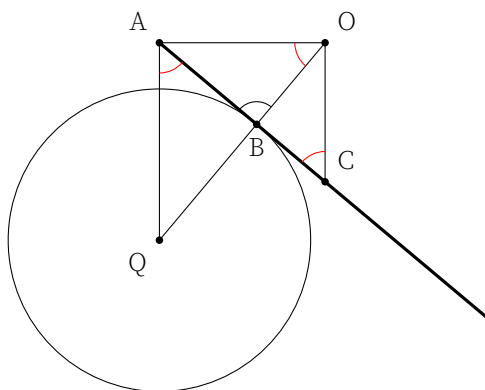
Kahe traadi kontaktpunktis A (vaata joonist allpool) mõjutavad traadid sümmeeria ja Newtoni III seaduse tõttu üksteist horisontaalsete vastassuunaliste jõududega; traadi ja silindri puutepunktis B mõjub traadile rõhumisjõud, mis on traadiga risti ning seetõttu läbib selle jõu pikendus silindri telge Q . Raskusjõud on rakendatud traadi keskpunkti C . Et traat on tasakaalus ja talle mõjuvad kolmes punktis jõud, siis nende jõudude pikendused peavad lõikuma ühes punktis O (vastasel korral mõjuks kahe jõu lõikumispunkti suhtes kolmas jõud traadile nullist erineva jõumomendiga ja traat hakkaks liikuma). Niisiis peavad punktist A tõmmatud horisontaal, punktist C tõmmatud vertikaal ning sirge QB pikendus kõik lõikuma ühes punktis. Paneme tähele, et $\angle ACO = \alpha/2$ ja $\angle AOB = \alpha/2$, seetõttu

$$|AO| = |AC| \sin(\alpha/2) = (L/2) \sin(\alpha/2),$$

$$|AB| = |AO| \sin(\alpha/2) = (L/2) \sin^2(\alpha/2)$$

ning

$$R = |QB| = |AB| \tan(\alpha/2) = (L/2) \sin^3(\alpha/2) / \cos(\alpha/2).$$



Stabiilsuse analüüsi juures paneme tähele, et kui “katus” pöörleb tervikuna, siis massikese liigub mööda ringjoont ning küsimus on vaid selles, kas see on kõrgemal või madalamal kui silindri telg Q ; viimasel juhul on massikese algasendis madalaimas positsioonis ning süsteem on stabiilne. Seega on stabiilsuse tingimuseks

$$|AQ| < |AC| \cos(\alpha/2).$$

Kui sellesse võrratusse asendame

$$|AQ| = |AB| / \cos(\alpha/2) = (L/2) \sin^2(\alpha/2) / \cos(\alpha/2)$$

ja

$$|AC| \cos(\alpha/2) = (L/2) \cos(\alpha/2),$$

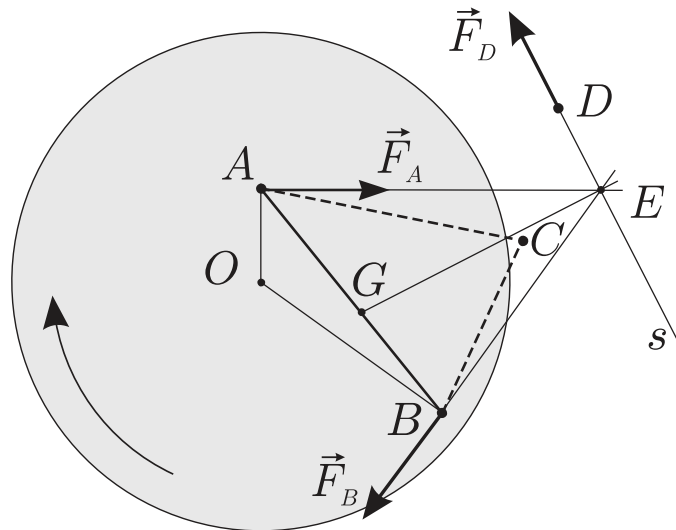
siis saame, et $\sin^2(\alpha/2) < \cos^2(\alpha/2)$. Kuna katuse korral peab kehtima $0 < \frac{\alpha}{2} < 90$, siis nii \sin kui \cos on positiivsed ja võime võtta mõlemalt poolt ruutjuure. Saame tingimuse $\sin(\alpha/2) < \cos(\alpha/2)$, mis kehtib kui $\alpha < \pi/2$. Paneme tähele, et viimast tingimust võib esitada erinevatel viisidel, kasutades R , L ja α vahelist seost.

L314 Platvorm ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2005, G 10

a) Kolmnurk hakkab pööranda suhtes liikuma, sest summaarne jõumoment punkti C suhtes koosneb kahest liidetavast, mis omavad ühte ja sama märki ning on nullist erinevad. Selles veendumiseks tuleb tõmmata punktidesse A ja B rakendatud hõõrdejõudude pikendused AE ja BE (E on nende pikenduste lõikepunkt), mis on risti vastavalt raadiustega OA ja OB (vt joonist).

b) Süsteemile mõjub kolm horisontaalsuunalist jõudu. Jõumomentide tasakaalu tingimusest järeldeb et nende jõudude pikendused peavad lõikuma ühes punktis E . Olgu kolmas keha punktis D . Siis punkti D rakendatud hõõrdejõud peab olema suunatud piki sirget ED . Teisest küljest, jõudude tasakaalu tingimusest lähtuvalt peavad hõõrdejõudude vektorid moodustama võrdhaarse kolmnurga $\vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C = 0$ (võrdhaarse, sest punktidesse A ja B rakendatud jõud on moodulilt võrdsed, $|\vec{F}_A| = |\vec{F}_B|$).



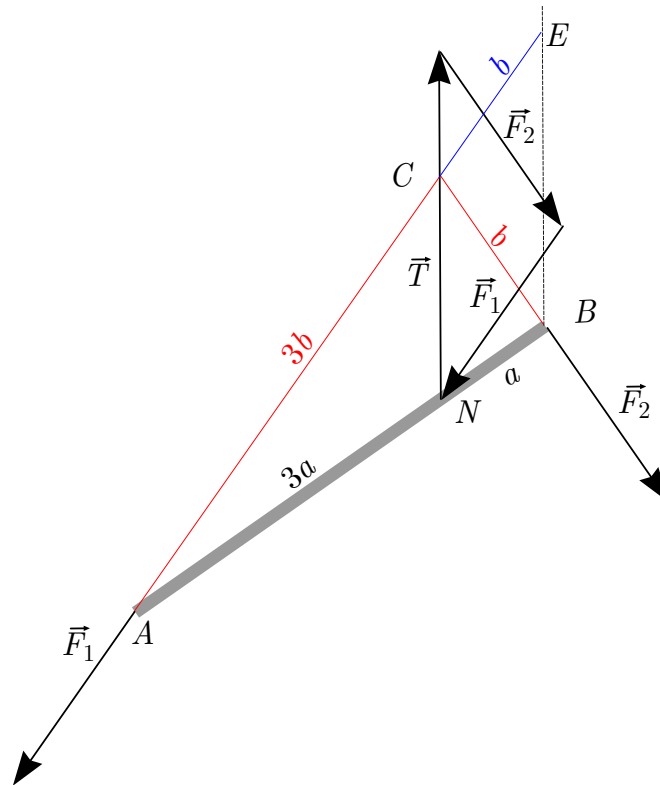
Selletõttu peab vektorite \vec{F}_A ja \vec{F}_D vaheline nurk võrduma vektorite \vec{F}_D ja \vec{F}_B vahelise nurgaga. Niisiis peab sirge ED ristuma nurga $\angle AEB$ poolitajaga EG . See tähendab, et punktihulgaks X on sirge s , mis ristub nurga $\angle AEB$ poolitajaga EG . Lõpetuseks paneme tähele, et hõõrdejõud \vec{F}_D peab olema moodulilt väiksem, kui \vec{F}_A ja \vec{F}_B , sest muidu toimuks kolmanda keha juures libisemine. Nii ka on, sest nurk $\angle AEB$ on väiksem kui 60° (60° , st võrdkülgse kolmnurga puhul oleks jõudude kolmurgas $\vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C = 0$ kõik küljed võrdsed, 60° väiksemate nurkade puhul aga oleks vektor \vec{F}_C oma moodulilt teistest väiksem).

L315 Niidiga hantel ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2015, G 9

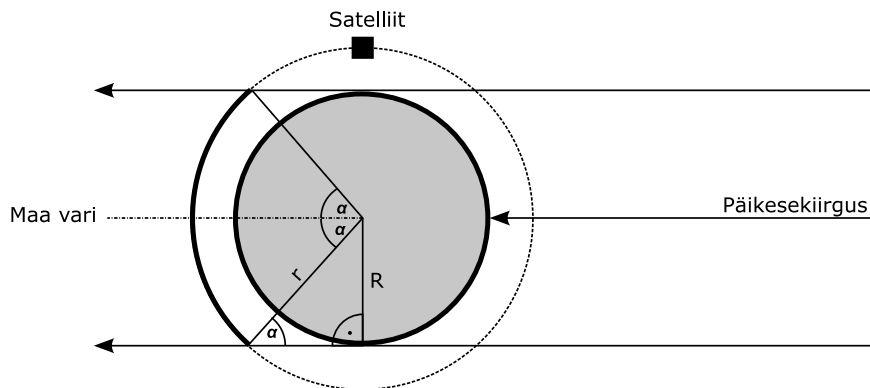
Pulgale mõjuvad kolm jõudu. Jõumomentide tasakaalu tõttu peavad nende jõudude rakendussirged lõikuma ühes punktis, olgu see punkt C . Olgu niidi rakenduspunkt N ja pulga otspunktid A ning B , vt joonis. Kuna enne klotsi A paigalt nihkumist pöörleb pulk ümber selle, siis punkti B kiirusvektor on risti AB -ga, sama kehtib punkti B rakendatud hõõrdejõu vektori jaoks; sestap $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$. Et nihkuma hakkamise hetkel on hõõrdejõud võrdsed, siis jõudude kolmnurk $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{T}$ on võrdhaarne, järelikult on võrdhaarne ka jõudude kolmnurgaga sarnane kolmnurk CBE (sirge BE on tõmmatud paralleelsena \vec{T} -ga ja E asub \vec{F}_1 rakendussirgel, vt joonis). Olgu $|CB| = b$; siis ka $|CE| = b$. Seetõttu kolmnurkade ANC ja ABE sarnasuse põhjal $|AC| = 3b$. Pythagorase teoreemist kolmnurga ABC jaoks $9b^2 = b^2 + 16a^2$, st $b = \sqrt{2}a$. Seetõttu otsitav nurk

$$\angle BNC = \arctan \frac{b}{a} = \arctan \sqrt{2} \approx 0,96 \text{ rad} \approx 55^\circ.$$



L316 Satelliit ★

Autor: Mihkel Pajusalu, piirkonnavaor, 2011, G 2



Ringikujulisel orbiidil on satelliidi kiirus kogu orbitaalperioodi jooksul konstantne ja seetõttu on varjus veedetud osa ajast võrdne orbiidi varjus oleva osa pikkuse ja kogu orbiidi pikkuse suhtega, mis on ülal toodud jooniselt leitav kui

$$k = \frac{2\alpha r}{2\pi r} = \frac{\arcsin\left(\frac{R}{r}\right)}{\pi} = 36,5\%$$

L317 Väike prints ★

Autor: Urmo Visk, piirkonnavaor, 2009, G 1

Kui väike prints kõnnib piki asteroidi ekvaatorit, mõjub talle gravitatsioonijõud, mis põhjustab kesktõmbekiirendust. Kaalugu väike prints m kilogrammi. Newtoni II seaduse põhjal

$$m \frac{v^2}{R} = G \frac{mM}{R^2} \Rightarrow v^2 = \frac{GM}{R}.$$

Asteroidi mass pole teada, kuid teada on asteroidi tihedus. Kui asteroidi raadius on R , siis on asteroidi ruumala $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ ja mass

$$M = \rho V = \frac{4}{3}\pi \rho R^3.$$

Asendades massi esialgsesse avaldisse saame

$$v^2 = \frac{GM}{R} = \frac{G}{R} \cdot \frac{4}{3}\pi \rho R^3 = \frac{4}{3}\pi \rho G R^2.$$

Siit avaldame asteroidi raadiuse:

$$R = v \sqrt{\frac{3}{4\pi \rho G}} = \frac{v}{2} \sqrt{\frac{3}{\pi \rho G}} = 5 \text{ km}.$$

L318 Maa pöörlemisperiood ★

Autor: Eero Vaher, piirkonnavor, 2014, G 3

Päikese näivat liikumist taevas põhjustavad nii Maa pöörlemine kui ka tiirlemine. Maa tiirlemise tõttu erineb Maa täispöörde arv aastas ühe võrra keskmiste päikeseööpäevade arvust. Kuna Maa tiirlemise suund ühtib Maa pöörlemise suunaga, teeb Maa ühe aasta jooksul ühe täispöörde rohkem. Seega on Maa pöörlemisperioodiks

$$P = \frac{365,256}{366,256} \cdot 86\,400 \text{ s} = 86\,164 \text{ s} = 23 \text{ h} 56 \text{ min} 4 \text{ s}.$$

Alternatiivne lahendus

Päike teeb täistiiru taevas sagedusega $f_k = \frac{1}{86\,400 \text{ s}}$. Maa tiirlemise sagedus on $f_t = \frac{1}{365,256 \cdot 86\,400 \text{ s}}$. Kuna Maa pöörlemis- ja tiirlemissuunad ühtivad, siis kehtib võrrand $f_k = f_p - f_t$, kus f_p on Maa pöörlemise sagedus. Siit saame avaldada Maa pöörlemisperioodi

$$P = \frac{1}{f_p} = \frac{1}{f_k + f_t} = 86\,164 \text{ s} = 23 \text{ h} 56 \text{ min} 4 \text{ s}.$$

Märkused.

- Nimetuse keskmine päikeseööpäev tingib asjaolu, et Maa elliptilise orbiidi tõttu on Päikese näiv nurkkiirus taevas veidi muutlik.
- Maa tiirlemisperioodi nimetatakse ka sideeriliseks aastaks.
- Enamasti mõistetakse aastana troopilist, mitte sideerilist aastat, mis on defineeritud pöörpäevade kordumise põhjal. Troopilise ning sideerilise aasta erinevuse põhjustab Maa telje pretsessioon. Igapäevaelus ei ole olulised mitte Maa pöörlemine ning tiirlemine vaid hoopis Päikese ööpäevane liikumine taevas ning aasta-aegade kordumine, mistõttu laialdaselt kasutatavad ööpäeva ning aasta mõisted erinevadki Maa pöörlemis- ning tiirlemisperioodidest.

L319 Eksinud satelliit ★★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2009, G 5

Leiame geostatsionaarse orbiidi raadiuse, olgu see r . Sellel orbiidil on satelliidi tiirlemise periood $T = 24 \text{ h} = 86\,400 \text{ s}$ ning nurkkiirus $\omega = \frac{2\pi}{T} = 7,27 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$. Olgu satelliidi mass m ja Maa mass M . Satelliit liigub kekstõmbekiirendusega $a = \omega^2 r$ ning talle mõjub gravitatsioonijõud

$$F_G = G \frac{Mm}{r^2}.$$

Newtoni II seaduse põhjal

$$G \frac{Mm}{r^2} = m\omega^2(R + h) \Rightarrow r^3 = \frac{GM}{\omega^2}.$$

Raskuskiirendus maapinnal võrdub $g = G \frac{M}{R^2}$, kust saame avaldada $GM = gR^2$. Saame nüüd asendada

$$r^3 = \frac{gR^2}{\omega^2} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{gR^2}{\omega^2}} \approx 42\,300 \text{ km}.$$

Satelliidi orbitaalliikumise kiirus on seega $v_0 = \omega r = 3,08 \text{ km/s}$. Põrkekiirus on maksimaalne siis, kui "eksitud" satelliit tiirleb samal ringorbiidil mis teised side-satelliidid, kuid liikumise suund on vastupidine. Sel juhul

$$v = 2v_0 = 6,16 \text{ km/s}.$$

L320 Orbiit ★★

Autor: Mihkel Pajusalu, lahtine, 2014, G 3

Selles ülesandes kasutame lähendust, et väikese massiga (olgu selleks m) punkt-mass Kuu tiirleb ümber suure punktmassi Maa. Paneme tähele, et Kuu gravitatsioonilise potentsiaalse energia ja kineetilise energia summa on jääv.

$$\frac{mv_1^2}{2} - G\frac{Mm}{r_1} = \frac{mv_2^2}{2} - G\frac{Mm}{r_2}.$$

Samuti on kõigil orbiitidel liikuvatel kehadel muutumatu impulsimoment. Kuna orbiidid on ellipsid, siis suurimal ja vähimal kaugusel Maast on Kuu orbitaalkiirus risti Kuud Maaga ühendava sirgega. Seega saab kirjutada impulsimomendi jäävuse seaduse suurima ja vähima kauguse jaoks kujul

$$mv_1r_1 = mv_2r_2.$$

Kuu mass taandub mõlemast jäävusseadusest välja. Saame süsteemi

$$\begin{aligned} \frac{v_1^2}{2} - G\frac{M}{r_1} &= \frac{v_2^2}{2} - G\frac{M}{r_2}, \\ v_1r_1 &= v_2r_2. \end{aligned}$$

Süsteemi lahenditeks on $r_2 = r_1$, mis ei vasta elliptilisele orbiidile, ja

$$r_2 = \frac{1}{\frac{2GM}{r_1^2 v_1^2} - \frac{1}{r_1}} \approx 430\,000 \text{ km}.$$

L321 Päikese tihedus ★★

Autor: Eero Vaher, piirkonnavor, 2013, G 6

Päikese raadius on $r = R \sin \alpha/2$ ja ruumala $V = 4\pi r^3/3$. Maa joonkiirus oma orbiidil ümber Päikese on $v = \frac{2\pi R}{T}$. Et Maa püsiks oma orbiidil, peab sellele mõjuma kesktõmbejõud $F = \frac{mv^2}{R}$, kus m on Maa mass. See kesktõmbejõud on teadagi Maa ja Päikese vaheline gravitatsioonijõud $G\frac{mM}{R^2}$, kus M on Päikese mass, seega

$$\frac{mv^2}{R} = G\frac{mM}{R^2}.$$

Saame

$$M = \frac{Rv^2}{G}.$$

Päikese tihedus avaldub seosest $\rho = \frac{M}{V}$,

$$\rho = \frac{Rv^2}{G} \frac{3}{4\pi r^3} = \frac{24\pi R^3}{GT^2 \sin^3 \alpha} = 1,4 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3.$$

L322 Ühendatud satelliidid ★★

Autor: Eero Vaher, piirkonnavaor, 2018, G 6

Trossi puudumisel peab satelliidile mõjuv kesktõmbejõud olema võrdne sellele mõjuva raskusjõuga. Esimese satelliidi jaoks

$$\frac{mv_1'^2}{R_1} = G \frac{Mm}{R_1^2},$$

millest järeldub

$$v_1' = \sqrt{\frac{GM}{R_1}}$$

ning analoogiliselt

$$v_2' = \sqrt{\frac{GM}{R_2}}.$$

Kuna satelliidid on trossiga ühendatud, siis seesmisele satelliidile mõjuv kesktõmbejõud peab olema sellele mõjuva raskusjõu ning trossi pinge vahe ning välimisele satelliidile mõjuv kesktõmbejõud peab olema sellele mõjuva raskusjõu ning trossi pinge summa. Niisiis

$$\begin{cases} \frac{mv_1^2}{R_1} = G \frac{Mm}{R_1^2} - T, \\ \frac{mv_2^2}{R_2} = G \frac{Mm}{R_2^2} + T. \end{cases}$$

Kuna $v_1 = 2\pi R_1/P$ ning $v_2 = 2\pi R_2/P$, siis saame kirjutada

$$\frac{4\pi^2}{P^2} (R_1 + R_2) = GM \frac{R_2^2 + R_1^2}{R_1^2 R_2^2}.$$

Tehes asenduse $R_2 = 2R_1$, saame

$$\frac{2\pi R_1}{P} = \sqrt{\frac{5GM}{12R_1}},$$

ning asendusest $R_1 = \frac{R_2}{2}$ järeldub

$$\frac{2\pi R_2}{P} = \sqrt{\frac{10GM}{3R_2}}.$$

Sisemine satelliit tiirleb niisiis trossi tõttu $\sqrt{12/5}$ korda väiksema ning välimine $\sqrt{10/3}$ korda suurema joonkiirusega.

L323 Satelliit ★★★

Autor: Eero Vaher, lõppvoor, 2013, G 5

Satelliidile orbiidil mõjuv kesktõmbejõud on Maa poolt satelliidile avaldatav gravitatsioonijõud. Saame

$$\frac{mv^2}{R} = G \frac{Mm}{R^2},$$

kus m on satelliidi mass ja R orbiidi raadius. Kuna geostatsionaarne satelliit Maa suhtes ei liigu, peab selle tiirlemisperiood olema samuti 24 h. Saame $v = \frac{2\pi R}{t}$. Neist võrranditest saame

$$4\pi^2 R^3 = GM \Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{GMt^2}{4\pi^2}} = 42\,400 \text{ km.}$$

Maa keskpunkt, satelliit ning satelliidilt nähtava maa-ala serval asetsev suvaline punkt moodustavad täisnurkse kolmnurga, mille hüpotenuusiks on satelliidi orbiidi raadius ning üheks kaatetiks Maa raadius. Maa keskmes asuvaks nurgaks saame $\alpha = \arccos \frac{r}{R}$, kuid kuna meid huvitab satelliidilt nähtava ala läbimõõt, peame leidma nurga 2α . Sellele nurgale vastav kaare pikkus Maa pinnal on $d = 2r\alpha$ (kui nurk on radiaanides). Lõppvastuseks saame

$$d = 2r \arccos \left(\frac{r}{\sqrt[3]{\frac{GMt^2}{4\pi^2}}} \right) = 18\,000 \text{ km.}$$

L324 Kosmosejaam ★★★

Autor: Oleg Košik, lõppvoor, 2005, G 9

Maa pöörlemise tõttu ümber oma telje tekivad trajektoori nihked. Mõõdame nihke pikkuse ekvaatoril Δl ning ekvaatori pikkuse (ehk kogu kaardi laiuse) l . Nende suhe määrab kosmosejaama nurkkiiruse ω_J ja maa pöörlemise nurkkiiruse ω_M suhte:

$$\alpha = \frac{l}{\Delta l} = \frac{\omega_J}{\omega_M} \approx 15,7.$$

Arvestades, et maa pöörlemise nurkkiirus on $\omega_M = 2\pi/T$, kus T on ööpäeva pikkus ehk 86 400 s, leiame

$$\omega_J = \alpha\omega_M = \frac{2\pi\alpha}{T}.$$

Kosmosejaamale mõjuv gravitatsioonijõud määrab kesktõmbekiirenduse:

$$mg' = m\omega_J^2 r = m\omega_J^2 (R + h),$$

kus g' on raskuskiirendus kõrgusel h maapinnast. Gravitatsiooniseadusest teame, et raskuskiirendus on pöördvõrdeline kauguse ruuduga, millest

$$g' = g \left(\frac{R}{r} \right)^2 = g \left(\frac{R}{R + h} \right)^2.$$

Kombineerides kaks viimast võrrandit, saame

$$\omega_J^2(R+h) = g \left(\frac{R}{R+h} \right)^2,$$

kust ostitav kõrgus on

$$h = \sqrt[3]{\frac{gR^2}{\omega_J^2}} - R = \sqrt[3]{\frac{gR^2T^2}{4\pi^2\alpha^2}} - R \approx 359 \text{ km.}$$

Märkus. Tegelik kõrgus varieerub 350 ja 365 km vahel (Maa raadius ei ole kõikjal ühesugune). Siin α väärtus oli mõõdetud suhteliselt täpsete arvutigraafika vahenditega, joonlauga joonise mõõtmise korral esinevate ebatäpsuste tõttu võib vastus erineda tegelikust kuni 200 kilomeetri võrra.

L325 Kuukaabel ★★★★★

Autor: Siim Ainsaar, piirkonnavor, 2009, G 10

a) Maa avaldab kaablile jõudu

$$F_M = Gm_M\lambda \left(\frac{1}{r_M} - \frac{1}{D-r_K} \right),$$

analoogiliselt Kuu,

$$F_K = Gm_K\lambda \left(\frac{1}{r_K} - \frac{1}{D-r_M} \right).$$

Suhe on seega

$$\frac{F_M}{F_K} = \frac{m_M \left(\frac{1}{r_M} - \frac{1}{D-r_K} \right)}{m_K \left(\frac{1}{r_K} - \frac{1}{D-r_M} \right)} \approx 21,9.$$

b) Leiame kaablit pingutava jõu $T(x)$ Kuu keskmest mingil kaugusel x . Sellest kaugusest Maa-poolset kaabliosade mõjutavad kolm jõudu: kaabli pinge $T(x)$ ning Maa ja Kuu poolt avaldatavad raskusjõud. (x -st Kuu-poolset osa mõjutab ka otsa Kuu küljes hoidev jõud, selle arvutamiseks pole tarvidust.) Nimetatud jõud on tasakaalus, mistõttu

$$T(x) = G\lambda m_M \left(\frac{1}{r_M} - \frac{1}{D-x} \right) - G\lambda m_K \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{D-r_M} \right).$$

Kaabel katkeks seal, kus pinge on tugevaim, seega lahendame ekstreemumülesande ja leiame $T(x)$ maksimumi. Seal tuletis $T'(x) = 0$. Kui saame ainult ühe mõistliku lahendi, pole ekstreemumi liigi määramiseks teist tuletist vajagi: teame, et kosmoses on T suurem kui kaabli otstes (taevakehapinnalt kaabliosade eralduspunkti eemaldades kasvab lähema keha tõmme alumisele, "tekkivale" kaablipoolele ilmselt kiiremini kui kahaneb teise keha tõmme ülemisele; osade suhtelised massid muutuvad oluliselt erineva kiirusega), tänu millele (vähemalt) üks

maksimum eksisteerib.

$$T'(x) = -\frac{G\lambda m_M}{(D-x)^2} + \frac{G\lambda m_K}{x^2} = 0 \implies x = \frac{D}{1 \pm \sqrt{\frac{m_M}{m_K}}}.$$

Miinusmärgiga lahend on negatiivsema mittefüüsikaline, seega otsitavaks kõrguseks osutub

$$h = \frac{D}{1 + \sqrt{\frac{m_M}{m_K}}} - r_K \approx 36\,200 \text{ km}.$$

L326 Satelliidid ★★★★★

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2010, G 7

Lähtume analoogiast molekulaarfüüsikaga, kus ühe molekuli vaba tee hindamisel arvestatakse, et molekul liigub ilma põrgeteta tüüpiliselt aja jooksul, mil tema kokkupõrke-ristlõige on katnud ruumala, milles asub tüüpiliselt üks osake (see ruumala avaldub kui anuma ruumala jagatud osakeste arvuga). Kokkupõrke-ristlõige pole päris identne osakese enda ristlõikega – vaatleme näiteks kera-kujulisi osakesi raadiusega r , osakesed põrkuvad kui nende tsentrid ei ole teineteisest kaugemal kui $2r$, niisiis on ühe osakese kokkupõrke-ristlõige neli korda suurem tema ristlõikest.

Satelliidid liiguvad ruumiosas ruumalaga

$$V = \frac{4\pi}{3} [(R+h_2)^3 - (R+h_1)^3] \approx 1,2 \cdot 10^{12} \text{ km}^3.$$

Liikumisruum ühe satelliidi kohta on seega V/N (niisuguse ruumalaga suvaliselt valitud ruumiosast leiame tüüpiliselt ühe satelliidi).

Aja t jooksul katab ühe satelliidi kokkupõrke-ristlõige ruumala

$$V_t = 4Svt,$$

kus v on tüüpiline satelliidi liikumise kiirus. Me ei tee suurt viga, võttes v väärtuseks esimese kosmilise kiiruse (kiirus sõltub raadiuse ruutjuurest ning suhteline viga oleks ainult $\sqrt{\frac{6400+2000}{6400}} \approx 1,15$):

$$\frac{v^2}{R} = \frac{GM}{R^2} = g.$$

Niisiis,

$$V_t = \sqrt{gRASt}.$$

Eelneva arutluse kohaselt arvestame, et ühel satelliidil tuleb kokkupõrget oodata niisugune ajavahemik t , et $V_t = V/N$. Et meil on aga N satelliiti, siis esimese niisuguse kokkupõrkeni kulub N korda vähem aega. Seega,

$$\Delta t = \frac{V}{N^2 4S\sqrt{gR}} = \frac{1,2 \cdot 10^{12} \cdot 10^9}{4 \cdot 2,5^2 \cdot 10^6 \cdot 10 \cdot \sqrt{10 \cdot 64 \cdot 10^2 \cdot 10^3}} \text{ s} = 6 \cdot 10^8 \text{ s},$$

ehk

$$\Delta t = \frac{6 \cdot 10^8}{3600 \cdot 24 \cdot 365} \approx 19 \text{ a.}$$

L327 Balloon ★

Autor: Jaan Susi, lõppvoor, 2005, G 3

Termodünaamika I seaduse kohaselt $\Delta U = Q - A$, kus Q on süsteemi antud soojushulk ning A on välisjõudude vastu tehtud töö. Antud ülesande kontekstis on Q negatiivne ja A positiivne ning $A = p\Delta V$ ja $Q = -\lambda\rho_v V$. Niisiis,

$$\Delta U = -\lambda\rho_v V - p \left(\frac{V\rho_v}{\rho_j} - V \right) = -\rho_v V [\lambda + p(\rho_j^{-1} - \rho_v^{-1})].$$

Paneme tähele, et avaldis nurksulgudes peaks kujutama endast sulamissoojust normaaltingimustel (sest vee võib viia samasse lõppolekusse ka teisel viisil – muutes ta jääks normaaltingimustel ning seejärel viies rõhu etteantud väärtuseni; et jää loeme kokkusurumatuks, siis rõhu tõstmisel tööd ei tehta). Paistab, et tegemist pole siiski päris hariliku veega, sest

$$\lambda + p(\rho_j^{-1} - \rho_v^{-1}) = 323 \text{ kJ/kg} \neq \lambda_0 = 334 \text{ kJ/kg.}$$

Arvandmete asendamisel leiame $\Delta U = -3,23 \text{ MJ}$.

L328 Kütteklaas ★

Autor: Jaak Kikas, lõppvoor, 2007, G 1

Kehtivad valemid

$$P = \frac{U^2}{R}, \quad R = \frac{\rho L}{S},$$

kus ρ on kattedihi eritakistus. Seega vastavalt orientatsioonile $R_H = \rho b/da$ ja $R_V = \rho a/db$, kus d on kattedihi paksus. Niisiis,

$$P_H/P_V = a^2/b^2 = 0,25.$$

L329 Jääkuul ★

Autor: Urmo Visk, piirkonnavor, 2008, G 4

Rõhk kuuli sees kasvab seetõttu, et õhk kuulis soojeneb. Ülesande teksti põhjal võime eeldada, et õhu temperatuur kuuli sees on võrdne tema seinte temperatuuriga. Meie ülesandeks on kontrollida, kui palju on rõhk kasvanud selleks hetkeks, kui seinad hakkavad sulama, st on saavutanud temperatuuri $t_1 = 0^\circ\text{C}$.

Eeldame, et kera soojuspaisumine on tühine. Siis on õhu ruumala kera konstantne. Isohorilises protsessis kehtib seos

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_0}{T_0}.$$

Tähistame indeksiga "0" gaasi omadusi külmikus ja indeksiga "1" omadusi temperatuuril, mille juures seinad hakkavad sulama. Niisiis

$$p_1 = p_0 \frac{T_1}{T_0}.$$

Kasutades seda tulemust saame avaldada rõhu suhtelise muutuse

$$\frac{\Delta p}{p_0} = \frac{p_1 - p_0}{p_0} = \left(\frac{T_1}{T_0} - 1 \right).$$

Leiame selle avaldise numbrilise väärtuse:

$$\frac{\Delta p}{p_0} \approx 0,034 = 3,4\%.$$

See on selgelt väiksem, kui kuuli seinte purunemisperiood, st kuul hakkab enne sulama (kuid puruneb ilmselt ülerõhu tõttu enne lõplikku ära sulamist).

Märkus. Alternatiivse ja võrdväärse lahendusena võib leida, millise õhutemperatuuri juures saavutaks suhteline ülerõhk väärtuse 20 % (selleks tuleb 317 K ehk 44 °C) ja võrrelda seda jää sulamistemperatuuriga.

L330 Küttesüsteem ★

Autor: Tundmatu autor, piirkonnavaor, 2011, G 3

Paisumisel lisanduva ruumala jaoks peab olema paisupaagis piisavalt lisaruumi. Vajalik ruumala on

$$V - V_1 = V_0(1 + \beta t_2) - V_0(1 + \beta t_1) = \frac{V_1 \beta}{1 + \beta t_1} (t_2 - t_1).$$

Vajalik vaba ruum paisupaagis on seega $V - V_1 \approx 4,01$.

L331 Vee jäätumine ★

Autor: Jaak Kikas, lahtine, 2012, G 1

Vee jäätumisel eralduv soojushulk $m_{\text{vesi}} \lambda$ peab täpselt ära kuluma jää soojendamiseks:

$$m_{\text{vesi}} \lambda = c_j m_j (t - t_0),$$

kus λ on jää sulamissoojus, $t = 0^\circ\text{C}$ on jää lõpptemperatuur ja t_0 on otsitav jää algtemperatuur. Vee massi saame selle ruumalast, $m_{\text{vesi}} = \rho V_{\text{vesi}}$. Nendest kahest seosest saame avaldada

$$t_0 = t - \frac{\rho V_{\text{vesi}} \lambda}{c_j m_j} = -314^\circ\text{C}.$$

Ehk jää temperatuur peaks olema alla absoluutse nulli ja seega pole võimalik selle koguse jääkuubikutega kogu vett jääks muuta.

L332 Veepudel ★

Autor: Koit Timpmann, piirkonnavaor, 2013, G 2

Vesi jäätub temperatuuril 0°C . Vee jäätumisel eraldunud soojushulk läheb alajah-
tunud vee soojendamiseks jäätumistemperatuurile. Niisiis,

$$cm\Delta t = \lambda m_j$$

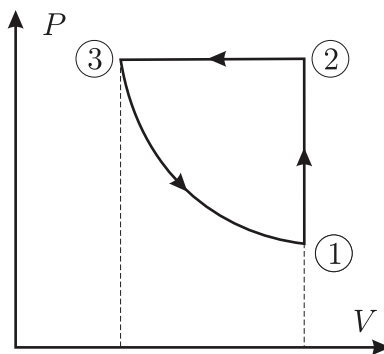
ja

$$m_j = \frac{4200 \text{ J/kgK} \cdot 2 \text{ kg} \cdot 3^\circ\text{C}}{340\,000 \text{ J/kg}} = 74 \text{ g}.$$

L333 Ringprotsess ★

Autor: Riho Taba, piirkonnavaor, 2006, G 2

Antud joonise saab teisendada telgedega P ja V graafikuks, kus iga tsükli osa töö on arvuliselt võrdne antud graafiku osa alla jääva pindalaga (sest tehtud töö on $P\Delta V$). Ideaalse gaasi töö protsessi osal $1 \rightarrow 2$: $A_{1 \rightarrow 2} = 0$, protsessi osal $2 \rightarrow 3$: $A_{2 \rightarrow 3} < 0$ ning protsessi osal $3 \rightarrow 1$: $A_{3 \rightarrow 1} > 0$, kuid $|A_{2 \rightarrow 3}| > |A_{3 \rightarrow 1}|$, seega $A_{1 \rightarrow 2 \rightarrow 3} < 0$, ehk gaasi tehtud töö on negatiivne.



L334 Vedelike segamine ★

Autor: Aleksei Vlassov, piirkonnavaor, 2007, G 3

Olgu vedelike tihedused vastavalt ρ_1 ja ρ_2 ning erisoojused c_1 ja c_2 . Olgu otsitav temperatuur t_4 . Paneme kirja energia jäävuse võrrandid mõlema segu jaoks:

$$\begin{cases} \rho_1 V c_1 (t_3 - t_1) = \rho_2 V c_2 (t_2 - t_3) \\ 2\rho_1 V c_1 (t_4 - t_1) = \rho_2 V c_2 (t_2 - t_4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho_1 c_1 (t_3 - t_1) = \rho_2 c_2 (t_2 - t_3) \\ 2\rho_1 c_1 (t_4 - t_1) = \rho_2 c_2 (t_2 - t_4) \end{cases}.$$

Korrutame esimese võrrandi vasaku poole läbi teise võrrandi parema poolega:

$$\rho_1 c_1 \rho_2 c_2 (t_3 - t_1) (t_2 - t_4) = 2\rho_1 c_1 \rho_2 c_2 (t_4 - t_1) (t_2 - t_3).$$

ehk

$$(t_3 - t_1) (t_2 - t_4) = 2(t_4 - t_1) (t_2 - t_3).$$

Siit avaldame t_4 :

$$t_4 = \frac{t_1 t_2 + t_2 t_3 - 2t_1 t_3}{2t_2 - t_1 - t_3} = 39^\circ\text{C}.$$

L335 Tulehõõrumine ★

Autor: Jaak Kikas, piirkonnavaor, 2008, G 3

Varda pöörlemisel käigus muutub hõõrdejõu ületamiseks tehtud töö soojuseks. Toru otspinna ja aluse vahel mõjub hõõrdejõud F_h , mis võrdub pinnaga ristuva rõhumisjõu ja hõõrdeteguri korrutisega. Rõhumisjõuks on jõud F , millega surutakse toru vastu alust. Seega $F_h = \mu F$. Kui toru teeb ühe pöörde, siis läbib toru sein teepikkuse $L = \pi D$. Hõõrdejõu ületamiseks tehti ühe pöörde läbimisel töö $A = F_h L$. Kui toru pöörleb sagedusega f , siis aja t jooksul teeb toru $N = ft$ pööret. Kokku eraldub toru pöörlemisel soojushulk

$$Q = AN = \mu F \pi D f \Delta t.$$

L336 Termos ★

Autor: Urmo Visk, piirkonnavaor, 2009, G 3

Olgu c_x otsitav erisoojus.

Vaatleme esimest juhtu, kus termosel oli algselt külmem vesi. Kuna külmem vesi oli termosega soojuslikus tasakaalus, siis oli ka termose temperatuur t_1 . Temperatuuride ühtlustumisel annab soojem vesi energiat ära. Külmem vesi ja termos saavad energiat juurde. Paneme kirja soojusliku tasakaalu võrrandi:

$$m_1 c (T_1 - t_1) + m c_x (T_1 - t_1) = m_2 c (t_2 - T_1). \quad (1)$$

Vaatleme teist juhtu, kus termosel oli algselt soojem vesi. Kuna soe vesi oli termosega soojuslikus tasakaalus, siis oli ka termose temperatuur t_2 . Temperatuuride ühtlustumisel annavad termos ja soojem vesi energiat ära. Külmem vesi saab energiat juurde. Kirjutame soojusliku tasakaalu võrrandi:

$$m_1 c (T_2 - t_1) = m_2 c (t_2 - T_2) + m c_x (t_2 - T_2). \quad (2)$$

Lahutame teineteisest võrrandid (2) ja (1).

$$m_1 c (T_1 - T_2) + m c_x (T_1 - t_1) = m_2 c (T_2 - T_1) - m c_x (t_2 - T_2).$$

Tähistame $T_2 - T_1 = \Delta T$. Allpool on toodud c_x tuletuskäik eelnevast valemist.

$$-m_1 c \Delta T + m c_x (t_2 - t_1) = m_2 c \Delta T + m c_x \Delta T \implies$$

$$-\Delta T c (m_2 + m_1) = m c_x (\Delta T + t_1 - t_2) \implies$$

$$c_x = -\frac{\Delta T c (m_2 + m_1)}{m (\Delta T + t_1 - t_2)} = 930 \text{ J/kg C.}$$

L337 Rauttükk ★

Autor: Oleg Košik, lahtine, 2010, G 2

Algne vee mass on $M = \rho V = 1000$ g. Olgu väljaaurustunud vee mass m_0 . Selle soojendamiseks keemistemperatuurini $t = 100^\circ\text{C}$ ning aurustamiseks läheb vaja energiat

$$Q_1 = m_0(c_1(t - t_1) + L).$$

Ülejäänud vee soojendamiseks temperatuurini t_2 läheb energiat

$$Q_2 = (M - m_0)c_1(t_2 - t_1).$$

Raua jahtumisel eraldub energia $Q_3 = mc_2(t_0 - t_2)$. Energia jäävuse seaduse kohaselt $Q_1 + Q_2 = Q_3$, ehk

$$m_0(c_1(t - t_1) + L) + (M - m_0)c_1(t_2 - t_1) = mc_2(t_0 - t_2).$$

Siit

$$m_0 = \frac{mc_2(t_0 - t_2) - Mc_1(t_2 - t_1)}{c_1(t - t_1) + L} \approx 2 \text{ g}.$$

L338 Jõhvikad ★

Autor: Urmo Visk, piirkonnavoore, 2010, G 2

Vee algtemperatuur oli $t_1 = 100^\circ\text{C}$. Olgu vee ja jõhvikate massid vastavalt M ja m . Jõhvikate soojendamiseks kuluv soojushulk tuleb vee jahtumise arvelt. Vee jahtumisel eralduv soojushulk oli

$$Q_j = Mc_V(t_1 - t).$$

Jõhvikate soojendamise käigus tuli 1) soojendada külmunud jõhvikad sulamistemperatuurini, 2) sulatada külmunud jõhvikad ja 3) soojendada sulanud jõhvikad vee temperatuurini. Leiame igas etapis kulunud soojushulga:

$$Q_{s1} = mc_j(0 - t_2) = -mc_j t_2,$$

$$Q_{s2} = mL,$$

$$Q_{s3} = mc_v(t - 0) = mc_v t.$$

Liidame jõhvikate soojendamiseks kulunud soojushulgad ja võrdsustame saadud summa vee jahtumisel eraldunud soojushulgaga. Saadud võrrandist avaldame vee ja jõhvikate masside suhte:

$$-mc_j t_2 + mL + mc_v t = Mc_V(t_1 - t),$$

kust

$$\frac{M}{m} = \frac{-c_j t_2 + L + c_v t}{c_V(t_1 - t)}.$$

Arvuliseks vastuseks saame 16.

L339 Vesi ★

Autor: Taavi Pungas, lõppvoor, 2011, G 1

Energia jäävusest teame, et väikese koguse vee aurustumiseks kuluv soojushulk tuleb järelejäänud vee temperatuuri langemise arvelt.

Kuigi aurustumise alghetkel tekib veeaur temperatuuriga 100°C , on hiljem nii vee kui tekkiva veeauru temperatuur veidi madalam. Uuel temperatuuril aga ei ole enam väikese koguse vee aurustumiseks kuluv soojushulk otseselt arvatav vee aurustumissoojusest temperatuuril 100°C (ülesandes antud L).

Seega teeme lihtsustuse, et vee aurustumissoojus on selles temperatuurivahemikus kogu aeg L . Olgu esialgselt termosel oleva vee mass m . Saame $0,01mL = 0,99mc_v\Delta t$, mis annab vastuseks

$$\Delta t = \frac{1}{99} \frac{L}{c_v} = 5,4^\circ\text{C}.$$

L340 Hõõrdkeevitus ★

Autor: Ants Remm, lõppvoor, 2012, G 1

Hõõrdumisest tekkiv soojushulk

$$Q = F_h \Delta s = F \mu \Delta s = \pi f D \Delta t.$$

Teiselt poolt on torude soojendamiseks vaja minev soojushulk

$$Q = 2mc\Delta T = 2\rho V c\Delta T,$$

kus m ja V on ühe toruotsa soojeneva osa mass ja ruumala. Kuna toru seinad on diameetrist kordades õhemad, võib hinnata ruumalaks $V = \pi D dl$. Kokkuvõttes saame, et

$$F \mu \pi f D \Delta t = 2\pi D dl \rho c (T_1 - T_0),$$

$$F = \frac{2dl\rho c(T_1 - T_0)}{\mu f \Delta t} \approx 1200 \text{ N}.$$

L341 Münt jääs ★

Autor: Erkki Tempel, piirkonnavor, 2015, G 3

Jäätükk koos mündiga hakkab uppuma siis, kui sellele mõjub raskusjõud on võrdne üleslükkejõuga. Tähistame uppumise hakkamise hetkel münti ümber oleva jää massi m ning ruumala V . Sellisel juhul mõjub jäätükile enne uppuma hakkamist raskusjõus $F_r = (m_m + m)g$ ning üleslükkejõud

$$F_y = \rho_v g (V + V_m) = \rho_v g \left(\frac{m}{\rho_j} + \frac{m_m}{\rho_m} \right).$$

Kuna raskusjõud ja üleslükkejõud on uppumise hakkamise hetkel võrdsed, saame avaldada münti ümber olnud jää massi m :

$$m = \frac{\rho_j m_m (\rho_m - \rho_v)}{\rho_m (\rho_v - \rho_j)} = 79,9 \text{ g}.$$

Sulanud jää mass m_s on seega

$$m_s = m_j - m = m_j - \frac{\rho_j m_m (\rho_m - \rho_v)}{\rho_m (\rho_v - \rho_j)}.$$

Jää sulamiseks vajaminev energia $Q = \lambda m_s$ saadakse vee jahtumisel eraldunud energiast $Q = cm_v \Delta T$. Võrdsustades viimased avaldised ning avaldades ΔT , saame

$$\Delta T = \frac{\lambda m_s}{cm_v}.$$

Asendades siia sulanud jää massi m_s , saame temperatuuri muutuseks

$$\Delta T \approx 9,8^\circ\text{C}.$$

Kuna vee lõpptemperatuur pärast soojusvahetuse lakkamist on 0°C , peab vee algtemperatuur olema $9,8^\circ\text{C}$.

L342 Soojusvaheti ★

Autor: Kaur Aare Saar, lõppvoor, 2016, G 1

Nafta jahtumisel eraldunud soojus kulub vee soojendamiseks: $Q_{\text{nafta}} = Q_{\text{vesi}}$,

$$m_n c_n \Delta t_n = m_v c_v \Delta t_v \Rightarrow$$

$$\rho_n v_n c_n \Delta t_n = \rho_v v_v c_v \Delta t_v \Rightarrow \Delta t_v = \frac{\rho_n v_n c_n \Delta t_n}{\rho_v v_v c_v} \approx 64^\circ\text{C}.$$

Seega väljub vesi soojusvahetist temperatuuril $T = 64^\circ\text{C} + 10^\circ\text{C} = 74^\circ\text{C}$.

L343 Kastmisvesi ★★

Autor: Urmo Visk, piirkonnavoor, 2008, G 5

Kastmisvee anuma taha tekib kiirtega ristuvale tasandile ringikujuline vari. Samasugune vari tekiks ka ringist, mis paikneb risti päikesekiirtega. Seega neelavad võrdse raadiusega kera ja kiirtega risti olev ring valgust võrdselt, sõltumata päikesevalguse langemise nurgast. Järelikult on veeanuma poolt ühes sekundis neelatav soojushulk $P = \varepsilon \pi R^2$. Päeva jooksul saadav soojushulk on $Q = P\tau$, kus ajavahe-
mik

$$\tau = 22,5 \text{ h} - 4,5 \text{ h} = 18 \text{ h} = 64\,800 \text{ s}.$$

Teisest küljest kulub see soojus vee soojendamisele, st $Q = C\Delta t$, kus Δt on vee temperatuuri muutus ja vee soojusmahtuvus $C = mc$. Siinjuures vee mass $m = (4/3)\pi R^3 \rho$. Niisiis

$$\pi R^2 \cdot \varepsilon \tau = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho c \Delta t,$$

millest

$$\Delta t = \frac{3\varepsilon\tau}{4c\rho R}$$

ja järelikult lõpptemperatuur on

$$t = t_0 + \frac{3\varepsilon\tau}{4c\rho R};$$

numbriliselt $t \approx 28^\circ\text{C}$.

L344 Küttesüsteem ★★

Autor: Oleg Košik, piirkonnavor, 2012, G 2

Mingi ajavahemiku Δt jooksul kaotab koolimaja väliskeskkonda soojust $Q_1 = N\Delta t$, sama palju soojust peavad andma selle aja jooksul talle radiaatorid. Toru ristlõike pindala on $S = \frac{\pi D^2}{4}$. Aja Δt jooksul küttesüsteemi siseneva ja ühtlasi sellest väljuva vee ruumala on seega $V = Sv\Delta t$, kus v on otsitav veevoolu kiirus, ning mass $m = \rho V = \rho Sv\Delta t$. Radiaatorites eraldub soojushulk $Q_2 = mc(t_0 - t_1)$. Kuna $Q_1 = Q_2$, saame võrrandi

$$N\Delta t = \rho \frac{\pi D^2}{4} v \Delta t c (t_0 - t_1),$$

millest

$$v = \frac{4N}{\pi D^2 \rho c (t_0 - t_1)} = 0,15 \text{ m/s}.$$

L345 Lihvimisketas ★★

Autor: Ott Krikmann, piirkonnavor, 2005, G 3

Kettal aja $t = 1$ s jooksul eraldub soojushulk

$$Q = \frac{\pi r^2 q}{s}.$$

Sama aja jooksul voolab vesi massiga

$$m = wt\rho.$$

Et jahutusvesi kannab kogu eralduva soojust, siis võib koostada soojusbalansi võrrandi aja $t = 1$ s jaoks:

$$\frac{\pi r^2 q}{s} = wt\rho c (t_2 - t_1).$$

Siit võrrandist avaldame t_2 :

$$t_2 = t_1 + \frac{\pi r^2 q}{s w t c \rho} \approx 40 \text{ }^\circ\text{C}.$$

L346 Vee keemine ★★

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2008, G 6

Leiame pindpinevuse tõttu mullis tekkiva lisarõhu. See on teatavasti $P = \frac{2\sigma}{r}$. Seda saab mitmel moel tõestada. Üks võimalus on vaadelda mulli keskpunkti läbivat tasandit, mis jaotab kera kaheks poolkeraks. Poolkerasid tõmbab kokku pindpinevusjõud $F = 2\pi r\sigma$. Jõudude tasakaalust peab see olema võrdne lisarõhu poolt tekitatud jõuga $F = \pi r^2 \cdot P$. Seega tekitab pindpinevus mullis lisarõhu $P = \frac{2\sigma}{r}$. Samale tulemusele võiksime jõuda ka järgnevalt. Pindpinevuse pinnaenergia avaldub teatavasti kui $E = \sigma 4\pi r^2$. Suurendades raadiust väikese Δr võrra, on energia muut

$$\Delta E = 4\pi\sigma((r + \Delta r)^2 - r^2) \approx 8\pi\sigma r\Delta r.$$

Samas avaldub energia muut rõhu kaudu kui

$$A \approx pS\Delta r = 4\pi r^2 p\Delta r.$$

Kuna $A = \Delta E$, siis $p = \frac{2\sigma}{r}$.

Kuni 105 kraadini ei toimunud keemist, seega pidid mullid olema nii väikesed, et pindpinevuse poolt tekitatud lisarõhu ja õhurõhu summa jäi suuremaks kui külastunud veeauru rõhk: $p_0 + \frac{2\sigma}{r} > p_{\text{aur}} = p_0 + 5 \cdot 3,5 \text{ kPa}$, siit

$$r = \frac{2\sigma}{5 \cdot 3,5 \text{ kPa}} = 6,6 \mu\text{m}.$$

L347 Vesi ja jää ★★

Autor: Andres Laan, piirkonnavor, 2010, G 5

Soojusvoog läbi vee kihi on määratud valemiga

$$Q = D \frac{S\Delta T}{l},$$

kus S on kihi pindala, l selle paksus, ΔT kihi ülemise ja alumise pinna temperatuuride vahe ning D vastava vee faasi soojusjuhtivuskoeffitsient. Vaatleme vedela ja tahke faasi piirpinda. Antud pinna temperatuur on 0°C . Tahkest poolest tulev soojusvoo võimsus on $Q_t = D_t S T_1 / l_t$ ja vedelast faasist tuleva voo võimsus on $Q_v = D_v S T_2 / l_v$. Statsionaarses olukorras, kus piirpinna asukoht ei muutu, tasakaalustavad antud vood üksteist ära. Arvestades, et mõlema faasi pindalad on võrdsed, saame

$$\frac{D_t T_1}{l_t} = -\frac{D_v T_2}{l_v}.$$

Kasutame ära asjaolu, et tahke ja vedela kihi paksuste suhe oli alguses 4:

$$\frac{D_t}{D_v} = -\frac{T_2 l_t}{T_1 l_{v1}} = -\frac{-20 \cdot 4}{20 \cdot 1} = 4,$$

Teisel juhul

$$T_2' = -\frac{D_t l_v'}{D_v l_t'} T_1 = -4 \frac{l_v'}{l_t'} T_2 = 80^\circ\text{C}.$$

L348 Destillaator ★★

Autor: Koit Timpmann, lõppvoor, 2010, G 2

Kahe liitri vee mass on $m = 2 \text{ kg}$. Kondenseerudes eraldub soojushulk $Q = Lm$. 95% eraldunud soojushulgast läheb jahutusvee soojendamiseks. Seosest $\eta Lm = cM\Delta T$ saame jahutusvee massi

$$M = \frac{\eta Lm}{c\Delta T}.$$

Jahutusvee massi saame avaldada tiheduse ja ruumala kaudu ning ruumala omakorda toru ristlõikepindala, voolu kiiruse ja aja kaudu:

$$M = \rho V = \rho S l = \rho S v t.$$

Viies kokku need kaks võrrandit, saame avaldada kiiruse:

$$v = \frac{\eta Lm}{c\Delta T \rho S t} \approx 0,12 \text{ m/s}.$$

L349 Veekeedukann ★★

Autor: Erkki Tempel, lahtine, 2015, G 4

Suurima kiiruse saavutab veeaur siis, kui vesi on kuumutatud keemistemperatuurini $T = 100^\circ\text{C} = 373 \text{ K}$. Veekeedukannu tehtud töö $A = \gamma N t$ läheb siis vee aurustamiseks ehk $A = Q = Lm$. Seega aja t jooksul aurustunud vee mass on

$$m = \frac{\gamma N t}{L}$$

ning ruumala

$$V = \frac{\gamma N t R T}{L p \mu}.$$

Kuna veeaur pääseb välja avast pindalaga S , siis peab aja t jooksul eraldanud veeaur läbima vahemaa $s = V/S$ ning veeauru väljumise kiiruseks saame

$$v = \frac{s}{t} = \frac{\gamma N t R T}{L p \mu S}.$$

L350 Radiaator ★★

Autor: Ardi Loot, piirkonnavaor, 2018, G 3

Leiame radiaatorit kirjeldava võrdeteguri c_r . Kuna radiaatori väljundvõimus on võrdeline pealevoolu- ja tagasivoolutemperatuuride keskmise ja toatemperatuuri vahega, siis

$$P_n = c_r \left(\frac{T_{pn} + T_{tn}}{2} - T_{0n} \right)$$

ja võrrandit lahendades saame

$$c_r = \frac{2P_n}{T_{pn} + T_{tn} - 2T_{0n}} = 40 \text{ W/K.}$$

Nüüd paneme kirja võrrandisüsteemi radiaatori tegeliku võimuse ja tagasivoolutemperatuuri jaoks

$$\begin{cases} P = c_r \left(\frac{T_p + T_t}{2} - T_0 \right) \\ P = \Gamma c_v \rho_v (T_p - T_t). \end{cases}$$

Esimene kirjeldab radiaatori väljundvõimust ja teine peale- ja tagasivoolutemperatuuride vahest tingitud energiaülekanne. Lahendades võrrandid saame

$$\begin{aligned} P &= \frac{2\Gamma c_v \rho_v c_r (T_p - T_0)}{2\Gamma c_v \rho_v + c_r} \approx 1,49 \text{ kW} \\ T_t &= \frac{2\Gamma T_p c_v \rho_v + c_r (2T_0 - T_p)}{2\Gamma c_v \rho_v + c_r} \approx 48,7^\circ\text{C}. \end{aligned}$$

Radiaatori maksimaalne võimsus on võimalik leida piirjuhuna, kui radiaatorit läbib vooluhulk Γ kasvab väga suureks. Või veelgi lihtsamalt: kui mõista, et sellisel juhul saab tagasivoolutemperatuur võrdseks pealevoolutemperatuuriga ning maksimaalne võimsus avaldub

$$P_{max} = c_r (T_p - T_0) \approx 1,92 \text{ kW.}$$

L351 Külmutusseade ★★★

Autor: Tundmatu autor, piirkonnavaor, 2005, G 8

Külmutusseadme korral on tegu pööratud soojusmasinaga, ideaalse soojusmasina puhul kehtib seos

$$\frac{A}{Q_j} = \frac{T_j - T_k}{T_j},$$

kus mootori tehtud töö on leitav energia jäävusest

$$A = Q_j - Q_k.$$

Siinjuures Q_j ja Q_k on vastavalt jahutusvedelikule ära antud ja jahutatavalt kehalt ära võetud soojushulk. Elimineerides mittevajaliku suuruse Q_j saame

$$1 + \frac{Q_k}{A} = \frac{T_j}{T_j - T_k},$$

millest

$$Q_k = \frac{AT_k}{T_j - T_k} = 22,6 \text{ kJ.}$$

L352 Elektripliit ★★★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2007, G 8

Spiraal kuumeneb temperatuurini, mil tekib soojuslik tasakaal spiraali ja ümbritseva keskkona vahel. Kuna spiraalil eraldub võimsus $P = I^2 R$, peab kehtima $P = N$ (soojuskadusid arvestamata), ehk

$$\kappa(T - T_0) = I^2 R_0 [1 + \alpha(T - T_0)].$$

Avaldades T , saame

$$T = T_0 + \frac{I^2 R_0}{\kappa - \alpha I^2 R_0}.$$

Kui $\kappa \leq \alpha I^2 R_0$ suureneb temperatuur lõpmatuseni ning pliit põleb läbi.

L353 Õhuaken ★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2009, G 6

Soojusvahetuskiirus läbi seinte jms on

$$P_s = \alpha(t - t_0) = P \frac{t - t_0}{t_1 - t_0}.$$

Peale selle toimub soojusvahetus sissetuleva õhu abil $P_1 = \dot{v} \frac{7}{2} R(t - t_0)$, kus ajaühikus sisenevate moolide arv on $\dot{v} = v/V$ ja mooli ruumala $V = RT/p_0 = 22,41/\text{mol}$. Seega soojusliku tasakaalu tingimuse saab kirja kujul

$$P = P \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} + c_p \frac{v}{V}(t - t_0),$$

millest

$$t = t_0 + \frac{P}{\frac{P}{t_1 - t_0} + c_p \frac{v}{V}} \approx 13,2^\circ \text{C}.$$

L354 Kasvuhooneefekt ★★★

Autor: Kristian Kuppart, lahtine, 2017, G 6

Päikselt jõuab maale koguvõimsus $P_p = w_0(1 - \mu)\pi R^2$, kus R on maa raadius. Kuna atmosfäär on maalt tuleva kiirguse jaoks läbimatu, peab tasakaalu korral atmosfäär väljapoole kiirgama selle sama võimsuse: $P_p = P_a$, kus P_a on atmosfääri poolt väljapoole kiiratud võimsus. Maalt kiiratud võimsus avaldub kui $P_m = 4\pi R^2 \sigma T_m^4$, kus T_m on maapinna temperatuur. Tasakaalu korral on see võrdne Päikeselt ja atmosfäärist tagasi kiirgunud võimsuste summaga:

$$P_m = P_p + P_a = 2P_p.$$

Maakera temperatuur avaldub kui:

$$T_m = \sqrt[4]{\frac{w_0(1 - \mu)}{2\sigma}} = 303 \text{ K}.$$

L355 Tuba ★★★

Autor: Oleg Košik, lõppvoor, 2006, G 7

Temperatuuri kasvu või langemise kiirus on võrdeline tuppa siseneva summaarse soojusliku võimsusega. Sellele vastab graafiku puutuja tõus. Ajahetkeni $t = 1100$ min läheb soojus toast välja, peale seda lisandub kaotatavale võimsusele tuulepuhuja võimsus. Tuulepuhuja võimsusele vastab puutuja tõusu muut mingil temperatuuril. Näiteks hetke $t = 1100$ min jaoks saame, et puutuja tõusu muut on (ligikaudu) $8/1000 + 10,2/400 \approx 0,036$ °C/min. Graafiku abil leiame nüüd temperatuuri, mille korral soojuskadude võimsus võrdub tuulepuhuja võimsusega. Selle jaoks võib kasutada joonlauda tõusuga $0,036$ °C/min ning määrata punkt graafikus, mis puutub antud sirget. Graafiku esimeses osas on selline punkt umbes temperatuuril $T = 20$ °C. Seega toatemperatuur pika aja möödumisel on $T = 20$ °C.

L356 Küttekeha ★★★

Autor: Mihkel Heidelberg, lõppvoor, 2007, G 7

Et ruumist eemalduva soojuse hulk on stabiilses olukorras võrdne küttekeha poolt toodetud soojusega, siis $P(T_2) = k(T_2 - T_1)$, $k = \frac{P(T_2)}{T_2 - T_1}$. Teisel juhul jääb k samaks:

$$P(T_4) = \frac{P(T_2)}{T_2 - T_1}(T_4 - T_3),$$

kust on näha, et punkt $(T_4, P(T_4))$ peab asetsema sirgel, mis läbib punkti $(T_3, 0)$ ja on sama tõusuga (k), kui punkte $(T_2, P(T_2))$ ja $(T_1, 0)$ ühendav sirge. Joonistades sellise sirge, saame graafikute lõikepunktist vastuse.

L357 Kauplus ★★★★★

Autor: Oleg Košik, lõppvoor, 2013, G 8

Soojusvahetus eesruumi ja õue vahel peab olema sama suur kui soojusvahetus eesruumi ja kaupluse vahel. Seega püsib päevasel ajal eesruumis temperatuur $T_4 = \frac{T_0 + T_1}{2} = 12$ °C kraadi ning eesruumi ehitusega vähenesid ukse lahtikäimisest tingitud soojuskadod 2 korda. See vähenemine oli $\Delta P = P_1 - P_3 = 0,8$ kW, seega enne eesruumi ehitamist olid vastavad soojuskadod

$$P_0 = 2\Delta P = 1,6 \text{ kW}.$$

Päevasel ajal on temperatuuride vahe õuega $\Delta T_1 = 16$ °C ning öisel ajal $\Delta T_2 = 20$ °C. Seega, kui päeval oleks kauplus kinni, siis kaupluse radiaatorid peaks töötama võimsusega

$$P'_1 = P_2 \frac{\Delta T_1}{\Delta T_2} = 4,0 \text{ kW}.$$

Kaupluse lahtioleku tõttu kütavad inimesed ja valgustid võimsusega P_x ja uksest läks kaduma P_0 . Seega saame võrduse

$$P'_1 = P_1 + P_x - P_0,$$

kust leiame $P_x = 1,0$ kW.

L358 Küttesüsteem ★★★★★

Autor: Taavi Pungas, piirkonnavor, 2014, G 9

Et korterid on identsed ning nende sisetemperatuurid on samad, peavad ka soojuskad läbi nende seinte olema võrdsed: $N_{k1} = N_{k2}$. Seega annab katlast tulev kuum vesi poole oma soojusest ära ülemises korteris ja poole alumises, mistõttu kahe korteri vahelises torus on vee temperatuur $t_{\text{toru}} = (t_1 + t_2)/2$. Et korterite temperatuur on ajas konstantne, on mõlemas korteris soojuskad läbi seinte võrdsed radiaatori küttevõimsusega. Ülemises korteris on radiaatori küttevõimsus

$$N_{k1} = k \left[\frac{1}{2}(t_1 + t_{\text{toru}}) - t \right],$$

kus k on mingi koefitsent ja $\frac{1}{2}(t_1 + t_{\text{toru}})$ on radiaatori keskmine temperatuur. Sarnaselt on alumises korteris radiaatorite küttevõimsus kokku

$$N_{k2} = 1,1k \left[\frac{1}{2}(t_{\text{toru}} + t_2) - t \right],$$

kus kordaja 1,1 tuleb sellest, et radiaatori pindala on 1,1 korda suurem. Kokku

$$k \left[\frac{1}{2}(t_1 + t_{\text{toru}}) - t \right] = 1,1k \left[\frac{1}{2}(t_{\text{toru}} + t_2) - t \right],$$

$$t = 5 \left(\frac{11}{10}t_2 - t_1 + \frac{1}{10}t_{\text{toru}} \right) = \frac{1}{4}(23t_2 - 19t_1) = 22 \text{ }^\circ\text{C}.$$

L359 Veesoojendi ★★★★★

Autor: Andres Põldaru, piirkonnavor, 2016, G 10

Alguses on lisanduva vee temperatuur võrdne soojendis oleva vee temperatuuriga ja vett välja ei voola; seega muutub vee temperatuur ainult soojendilt saadava soojuse tõttu: $\Delta Q = cm_0\Delta T = P\Delta t$. Kui ajahetk Δt on piisavalt väike, saame tõusu $\Delta T/\Delta t \approx 0,45 \frac{^\circ\text{C}}{\text{s}}$, mis tuleb graafikult mõõta ajahetkel $t = 0$. Tõusu saab leida, tõmmates graafikul puutuja ajahetkel $t = 0$, mis läbib ligikaudu punkti $T = 24,5 \text{ }^\circ\text{C}$ ja $t = 10 \text{ s}$. Massiks saame:

$$m_0 = \frac{P}{c \frac{\Delta T}{\Delta t}} \approx \frac{2000 \text{ W}}{4200 \frac{\text{J}}{\text{kg}^\circ\text{C}} \times 0,45 \frac{^\circ\text{C}}{\text{s}}} \approx 1,1 \text{ kg}.$$

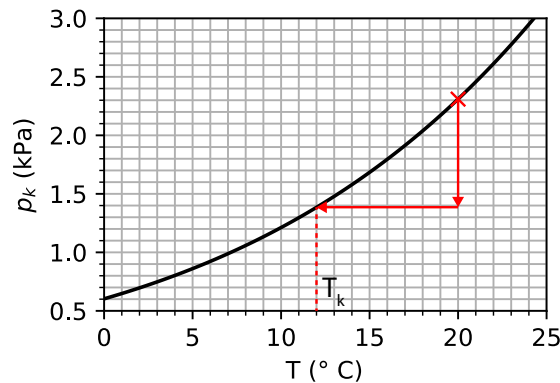
Stabiilne temperatuur saavutatakse siis, kui ajaühikus väljavoolava vee soojendamiseks kulunud energia on võrdne soojendi võimsusega. Sellest saame seose $P = \mu c(T - T_0)$, kust võttes stabiilseks temperatuuriks $T = 36 \text{ }^\circ\text{C}$, saame voolukiiruseks:

$$\mu = \frac{P}{c(T - T_0)} \approx \frac{2000 \text{ W}}{4200 \frac{\text{J}}{\text{kg}^\circ\text{C}} \times 16 \text{ }^\circ\text{C}} \approx 0,03 \frac{\text{kg}}{\text{s}} = 30 \frac{\text{g}}{\text{s}}.$$

L360 Soojustus ★★★★★

Autor: Ardi Loot, lõppvoor, 2018, G 5

Toas oleva niiske õhu levikut piirab soojustuskihtide vahel olev kile. Selleks, et vältida kondenseerumist, ei tohi kile asukohas temperatuur langeda alla kastepunkti. Kastepunkti saame leida graafiku alusel, leides alguses küllastunud veeauru osarõhu toatemperatuuril, arvutades sellest $\eta_1 = 60\%$ ja seejärel leides sellele vastava kastepunkti $T_k = 12,0\text{ }^\circ\text{C}$.



Järgmiseks on vaja leida avaldis temperatuuri jaoks kile asukohas (T). Eeldades, et temperatuur muutub soojustuskihis linearselt kaugusega ja muutuse kiirus on pöördvõrdeline soojusjuhtivusega, saame liikudes seest välja kirja panna kaks võrrandit:

$$\begin{cases} T = T_1 - \frac{\alpha}{k_1} L_1 \\ T_2 = T - \frac{\alpha}{k_2} L_2, \end{cases}$$

kus α on tundmatu võrdetegur. Nende võrrandite lahendamine annab

$$T = \frac{k_2 T_2 L_1 + k_1 T_1 L_2}{k_2 L_1 + k_1 L_2}.$$

Ja lõpetuseks, tuleb leida sisemise soojustuskihi paksus L_1 piirjuhul, kui kile temperatuur võrdub kastepunktiga

$$L_1 = L \frac{k_1 (T_1 - T_k)}{k_1 T_1 - k_2 T_2 - (k_1 - k_2) T_k} \approx 7,8 \text{ cm}$$

ja kondenseerumise vältimiseks peab sisemise soojustuskihi paksus olema sellest väiksem.

L361 Soojuskiirgus ★★★★★

Autor: Valter Kiisk, lõppvoor, 2006, G 8

a) Tähistame $j_{s \rightarrow v}$ abil soojusvoogu pindalaühiku kohta, mis on suunatud siseseinalt välisseina poole. Vastassuunalist soojusvoogu tähistame $j_{v \rightarrow s}$, $j_{s \rightarrow v}$ on tingitud siseseina kiirgusest ja $j_{v \rightarrow s}$ osalisest peegeldumisest. Analoogiliselt, $j_{v \rightarrow s}$ on tingitud välisseina kiirgusest ja $j_{s \rightarrow v}$ osalisest peegeldumisest. Seega siis

$$\begin{aligned} j_{s \rightarrow v} &= \varepsilon \sigma T_s^4 + (1 - \varepsilon) j_{v \rightarrow s} \\ j_{v \rightarrow s} &= \varepsilon \sigma T_v^4 + (1 - \varepsilon) j_{s \rightarrow v}, \end{aligned}$$

millest

$$j_{s \rightarrow v} = \sigma \frac{T_s^4 + (1 - \varepsilon) T_v^4}{2 - \varepsilon}, \quad j_{v \rightarrow s} = \sigma \frac{T_v^4 + (1 - \varepsilon) T_s^4}{2 - \varepsilon}.$$

Summaarne soojusvoog on

$$P = Sj = S(j_{v \rightarrow s} - j_{s \rightarrow v}) = S\varepsilon\sigma \frac{T_v^4 - T_s^4}{2 - \varepsilon} \approx 22 \text{ W}.$$

b) Eelmise punkti vastusest selgub, et kahe seina vahel toimuv soojusvoog on võrdeline vahega $T_2^4 - T_1^4$. Seega on siin täielik analoogia elektriahelate teooriaga, kui T^4 tõlgendada pingena, soojusvoogu voolutugevusena ning $(2 - \varepsilon)/(\sigma\varepsilon)$ takistuse-
na. Viimane ei sõltu seinte vahekaugusest. Paigutades sise- ja välisseina vahele N ekraani, on tegemist $N + 1$ ühesuguse takisti järjestikühendusega. Järelikult soojusvoog kahaneb $N + 1$ korda.

L362 Ahi ★★★★★

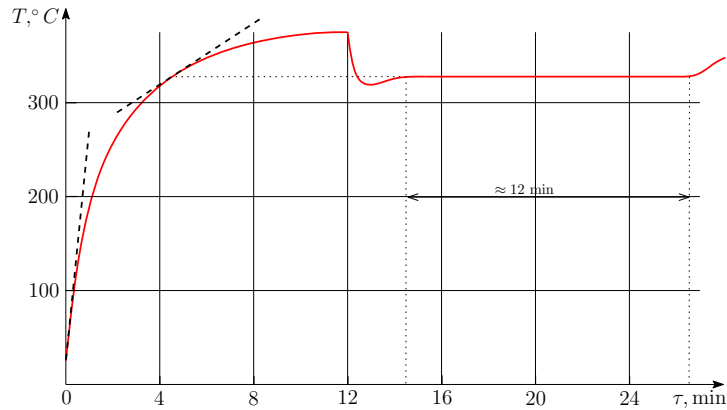
Autor: Stanislav Zavjalov, lõppvoor, 2012, G 7

On teada, et hetkeline efektiivne soojusvõimsus on võrdeline temperatuuri ja aja graafiku puutuja tõusuga (ja võrdelisuskonstandiks on ahju soojusmahtuvus). Kuna esialgu on ahi toatemperatuuri juures, soojuskadusid esimestel hetketel peaaegu ei esine ja tiigli soojusvõimsusele $P_0 = 50 \text{ W}$ vastab puutuja tõus $\approx 250 \frac{^\circ\text{C}}{\text{min}}$ (vt. joonist). On aga selge, et pika aja möödumisel tuleb soojuskadudega arvestada – see ongi põhjus, miks ahju temperatuuri kasv kahaneb. Kui ahju sisse pannakse plii, langeb temperatuur kuni plii sulamistemperatuurini, $\approx 327^\circ\text{C}$ – ahju kogu efektiivne võimsus kulub plii sulatamiseks (sest selle enda temperatuur ei muutu). Graafiku vasakult poolt leiame, et temperatuuri $\approx 327^\circ\text{C}$ juures puutuja tõusuks oli $\approx 45 \frac{^\circ\text{C}}{\text{min}}$, seega selle temperatuuri juures efektiivne võimsus on

$$\frac{45}{250} P_0 \approx 0,18 P_0.$$

Sellise võimsuse juures kuulub massi m plii sulatamiseks $\Delta\tau \approx 12 \text{ min}$ aega (mille leiame graafikult). Seega, $0,18 P_0 \Delta\tau = \lambda m$, kust

$$\lambda = \frac{0,18 P_0 \Delta\tau}{m} = \frac{0,18 \cdot 50 \text{ W} \cdot 12 \cdot 60 \text{ s}}{0,265 \text{ kg}} = 24,5 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}.$$



L363 Gaasiküte ★★★★★

Autor: Ardi Loot, piirkonnavor, 2017, G 10

Telk peab olema soojuslikus ja niiskuslikus tasakaalus. Telk kaotab sooja läbi telgi seinte soojusjuhtivuse tõttu:

$$P_s = SU\Delta T \approx 7,54 \text{ kW},$$

kus $S = 2\pi R^2 \approx 100,5 \text{ m}^2$ ja $\Delta T = T_1 - T_0 = 25^\circ\text{C}$, ning telgi ventileerimise tõttu:

$$P_v = Q\rho_0 c_0 \Delta T \approx Q \cdot (30,0 \text{ kW} \cdot \text{s/m}^3).$$

Soojusliku tasakaalu korral

$$P_p = P_s + P_v \approx 7,54 \text{ kW} + (Q \cdot 30,0 \text{ kW} \cdot \text{s/m}^3). \quad (1)$$

Niiskusliku tasakaalu jaoks peab ventileerimine telgist välja viima samapalju niiskust kui gaasi põletamisel tekib. Sooja õhu väljaviskel viiakse ajaühikus telgist välja niiskust $\Gamma_v = QG_1\eta_1 \approx Q \cdot (10,2 \text{ g/m}^3)$ ning külma õhu sissevooluga siseneb telki ajaühikus $\Gamma_s = QG_0\eta_0 \approx Q \cdot (1,15 \text{ g/m}^3)$ niiskust. Võimsusega P_p gaasiküte eraldab ajaühikus $\Gamma_p = D \cdot P_p/k \approx P_p \cdot (10^{-5} \cdot 5,63 \text{ kg}/(\text{kW} \cdot \text{s}))$ niiskust. Tasakaalu korral

$$\Gamma_p = \Gamma_v - \Gamma_s$$

ehk

$$P_p \cdot (10^{-5} \cdot 5,63 \text{ kg}/(\text{kW} \cdot \text{s})) \approx Q \cdot (9,09 \text{ g/m}^3). \quad (2)$$

Lahendades tasakaaluvõrranditest (1) ja (2) tekkinud süsteemi saame

$$Q = \frac{SU\Delta T}{\gamma K/D - \rho c_0 \Delta T} \approx 206 \text{ m}^3/\text{h}$$

$$P_p = \frac{Q\gamma k}{D} \approx 9,26 \text{ kW}$$

$$\gamma = G_1\eta_1 - G_0\eta_0 \approx 9,09 \text{ g/m}^3.$$

Ventileerimisele kulub $P_v/P_p \approx 18,6\%$ küttevõimsusest ja telgis vahetub õhk $Q/V \approx 1,54$ korda tunnis ($V = \frac{2}{3}\pi R^3$).

L364 Pooljuht ★★★★★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2008, G 10

Kütteelemendi takistus on

$$R = \frac{\rho L}{S} = \frac{L}{\sigma S},$$

kus ρ on eritakistus, L elemendi pikkus, S elemendi ristlõikepindala ja σ erijuhtivus. Elemendil eralduv võimsus on

$$N = \frac{U^2}{R} = \frac{S}{L} U^2 \sigma.$$

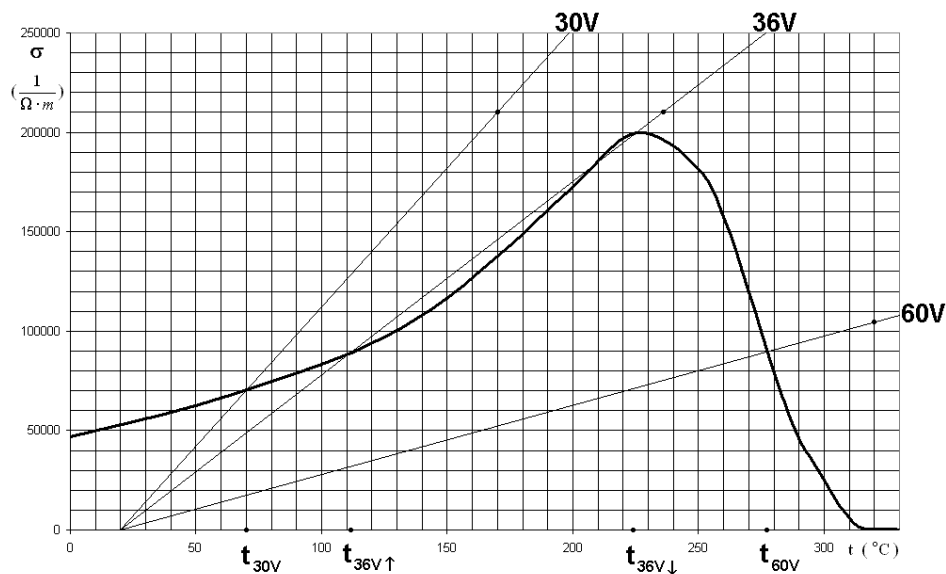
Võimsus, millega keha annab soojust ümbritsevale keskkonnale, on võrdeline temperatuuride vahega ja tasakaalulise temperatuuri puhul peab võrduma kehal eralduva võimsusega. Seega

$$N = k \Delta t = \frac{S}{L} U^2 \sigma.$$

Siit näeme, et

$$\frac{\sigma}{\Delta t} \cdot U^2 = k \frac{L}{S} = \text{Const}, \quad (1)$$

kus aga $\frac{\sigma}{\Delta t}$ on sirge tõus erijuhtivuse graafikul, kus algpunktiks on $t_v = 20^\circ\text{C}$ ja $\sigma = 0$.



Algtingimusi silmas pidades on pinge $U_0 = 30\text{ V}$ juures see tõus $\left(\frac{\sigma}{\Delta t}\right)_{30} = \frac{7}{5}$ ning arvestades valemit (1) saame

$$\left(\frac{\sigma}{\Delta t}\right)_{30} \cdot U_0^2 = \left(\frac{\sigma}{\Delta t}\right)_{60} \cdot U_1^2 = \left(\frac{\sigma}{\Delta t}\right)_{36} \cdot U_2^2.$$

Siit

$$\left(\frac{\sigma}{\Delta t}\right)_{60} = \frac{U_0^2}{U_1^2} \left(\frac{\sigma}{\Delta t}\right)_{30} = \frac{7}{20},$$
$$\left(\frac{\sigma}{\Delta t}\right)_{36} = \frac{U_0^2}{U_2^2} \left(\frac{\sigma}{\Delta t}\right)_{30} = \frac{35}{36}.$$

Kanname vastavad sirged (alguspunktiga $t = 20^\circ\text{C}$ ja $\sigma = 0$) graafikule ja loeme vastavad tasakaalulised temperatuurid.

Saame $U_1 = 60\text{ V}$ puhul $t_1 = 277^\circ\text{C}$.

Tekib huvitav nähtus, et tänu mittelineaarsusele on $U_2 = 36\text{ V}$ puhul pinge tõstmisel ja langetamisel tasakaalulised temperatuurid erinevad, vastavalt pinge tõusul $t_2 = 112^\circ\text{C}$ ja langetamisel $t'_2 = 224^\circ\text{C}$.

Paneme tähele, 36 V puhul on graafikult loetavaid lahendeid justkui kolm, aga keskmine lahend 207°C on ebastabiilne. Nimelt olukorras, kus küttekeha on sellel temperatuuril, viib väikene küttekeha temperatuuri tõus võimsuse suurenemiseni ja langus vastavalt võimsuse vähenemiseni, ja seega temperatuur kas kasvab temperatuurini 224°C või langeb temperatuurini 112°C .

L365 Must kuup ★★★★★

Autor: Mihkel Pajusalu, lahtine, 2014, G 9

Ülesandes esitatud tingimuste kohaselt on see kuup musta keha kiirgur ja see neelab kõik sellele langenud kiirguse. Olenemata asendist on kuubi poolt kiiratud koguvõimsus sõltuv ainult kuubi temperatuurist ja selle küljetahu pindalast A . Kuubil on teatavasti 6 tahku. Seega on kuubi kiiratud koguvõimsus Stefani-Boltzmanni seaduse järgi

$$P = 6A\sigma T^4.$$

Tasakaaluolukorras on kuubi poolt neelatud võimsus ja kiiratud võimsus võrdsed. Kuubi poolt neelatud võimsus on võrdeline kuubi projektsiooniga valguskiirtega risti olevale tasandile. Selle projektsiooni suurus sõltub kuubi asendist valguskiirte suhtes. Olgu α tegur, mis näitab kui palju on kuubi projektsioon suurem selle küljepindalast. Sellel juhul saame tasakaaluolukorra

$$6A\sigma T^4 = \alpha AI,$$

millest saame tasakaalulise temperatuuri sõltuvuse kuubi asendist.

$$T(\alpha) = \sqrt[4]{\frac{\alpha I}{6\sigma}}.$$

Nüüd tuleb leida kõrgeim ja madalaim temperatuur. Selleks on vaja leida suurim ja vähim α . Vaadates kuubi geometriat, on üsnagi lihtne järeldada, et minimaalne võimalik α on 1. See vastab olukorrale, kus kuubi üks külg on valgusvooga risti.

$$T_{\min} = \sqrt[4]{\frac{I}{6\sigma}}.$$

Maksimaalse juhu leidmine on aga keerukam. Selleks leidub geomeetrilisi meetodeid, kuid üks lihtsaim meetod on kasutada teadmist, et pinnaühiku projektsioon

pinnale on võrdeline selle pinnanormaali \vec{n} ja valgusvoo suuna $\vec{i} = \vec{I}/I$ vahelise nurga koosinusega. Ühikvektorite korral

$$A_{\text{projektsioon}} = A\vec{n} \cdot \vec{i} \Rightarrow \alpha = \Sigma\vec{n} \cdot \vec{i}.$$

Kuubil saavad olla valgusvoo suunas kõige rohkem kolm tahku korraga. Tähistame need kui x , y ja z ning nende pinnanormaalid kui \vec{n}_x , \vec{n}_y ja \vec{n}_z . Seega

$$\alpha = (\vec{n}_x + \vec{n}_y + \vec{n}_z) \cdot \vec{i}.$$

Kui me defineerime taustsüsteemi, kus kuubi küljed on risti vastavate telgedega, siis lihtsustub antud valem \vec{i} komponentide summaks

$$\alpha = i_x + i_y + i_z.$$

Kuna \vec{i} on ühikvektor, siis

$$i_x^2 + i_y^2 + i_z^2 = 1.$$

On näha, et α on maksimaalne kui kuubi diagonaal on suunatud valgusvoo suunas ehk kõikide külgede komponendid on võrdsed. Seega

$$\begin{aligned} \alpha_{\max} &= 3i_x \\ 3i_x^2 &= 1 \end{aligned} \Rightarrow \alpha_{\max} = \sqrt{3}.$$

Järelikult

$$T_{\max} = \sqrt[4]{\frac{\sqrt{3}I}{6\sigma}}.$$

ehk temperatuur varieerub $\sqrt[3]{3} \approx 1,15$ korda.

L366 Kontraktsioon ★

Autor: EFO žürii, piirkonnavor, 2018, G 1

Tähistame võetud vee massi m_v ning piirituse massi m_p . Teades, piirituse massiprotsenti $p = 44,1\%$, saame leida vee ja piirituse masside suhte.

$$\frac{m_p}{m_p + m_v} = 0,441 \Rightarrow m_p = 0,789m_v.$$

Teades lahuse kontraktsiooni $\gamma = 6\%$, saame kirjutada seose

$$(V_v + V_p)0,94 = V.$$

Avaldades vee ja piirituse ruumalad massi ja tiheduse kaudu, saame

$$\frac{m_v}{\rho_v} + \frac{m_p}{\rho_p} = 1,064V.$$

Masside suhtest saime, et $m_p = 0,789m_v$. Asendades selle eelmisesse võrrandisse, saame leida vee ja piirituse massid.

$$\frac{m_v}{1 \text{ kg/dm}^3} + \frac{0,789m_v}{0,79 \text{ kg/dm}^3} = 1,064 \cdot 1 \text{ dm}^3 \Rightarrow m_v = 532 \text{ g},$$

$$m_p = 0,789m_v = 420 \text{ g.}$$

Vee ja piirituse ruumalad on seega

$$V_v = \frac{m_v}{\rho_v} = 532 \text{ cm}^3,$$

$$V_p = \frac{m_p}{\rho_p} = 532 \text{ cm}^3.$$

L367 Tunnel ★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2008, G 3

Loeme õhu kokkusurumatuks. Sellisel juhul rongi ja tunneli seinavahele juurde voolanud õhu ruumala võrdub rongi eest välja surutud õhu ruumalaga:

$$(b^2 - a^2) u' = a^2 v,$$

kus u' on õhu kiirus tunneli suhtes. Seega otsitav kiirus on

$$u = v + u' = v \left(1 + \frac{a^2}{b^2 - a^2} \right) = \frac{vb^2}{b^2 - a^2} = 90 \text{ km/h.}$$

Tegelikult on kiirus veidi väiksem, sest rongi ees surutakse õhk mingil määral kokku ja rongi ees ning taga tekib teatud õhuvool.

L368 Mobiililaadija ★★

Autor: Mihkel Kree, piirkonnavaor, 2014, G 4

Leiame ühel sammul saadava energia, arvestades et kannale toetub jõud $F = mg$. Vajudes kõrguse h võrra, tehakse tööd $A_1 = mgh$, millest aku laadimiseks saadav elektrienergia on $W_1 = \eta A_1$. Aku täislaadimiseks vajaliku energia leiame keskmise võimsuse $P = UI_k$ ja aja T korrutisena $W = UI_k T$, mille kogumiseks vajalik sammude arv on

$$N = \frac{W}{W_1} = \frac{3.7 \cdot 0.13 \cdot 10 \cdot 3600}{0.2 \cdot 60 \cdot 9.8 \cdot 0.005} \approx 29400.$$

Laadimiseks vajaliku jalutuskäigu pikkuseks saame

$$s = Nd = 44 \text{ km.}$$

L369 Laser ★★

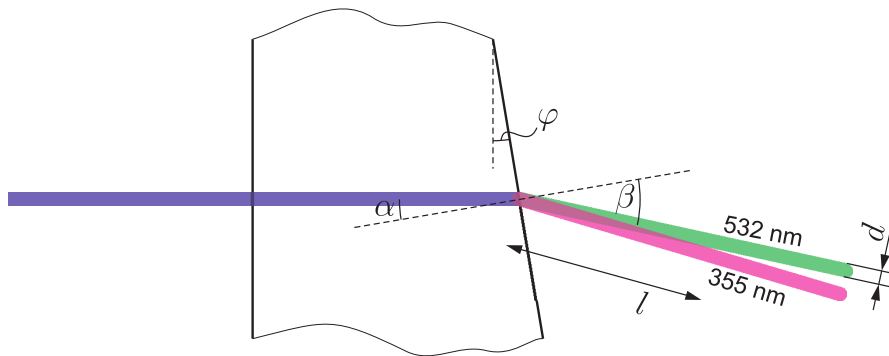
Autor: Valter Kiisk, lõppvoor, 2017, G 3

Eri värvi komponendid on täielikult eraldunud juhul, kui plaadist väljuvate laserkiirte tsentrite vaheline kaugus distant sil l saab võrdseks kiire diameetriga (vt joonis). Vastavalt ülesande andmetele on kõik nurgad väikesed, nii et murdumisegauses $n_\alpha \sin \alpha = n_\beta \sin \beta$ võib võtta $\sin \alpha \approx \alpha$ ja $\sin \beta \approx \beta$ (kus α ja β mõõdetakse radiaanides). Järelikult seos nurkade vahel muutub lineaarseks: $n_\alpha \alpha \approx n_\beta \beta$. Tänu sellele ei oleks ka lõppvastuse leidmise seisukohalt oluline valguse täpne langemisnurk klaasplaadile (tingimusel, et see nurk on $\ll 1$). Antud ülesande juhul langeb valgus esimesele pinnale risti. Sel juhul langemisnurk teisele pinnale (α) on võrdne nurgaga φ ja murdumisnurk vastavalt $\beta = n\alpha = n\varphi$, kus n on klaasi murdumisnäitaja. Komponentide suundade erinevus on vastavalt $\Delta\beta = \Delta n\varphi = (n_1 - n_2)\varphi$. Kuna nurk $\Delta\beta$ on väike, siis kiirte tsentrite vaheline kaugus on $\Delta\beta l$, kui nad on kaugusel l plaadi teisest pinnast. Et nad oleks täielikult eraldunud, peab kehtima

$$l\Delta\beta = l(n_1 - n_2)\varphi = d,$$

kust saame

$$l = \frac{d}{(n_1 - n_2)\varphi} = 1,4 \text{ m.}$$



L370 Kuu ★★

Autor: Urmo Visk, lõppvoor, 2006, G 5

Olgu valgustatus (valgusvoog pinnauhiku kohta) päeval I_1 ja öösel I_2 . Kuna säriaeg ja valgustatus on pöördvõrdelised, siis kehtib seos

$$t_1/t_2 = I_2/I_1.$$

Öösel valgustab Maad Kuult peegeldunud valgus. Kuna eeldati, et Kuu ja Maa on Päikesest võrdsel kaugusel, siis on valgustatus Kuul ka I_1 . Kui Kuu pind oleks Maad ja Kuud (ning ühtlasi Päikest) ühendava teljega risti, siis oleks Kuu poolt tagasi (Maa poole) suunatud valgusvoo tihedus $I_k = kI_1$, kus k on Kuu pinna keskmine peegeldustegur (albeedo). Kuu näiv keskpunkt seda ka on, aga servad mitte. Ometigi, visuaalne kogemus ütleb, et Kuu ketas näib kõikjal enam-vähem ühe heledune. Hinnanguliselt asendagem mõtteliselt Kuu "pannkoogiga", st kettaga, mille raadius on võrdne Kuu raadiusega.

Kuu pinnalt peegeldub Päikeselt sumaarne valgusvoog $E = I_1 \pi r^2 k$ ning see jaotub ühtlaselt mõttelise poolsfääri peale, mille keskpunktis asub Kuu ja pinna peal Maa. Seega jõuab Maale valgusvoog

$$I_2 = \frac{E}{2\pi R^2} = I_1 \frac{r^2 k}{2R^2}.$$

Seega

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{t_1}{t_2} = \frac{r^2 k}{2R^2},$$

ehk

$$k = \frac{t_1}{t_2} \frac{2R^2}{r^2} \approx 8\%.$$

L371 Pindpinevus ★★

Autor: Koit Timpmann, lahtine, 2011, G 2

Vaatleme jõudude tasakaalu kummaski torus: reservuaari veetasemest ülespoole jääva vee kaalu $\rho g h S$ tasakaalustab kapillaarjõud $\sigma p \cos \alpha$, kus p on vee ja klaasi kontaktjoone kogupikkus, h – veetaseme kõrgus kapillaaris, S – toru ristlõikepindala ja α – nurk veepinna puutuja ja klaasi pinna vahel, mis sõltub märgamise määrast, kuid on mõlema toru jaoks sama (õigeks loetakse ka lahendused, kus eeldades täielikku märgamist jäetakse tegur $\cos \alpha$ ära). Niisiis $h = \sigma p \cos \alpha / \rho g S$. Suure toru jaoks $p_2 = 2\pi(r_2 + r_1)$ ja $S_2 = \pi(r_2^2 - r_1^2)$; väikse toru jaoks $p_1 = 2\pi r_1$ ja $S_1 = \pi r_1^2$. Seosest $h_1 = h_2$ saame $p_2/p_1 = S_2/S_1$, millest ülaltoodud avaldiste asendamise teel omakorda saame $1 + r_2/r_1 = (r_2/r_1)^2 - 1$. Viimane seos kujutab endast suhte $x = r_2/r_1$ jaoks ruutvõrrandit $x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ (negatiivne lahend ei oma füüsikalist tähendust). Niisiis $r_1 = 2r_2$.

L372 Smurf solaariumis ★★

Autor: Ants Remm, lahtine, 2011, G 4

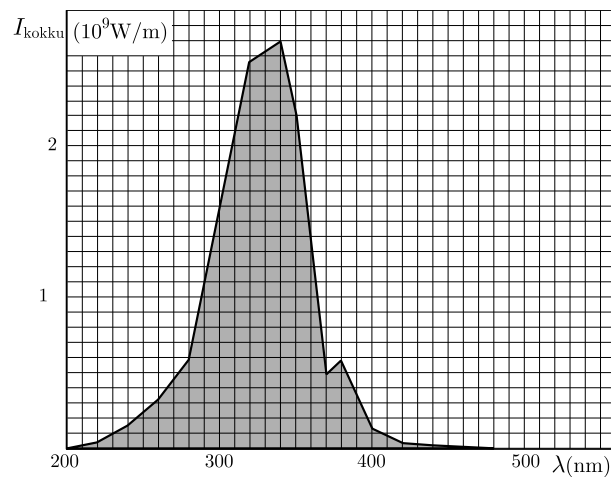
Kuna kogu Smurfile langenud valgusest I neeldub Smurfil vaid $I \cdot \varepsilon$, kujutab $I \cdot \varepsilon$ graafik Smurfil neeldunud valguse intensiivsust lainepikkuse kohta sõltuvalt lainepikkusest. Konstrueerime nimetatud graafiku. Selleks loeme jooniselt erinevate λ väärtustele vastavad I ja ε väärtused ning arvutame nende korrutised, vt tabelit. Tabeli põhjal konstrueeritud joonise ning loeme graafiku alla jäänud pindala, mis on võrdne Smurfil neeldunud valguse intensiivsusega

$$I_{\text{kokku}} = \left(162 + \frac{74}{2}\right) \cdot 1 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} = 199 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}.$$

Kuna kiirguse intensiivsus näitab võimsust pindalaühiku kohta, saab Smurf kokku soojushulga

$$Q = I_{\text{kokku}} S t = 199 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cdot 0,1 \text{ m}^2 \cdot 10 \text{ min} \cdot 60 \frac{\text{s}}{\text{min}} \approx 12 \text{ kJ}.$$

λ (nm)	200	220	240	260	280	300	320	340	350
I ($10^9 \cdot \frac{W}{m^3}$)	0,00	0,05	0,24	0,45	0,85	2,25	3,75	4,35	4,25
ε	0,46	0,54	0,62	0,68	0,70	0,70	0,68	0,62	0,53
$I \cdot \varepsilon$ ($10^9 \cdot \frac{W}{m^3}$)	0,00	0,03	0,15	0,31	0,60	1,58	2,55	2,70	2,25
λ (nm)	360	370	380	400	420	440	460	480	
I ($10^9 \cdot \frac{W}{m^3}$)	3,25	2,00	2,70	0,85	0,20	0,10	0,05	0,00	
ε	0,37	0,25	0,22	0,18	0,18	0,20	0,23	0,33	
$I \cdot \varepsilon$ ($10^9 \cdot \frac{W}{m^3}$)	1,20	0,50	0,59	0,15	0,04	0,02	0,01	0,00	



L373 Valgustid ★★

Autor: Valter Kiisk, piirkonnavor, 2016, G 7

Kirjeldatud eeldustel luminesentsstoru (ja nendest moodustatud rivi) võib vaadelda lõpmata pika joonvalgusallikana, mille valgusvoog jaotub ühtlaselt silindripinnale, mille pindala on võrdeline silindri raadiusega. Kuna kogu energia jaguneb silindri pinna peale, siis valgustatus on pöördvõrdeline kaugusega, $L \propto 1/r$. Et kaugusel $r = 0,15$ m oleks valgustatus $L = 8400$ lx, peab valgustatuse valem olema $L = 8400 \text{ lx} \times \frac{0,15 \text{ m}}{r}$. Järelikult luminesentslampide abil saadakse valgustatuseks töölalal

$$8400 \text{ lx} \times \frac{0,15 \text{ m}}{1,8 \text{ m}} \approx 700 \text{ lx}.$$

Seevastu LED-lamp on pigem punktvalgusallikas, mille valgusvoog jaotub sfääri pinnale, mille pindala on ruutsõltuvuses sfääri raadiusest. Seega $L \propto 1/r^2$ ja et kaugusel $r = 0,3$ m oleks valgustatus $L = 1500$ lx, peab kehtima $L = 1500 \text{ lx} \times \left(\frac{0,3 \text{ m}}{r}\right)^2$. Töölalal kaugusel $r = 0,4$ m lambist on valgustatus

$$2600 \text{ lx} \times \left(\frac{0,3 \text{ m}}{0,4 \text{ m}}\right)^2 \approx 1500 \text{ lx}.$$

L374 Maja ★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2008, G 4

Maja teatud punkt P ja tema peegelkujutis mere pinnalt P' paiknevad sümmeetriliselt mere tasandiga. Vaatleme mõttelist sirget PP' . Tema löikepunkt merega O paikneb mõlemast otsast võrdsel kaugusel ning tänu sellele saame me jooniselt punkti O kergelt määrata kui lõigu PP' keskpunkti. Maja kõrgus merepinnalt vastab vundamendi kaugusele punktist O , vt joonist. Mõõtes jooniselt akende vahekauguse $|AB| = 9,5 \text{ mm}$ ja $|OQ| = 58,5 \text{ mm}$ saame

$$H = 3 \text{ m} \cdot \frac{|OQ|}{|AB|} = 18,5 \text{ m}.$$



3

415

L375 Tiik ★★★

Autor: Taavi Pungas, lõppvoor, 2013, G 6

Mõõdame jooniselt ringide läbimõõdud, saame 0,1; 0,4; 0,9; 1,6; 2,5; 3,5 ja 4,5 ühikut L -i. Näeme, et alguses on liikumine ühtlaselt kiirenev ehk kehtib $\lambda \ll h$ seos

$$r \approx \frac{gt^2}{2\pi}.$$

Sellest saame arvutada esimestele ringidele vastavad ajahetked valemiga $t = \sqrt{2\pi r/g}$:

$$\sqrt{\frac{\pi L}{10g}}, 2\sqrt{\frac{\pi L}{10g}}, 3\sqrt{\frac{\pi L}{10g}}, 4\sqrt{\frac{\pi L}{10g}}, 5\sqrt{\frac{\pi L}{10g}}.$$

Näeme, et joonise tegemiseks kasutatud ajavahemik oli

$$T = \sqrt{\frac{\pi L}{10g}}.$$

Hiljem on liikumine ühtlane, kiirusega

$$v = \frac{L}{T} = \sqrt{\frac{10Lg}{\pi}}.$$

Teisalt teame, et $v \approx \sqrt{hg}$, seega tiigi sügavus on

$$h \approx \frac{v^2}{g} = \frac{10L}{\pi},$$

ehk

$$h/L = \frac{10}{\pi} \approx 3,2.$$

L376 Radoon ★★★

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2016, G 5

Iga lagunev uraani tuum jõuab oma lagunemisahelas radoonini. Tasakaalulisel juhul tähendab see, et ajaühikus lagunevate uraani tuumade arv on võrdne ka nii ajaühikus tekkivate kui ka lagunevate radooni tuumade arvuga. Niisiis, ajaühikus lagunevate radooni tuumade arv $\Delta N_R/\Delta t$ on määratud uraani tuumade koguarvu N_U ja uraani poolestusaja τ kaudu kujul

$$\frac{\Delta N_R}{\Delta t} = \frac{N_U \ln 2}{\tau}.$$

Uraani tuumade arvu saame selle kogumassi $m_U = \frac{0,3}{10^3}m$ ja ühe aatomi massi $m_1 = 238 \cdot u$ suhtena:

$$N_U = \frac{m_U}{m_1} = 1,26 \cdot 10^{-6} \frac{m}{u}.$$

Et radooni aktiivsus (lagunemiste arv ruumalaühikus ajaühiku kohta) ruumis peab piirjuhul rahuldama tingimust

$$\frac{\Delta N_R}{\Delta t} = 200 \cdot V,$$

saame kivimitüki ohutu massi ülempiiriks

$$m = \frac{200 \cdot Vu\tau}{1,26 \cdot 10^{-6} \ln 2} = 1,4 \text{ kg}.$$

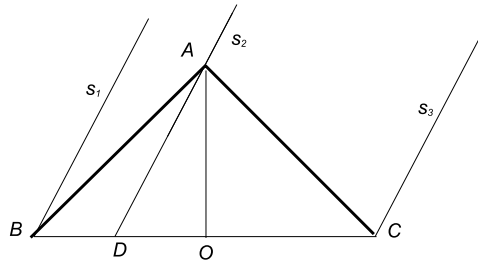
L377 Vihmasadu ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, piirkonnavoore, 2012, G 7

Tähistame katuse vertikaallõikel harja tähega A , räästad tähtedega B ja C ning lõigu BC keskpunti tähega O . Tähistame sümbolitega s_1 , s_2 ja s_3 selliste piiskade trajektooreid, mis tabavad vastavalt põhjaräästast punktis B , harja punktis A ning lõunaräästast punktis C . Sirgete s_1 ja s_2 vahelisse ribasse jäävad piisad tabavad põhjakatust ning sirgete s_2 ja s_3 vahelisse ribasse jäävad piisad tabavad lõunakatust. Seega on veehulkade suhe võrdne ribade laiuste suhtega, mis omakorda on võrdne lõikude BD ja CD pikkuste suhtega, kus D on sirge s_2 lõikepunkt lõiguga BC . Seetõttu $|BD| = \frac{1}{3}|BC|$ ning järelikult

$$|DO| = |BO| - |BD| = \frac{1}{6}|BC|.$$

Paneme tähele, et vihmapiiskade kiirusvektori horisontaal- ja vertikaalkomponentide suhe on võrdne lõikude DO ja $OA = \frac{1}{2}BC$ pikkuste suhtega; et $\frac{|AO|}{|DO|} = 3$, siis piiskade langemise kiirus on $3u = 18 \text{ m/s}$.

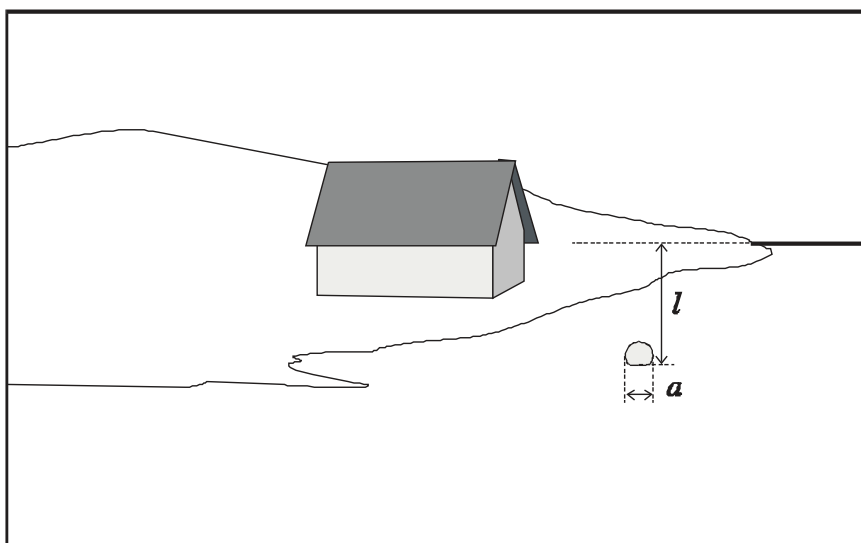


L378 Maja ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2008, G 9

Joonise põhjal võib oletada, et poi on märksa lähemal horisondist (ca 5 km), seega võib Maa kumerust mitte arvestada. Asetame mõtteliselt kahe-meetrise teiba poi kõrvale. Fotoaparaati ja teiba ülemist otsaühendav joon on horisontaalne ja seega läbib horisonti, mis tähendab, et teiba ots puudutab joonisel näha oleva horison-dilõigu pikendust. Poi diameetri d leiame mõõtes joonisel pikkused a ja l :

$$d = 2 \text{ m} \cdot \frac{a}{l} = 45 \text{ cm}.$$

**L379 Lööklaine ★★★★★**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2015, G 6

Läheme üle lööklainega seotud taustsüsteemi, milles osake läheneb lööklainele kiirusega w . Energia jäävusest saame, et juhul kui osake läbib lööklainet, siis

$$mw^2/2 = qU_0 + mu^2/2,$$

kus u on osakese kiirus pärast lööklainega kohtumist. Sellest saame

$$u = \sqrt{w^2 - 2qU_0/m}.$$

Tagasi laboratoorsesse süsteemi minnes saame kiiruseks

$$v = u - w = \sqrt{w^2 - 2qU_0/m} - w,$$

mis kehtib, kui $mw^2 > 2qU_0$. Vastasel juhul peegeldub osake lööklainelt ning $u = -w$ ja $v = -2w$.

L380 Õhupalli vari ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2013, G 10

Et Päikese nurksuurus on väike, siis maapinna lähedal võime lugeda varjukoonusid silindriteks: joonisel tähendab see, et loeme AH paralleelseks DG -ga, CF -ga ja BE -ga. Paneme tähele, et $|AD| = 2,5$ m, sest kaldu langevate kiirte puhul on kera varju laius (väiksem mõõde) maapinnal võrdne varjukoonusse läbimõõduga. See tähendab, et CB pikkus on $0,5$ m ja AB pikkus on $\frac{2,5-0,5}{2}$ m = 1 m. Et palli läbimõõt on võrdne AC -ga, siis $|KL| = 1 + 0,5$ m = $1,5$ m. Nurk $\angle KJL$ moodustab sirgelnurgast murdosa $0,5/180 = 1/360$, mis tähendab, et lõik KL moodustab punkti J ümber tõmmatud poolringjoonest raadiusega $R = |JK|$ samasuguse murdosa; selle kaare pikkus on πR , st $|KL| = \pi R/360$, millest

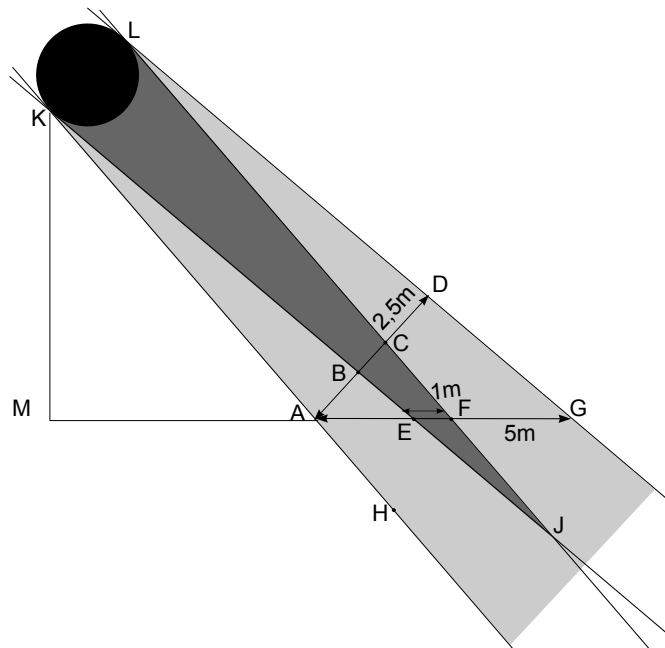
$$R = 360|KL|/\pi \approx 172 \text{ m.}$$

Sarnastest kolmnurkadest JKL ja JBC leiame, et

$$|BK| = |JK| \frac{|KL| - |BC|}{|KL|} \approx 114 \text{ m.}$$

Ligikaudu sarnastest kolmnurkadest KAM ja ADG leiame, et

$$|KM| \approx |KA| \frac{|DA|}{|AG|} \approx 57 \text{ m.}$$



L381 Vedelik ★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2005, G 1

Kuna anumad on ühendatud ning vedelikes antakse rõhk igas suunas võrdselt edasi, on mõlemas anumal rõhud samal kõrgusel võrdsed. Järelikult võib antud anumaid vaadelda ühe anumana, mille pindala on

$$S = \pi \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \pi \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = \frac{\pi (d_1^2 + d_2^2)}{4}.$$

Väljasurutud vedeliku mass on võrdne lisatava ujuva keha massiga. Seega on lisanduva vedeliku ruumala $\Delta V = m/\rho$ ning kõrguse muut avaldub kui

$$\Delta h = \frac{\Delta V}{S} = \frac{4m}{\pi \rho (d_1^2 + d_2^2)}.$$

L382 Tünn ★

Autor: Koit Timpmann, piirkonnavoore, 2012, G 3

Tühja tünni korral kehtib seos

$$mg = \frac{1}{10} \rho_v V g.$$

Vedelikku täis tünni korral kehtib seos

$$(m + \rho V)g = \frac{9}{10} \rho_v V g.$$

Taandades ruumala V ja g , saame

$$\frac{1}{10} \rho_v + \rho = \frac{9}{10} \rho_v,$$

millest

$$\rho = \frac{8}{10} \rho_v = 800 \text{ kg/m}^3.$$

L383 Auk tünnis ★★

Autor: Hans Daniel Kaimre, lõppvoore, 2018, G 2

Veepiiril olevat vett saame vaadelda kui vedelikku vett kõrgusel h , mille kiirus on null ning kus rõhk peab olema võrdne õhurõhuga. Tünni põhjast väljuv juga ava juures on h võrra madalamal, rõhk peab samamoodi olema võrdne õhurõhuga, kuid juga liigub kiirusega v . Bernoulli seadusest saame kirja panna, et $\rho gh = \rho v^2/2$, kust saame et $v^2 = 2gh$. Alternatiivselt saame kirja panna energia jäävuse seaduse väikese veekoguse Δm jaoks, mille kaugus anuma põhjast on h : $gh\Delta m = \Delta m \frac{v^2}{2}$, kus oleme arvestanud, et vedeliku ülemisel piiril on vee voolamiskiirus praktiliselt 0, ning et energiakadudega ei arvesta.

Väljuvas joas peab vooluhulk ajaühikus olema sama, mis tähendab, et kehtib $A_1 v_1 = A_2 v_2$, kus A ja v on vastavalt joa ristlõikepindala ja kiirus. Kuna $A = \pi d^2/4$, saame seose ümber kirjutada kujule $v_2 = (d_1^2/d_2^2)v_1$. Raskuskiirendusega liikuva keha läbitud teepikkus alg- ja lõppkiiruste kaudu avaldub kui:

$$l = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} \Rightarrow l = \frac{\frac{d_1^4}{d_2^4}v_1^2 - v_1^2}{2g} \Rightarrow v_1^2 = \frac{2gl}{\frac{d_1^4}{d_2^4} - 1}.$$

Vaatleme juhtu, kus $v_1 = v$ on kiirus kohe ava juures. Sel juhul saame kaks avaldist v^2 jaoks võrduma panna:

$$2gh = \frac{2gl}{\frac{d_1^4}{d_2^4} - 1} \Rightarrow h = \frac{l}{\frac{d_1^4}{d_2^4} - 1}.$$

Veejoa läbimõõdu ava juures leiame graafikult punktist $l = 0$, teise punkti valime ise suvaliselt: Valides selleks $(28, 1,79)$, saame vastuseks $h = 28/(2^4/1,79^4 - 1) = 50$ cm.

L384 Veetoru ★★

Autor: Taavi Pungas, lõppvoor, 2011, G 4

Bernoulli seadusest saame seose

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + p_2.$$

Rõhu torudes leiame veesamba kõrguse järgi, $p_1 = p_0 + \rho g h_1$ ja $p_2 = p_0 + \rho g h_2$, kus p_0 on atmosfäärirõhk. Asendades p_1 ja p_2 esimeses seoses, saame vee kiiruse teises torus:

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2g(h_1 - h_2)}.$$

Et torud on ühendatud, peab läbi nende voolama sama aja jooksul sama kogus vett, $v_1 S_1 = v_2 S_2$. Kuna toru ristlõikepindala on $S = \pi d^2/4$, saame $v_1 d_1^2 = v_2 d_2^2$. Kokku,

$$\frac{d_1}{d_2} = \sqrt{\frac{v_2}{v_1}} = \left(1 + \frac{2g(h_1 - h_2)}{v_1^2}\right)^{1/4}.$$

L385 Ujuv kuup ★★

Autor: Koit Timpmann, lõppvoor, 2015, G 3

Vaatleme olukorda, kus kuup on sellesse sisenenud vee tõttu parajasti veepinna alla vajunud, sest siis hakkab kuubile mõjuma suurim üleslükkejõud. Piirjuhul on kuubile mõjuv üleslükkejõud ja raskusjõud tasakaalus ehk $F_r = F_y$. Olgu kuupi tunginud vee mass M , mis avaldub kuubis oleva vee kõrguse h kaudu kui $M = \rho a^2 h$. Jõudude tasakaalu põhjal

$$F_r = F_y \Rightarrow (m + \rho a^2 h)g = \rho g a^3,$$

seega

$$h = \frac{\rho a^3 - m}{\rho a^2} = a - \frac{m}{\rho a^2}.$$

Vesi ei tungi enam kuupi, kui õhu rõhk kuubis tasakaalustab vee rõhu ehk $p_0 + \rho g(a - h) = p_2$, kus p_2 on õhu rõhk kuubis. Saame

$$p_2 = p_0 + \rho g \left(a - a + \frac{m}{\rho a^2} \right) = p_0 + \frac{gm}{a^2}.$$

Õhu ruumala kuubis on

$$V_2 = a^3 - a^2 h = a^3 - a^2 \left(a - \frac{m}{\rho a^2} \right) = \frac{m}{\rho}.$$

Enne augu tekkimist oli rõhu ruumala $V = a^3$. Kuna õhu temperatuur ei muutu, siis $pV = p_2 V_2$ ning algne rõhk p kuubis oli

$$p = \frac{p_2 V_2}{V} = \frac{\left(p_0 + \frac{gm}{a^2} \right) \cdot \frac{m}{\rho}}{a^3} = \frac{m(p_0 a^2 + gm)}{a^5 \rho}.$$

L386 Pump ★★

Autor: Ardi Loot, piirkonnavor, 2018, G 4

a) Torus olevale veesambale mõjub raskusjõud F_r , takistusjõud F_h ja pumba poolt avaldatav jõud F_p . Ühtlase pumpamise korral kehtib jõudude tasakaal $F_r + F_h = F_p$. Raskusjõud on arvutatav leides torus oleva vee massi

$$F_r = mg = \rho S h g \approx 9,85 \text{ N},$$

kus toru ristlõikepindala $S = \pi d^2/4$. Hõõrdejõu, mis on tingitud vee liikumisest torus, leiame ülesande tekstis antud rõhulangu valemiga, kui korrutame selle toru ristlõikepindalaga.

$$F_h = \Delta p S = c_h Q^2 h S / d^5 \approx 9,59 \text{ N}.$$

Pumba võimsus on antud valemiga $P = F_p v / \eta$, kus $v = Q/S$ on vee liikumise kiirus torus. Jõudude tasakaalust saame

$$P = (F_r + F_h) \frac{Q}{S \eta} = \frac{Q h}{d^5 \eta} (\rho g d^5 + c_h Q^2) \approx 193 \text{ W}.$$

b) Kuna pump asub maapinnal, siis peab pump tekitama vee liigutamiseks alarõhu. Maksimaalne alarõhk on juhul, kui pump tekitab vaakumi. Sellisel piirjuhul surub õhurõhk veesammast ülespoole jõuga p_0S ja pumba töötamiseks peab see jõud olema vähemalt sama suur kui veesambale mõjuv raskusjõud $p_0S = \rho Sh_m g$. Maksimaalne kaevu sügavus on seega $h_m = p_0 / (\rho g) \approx 10,2$ m.

L387 Veekahur ★★★

Autor: Oleg Košik, piirkonnavor, 2005, G 7

Olgu veejoa kiirus kahurist väljudes v . Et märk ja kahur asuvad samal kõrgusel ning õhutakistus puudub, siis märgini jõuab veejuga samuti kiirusega v . Aja t jooksul väljub kahurist vesi massiga $m = \rho S v t$. Väljuva vee kineetiline energia on $E = mv^2/2$ ning asendades massi leiame

$$E = \frac{\rho S v^3 t}{2}.$$

Seega saame avaldada kahuri võimsuse

$$N = \frac{E}{t} = \frac{\rho S v^3}{2} \Rightarrow v = \sqrt[3]{\frac{2N}{\rho S}}.$$

Jõud, millega veejuga tabab märki, on määratud vee impulsiga:

$$F = \frac{mv}{t} \Rightarrow F = \frac{\rho S v^2 t}{t} = \rho S v^2.$$

Asendades v saame

$$F = \sqrt[3]{4N^2 \rho S} \approx 490 \text{ N}.$$

L388 Veetünn ★★★

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2005, G 5

Leiame esmalt veejoa väljumise kiiruse. Kiiruse avaldis on tuntud Torricelli seadusest, kuid selle leidmiseks võime arutleda nõnda: avast väljuv juga omab kineetilist energiat $mv^2/2$, teisalt peab see olema võrdne potentsiaalse energiaga, mis saadakse vee ülemiselt pinnalt kuni auguni langedes: $mg(1-x)h$. Seega väljumiskiirus avaldub kui

$$v = \sqrt{2g(1-x)h}.$$

Märkus. impulsi jäävusest saaksime (võrreldes tünni vasakule ja paremale seinale mõjuvate rõhumisjõudude vahe avaldist ning veejoa impulssi) tulemuse $v = \sqrt{g(1-x)h}$. See avaldis kehtib siis, kui vee liikumine tünnis pole laminaarne ning energia ei säili (läheb veekeeristesse). Laminaarse (energiakadudeta) voolu korral tuleks rõhumisjõudude vahe leidmisel arvestada Bernoulli seadusest tingitud rõhu muutust, mistõttu impulsi jäävusest tuletatud vastus ei kehti. Kuivõrd antud ülesandes on voolu laminaarsuse küsimus jäetud täpsustamata, siis on mõlemad meetodid korrektsed.

Et veejoal vertikaalset kiiruskomponenti esialgu pole, kulub langemiseks aeg

$$\tau = \sqrt{\frac{2(H + xh)}{g}}.$$

Selle ajaga liigub aga veejuga horisontaalsihis kaugusele $L = v\tau$ ehk:

$$L = 2\sqrt{(1-x)h(H+xh)},$$

mida aga ongi antud graafikul kujutatud.

Seega piisaks H ja h leidmiseks kahe joone punkti koordinaatide määramisest ning tekkiva võrrandisüsteemi lahendamisest. Et aga võimalikult lihtsalt tulemuseni jõuda, kasutame tähelepanekut, et $x = 0$ korral $L = 2\sqrt{hH}$. Võtame graafikult lugemi punktis $x = 0$ ning saame esimese võrrandi: $hH = 9 \text{ m}^2$.

Nagu öeldud, võib teise võrrandi saada suvalise punkti abil, kuid uurime natuke ekstreemumtingimust. Tähistame esmalt $\alpha = H/h$, L avaldub seega kui

$$L = 2h\sqrt{(1-x)(\alpha+x)}.$$

Kui võtame L -ist x -i järgi tuletise, näeme, et L omab ekstreemumväärtust $x = (1-\alpha)/2$ korral. Selle tulemiseni võib jõuda ka arutledes nõnda: $y = (1-x)(\alpha+x)$ kujutab endast allapoole suunatud parabooli nullkohtadega 1 ja $-\alpha$, ekstreemumväärtus on seega nende vahel ehk kohal $x = (1-\alpha)/2$. Asendame selle L -i avaldisse:

$$L = 2h\sqrt{\left(1 - \frac{1-\alpha}{2}\right)\left(\alpha + \frac{1-\alpha}{2}\right)} = 2h\frac{1+\alpha}{2} = h + H.$$

Seega saame teise võrrandi L -i maksimumväärtust kasutades:

$$H + h = 10 \text{ m}.$$

Nendest kahest lihtsast võrrandist tekkiva võrrandisüsteemi lahendamisel (viies need näiteks ruutvõrrandi kujule) leiame väärtused: $h = 9 \text{ m}$ ja $H = 1 \text{ m}$.

L389 Veejuga ★★★

Autor: Siim Ainsaar, piirkonnavor, 2006, G 9

Leidmaks purgi täitumise aega, on meil vaja teada veevoolu kiirust mingil kõrgusel. Olgu see kiirus kraanitoru otsa juures v_0 ning kaugusel h (seal, kus raadius on r_1) v_1 . Kuna vool kiireneb ühtlaselt, siis

$$v_1^2 - v_0^2 = 2gh.$$

Ajaga Δt läbib iga veejoa ristlõiget sama kogus vett, sest seda ei kao kuhugi ega tule ka juurde:

$$\pi r_0^2 v_0 \Delta t = \pi r_1^2 v_1 \Delta t.$$

Seega

$$v_1 = v_0 \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^2,$$

mille asetame avaldusse $v_1^2 - v_0^2 = 2gh$:

$$\begin{aligned} \left[v_0 \left(\frac{r_0}{r_1} \right)^2 \right]^2 - v_0^2 = 2gh &\Rightarrow v_0^2 \left[\left(\frac{r_0}{r_1} \right)^4 - 1 \right] = 2gh \Rightarrow \\ &\Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2gh}{(r_0/r_1)^4 - 1}} \end{aligned}$$

Ajaga t voolab purki veekogus, mille ruumala on

$$V = \pi r_0^2 v_0 t.$$

Avaldame viimasest võrrandist aja t :

$$t = \frac{V}{\pi r_0^2 v_0} = \frac{V}{\pi r_0^2} \sqrt{\frac{(r_0/r_1)^4 - 1}{2gh}} = \frac{V}{\pi \sqrt{2gh}} \sqrt{\frac{1}{r_1^4} - \frac{1}{r_0^4}} \approx 21 \text{ s.}$$

L390 Veepüstol ★★★

Autor: Valter Kiisk, lõppvoor, 2006, G 4

Kuna me ei arvesta dissipatiivseid effekte, siis peab kehtima mehaanilise energia jäävus. Liikugu kolb jõu F toimel kiirusega v_1 ja olgu vee kiirus suudmes v_2 . Kuna vee koguruumala ei muutu, siis $v_1 S_1 = v_2 S_2$. Ajavahemiku t vältel läbib kolb vahemaa $x = v_1 t$ tehes tööd $A = Fx$. Vaatame, milline on sellele liikumisele vastav vee summaarne kineetilise energia muut. Ühelt poolt kolvi eest "kaob ära" veehulk $m = S_1 x \rho$, mille kiirus oli v_1 , teiselt poolt ilmub suudmesse sama kogus vett liikudes kiirusega v_2 . Energia jäävus annab

$$A + \frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv_2^2}{2}$$

ehk peale asendamist ja v_1 elimineerimist

$$\frac{F}{S_1} + \frac{\rho v_2^2 S_2^2}{2 S_1^2} = \frac{\rho v_2^2}{2}.$$

Aga $d_2 \ll d_1$ ja $S \propto d^2$, seega ammugi $S_2^2 \ll S_1^2$ ning teise liikme vasakul pool võrdusmärki võib ära jätta. Avaldame v_2 :

$$v_2 = \frac{1}{d_1} \sqrt{\frac{8F}{\pi\rho}} \approx 22,6 \text{ m/s.}$$

Märkus. Ülesande oleks saanud lahendada ka kiiremat teed pidi lähtudes Bernoulli seadusest

$$p + \frac{\rho v^2}{2} = \text{Const},$$

mille me lahendamise käigus sisuliselt tuletasime.

L391 U-toru ★★★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2009, G 6

Olgu U-toru siseraadius r ja välisraadius $R = \sqrt{2}r$. Vaatleme eraldi U-toru kaa-
rekujulist osa. Aja Δt jooksul siseneb sinna kiirusega v veekogus massiga $\Delta m =$
 $\rho\Delta V = \rho\pi r^2 vt$, ning samasugune veekogus voolab sealt sama kiirusega välja, see-
ga summaarne vee impulsi muutus aja Δt jooksul on $\Delta p = 2\rho\pi r^2 v^2 t$, ning jõud,
millega vesi mõjub sellele toru osale, on Newtoni teise seaduse põhjal

$$F = \Delta p / \Delta t = 2\rho\pi r^2 v^2.$$

Kaarekujuline toru osa on liikumatu, nii et vee poolt rakendatud jõud on tasakaa-
lustatud kahe terastoru elastsusjõuga. Kui terastoru jäikusteguriks võtame k , siis
on selge, et kehtib võrdus

$$F = k\Delta l + k\Delta l = 2k\Delta l,$$

kus Δl on ühe terastoru pikenemine. Teguri k avaldame ülesande tekstis toodud
seose kaudu kui $k = ES/l = E\pi(R^2 - r^2)/l = E\pi r^2/l$ (kogu ristlõike pindalast
panustab jäikustegurisse ainult materjaliga kaetud osa) ning seega

$$2\rho\pi r^2 v^2 = 2E\pi r^2 \Delta l / l.$$

Siit saame ühe toru pikenemiseks $\Delta l = \rho v^2 l / E$ ning kogu U-toru pikenemiseks

$$2\Delta l = 2\rho v^2 l / E.$$

L392 Veeklaas ★★★

Autor: Siim Ainsaar, piirkonnavor, 2013, G 7

Õhu ruumala klaasis enne vee väljavoolamist on $V_0 = \pi r^2(H - h)$. Pärast välja-
voolamist oli õhu ruumala $V_1 = V_0 + V$ ja vee ruumala $V_2 = \pi r^2 h - V$. Veeseamba
kõrgus $h_2 = \frac{V_2}{\pi r^2}$, nii et vee kaalust tingitud lisarõhk põhjale

$$p_2 = \rho g h_2 = \frac{\rho g V_2}{\pi r^2}.$$

Õhurõhk vee kohal tuleneb isotermi olekuvõrrandist, $p_1 = \frac{p_0 V_0}{V_1}$. Paberilehele mõ-
juvad jõud on tasakaalus:

$$mg + \pi r^2(p_1 + p_2) = \pi r^2 p_0.$$

Kõik kokku pannes

$$m = \frac{\pi r^2 p_0}{g} - \frac{\pi r^2 p_0 (H - h)}{g(H - h + \frac{V}{\pi r^2})} - \rho(\pi r^2 h - V) = \frac{p_0 V}{g(H - h + \frac{V}{\pi r^2})} + \rho(V - \pi r^2 h).$$

L393 Klots vedelikes ★★★

Autor: Erkki Tempel, lahtine, 2014, G 6

Kuna klotsi tihedus on ülemisest vedelikust suurem ning alumisest vedelikust väiksem, jääb klots kahe vedeliku piirpinnale ujuma. Klotsile mõjub sellisel juhul klotsi raskusjõud $F_r = m_{\text{klots}}g = \rho_k Vg$, ning vedelike üleslükkejõud

$$F_y = F_{y1} + F_{y2} = \rho_1 g V_x + \rho_2 g (V - V_x),$$

kus V_x on alumises vedelikus oleva klotsi ruumala ning $V - V_x$ on ülemises vedelikus oleva klotsi ruumala. Raskusjõud ja üleslükkejõud on võrdsed, seega saame võrrandi

$$\rho_k Vg = \rho_1 g V_x + \rho_2 g (V - V_x).$$

Sellest saab avaldada

$$V_x = \frac{V(\rho_k - \rho_2)}{\rho_1 - \rho_2}.$$

Alumise vedeliku nivoo tõuseb ruumala V_x võrra. Kuna anuma põhjapindala on S , siis tõuseb vedelike eraldusnivoo Δh võrra, kusjuures

$$\Delta h = \frac{V_x}{S}.$$

Asendades siia V_x , saame

$$\Delta h = \frac{V(\rho_k - \rho_2)}{S(\rho_1 - \rho_2)}.$$

L394 Kuup veega ★★★

Autor: Jonatan Kalmus, piirkonnavor, 2018, G 7

Esimene lahendus

Tähistame otsitava vee massi m , veesamba kõrguse h ning süsteemi massikeskme kõrguse l . Kuna kuup on sümmeetriline, asub selle massikeskme kõrgusel $\frac{a}{2}$. Vee massikeskme asub veekoguse keskel ehk kõrgusel $\frac{h}{2}$. Kui kuup on tühi, siis ühtib süsteemi massikeskme kuubi massikeskmeaga ehk $l = \frac{a}{2}$ ning veesamba kõrgus $h = 0$. Kui nüüd kuubi põhja aeglaselt vett valada, hakkab veesamba kõrgus h kasvama ning süsteemi massikeskme kõrgus l vähenema, kuna kogu lisatud vesi asub algsest süsteemi massikeskme kõrgusest all pool. Süsteemi massikeskme kõrgus l ei saa vee lisamisega enam alaneda, kui see ühtib veesamba kõrgusega h , sest kui selles olukorras vett juurde lisada, oleks äsja juurde lisatud veekogus eelnevast süsteemi massikeskme kõrgemal ning süsteemi massikeskme kõrgus hakkaks kasvama. Seega, massikeskme on võimalikult madalal olukorras, kui süsteemi massikeskme kõrgus ühtib veesamba kõrgusega ehk $l = h$. Rakendades kangi reeglit saame:

$$M\left(\frac{a}{2} - l\right) = m\left(l - \frac{h}{2}\right).$$

Teades seost $l = h$ ja vee massi $m = \rho a^2 h$ ning asendades need eelnevasse võrrandisse:

$$M\left(\frac{a}{2} - h\right) = \rho a^2 h\left(h - \frac{h}{2}\right).$$

Siit saame h jaoks ruutvõrrandi:

$$\rho a^2 h^2 + 2Mh - Ma = 0,$$

$$h = \frac{-2M \pm \sqrt{4M^2 + 4\rho a^3 M}}{2\rho a^2}.$$

Kuna negatiivne lahend ei sobi, saame

$$h = \frac{M(\sqrt{1 + \frac{\rho a^3}{M}} - 1)}{\rho a^2}.$$

Otsitav veekoguse mass on seega

$$m = \rho a^2 h = M(\sqrt{1 + \frac{\rho a^3}{M}} - 1).$$

Teine lahendus

Minimaalsele süsteemi massikeskmele vastavat veesamba kõrgust on võimalik leida ka tuletise abil. Kuubi sümmeetria tõttu asub selle massikese kõrgusel $\frac{a}{2}$ ning vee massikese kõrgusel $\frac{h}{2}$. Rakendades kangi reeglit saame:

$$M\left(\frac{a}{2} - l\right) = m\left(l - \frac{h}{2}\right).$$

Sellest tuleb avaldada süsteemi massikeskme kõrgus l ning otsida h -d, kui $\frac{dl}{dh} = 0$. Teades, et vee mass on $m = \rho a^2 h$:

$$l = \frac{Ma + \rho a^2 h^2}{2(M + \rho a^2 h)},$$

$$\frac{dl}{dh} = \frac{4\rho a^2 h(M + \rho a^2 h) - 2\rho a^2(Ma + \rho a^2 h^2)}{4(M + \rho a^2 h)^2} = 0.$$

Siit saame lihtsustades ning ρa^2 -ga läbi jagades h jaoks ruutvõrrandi:

$$\rho a^2 h^2 + 2Mh - Ma = 0.$$

See on identne eelnevalt saadud ruutvõrrandiga ning seega on ka saadav vastus on sama:

$$m = M(\sqrt{1 + \frac{\rho a^3}{M}} - 1).$$

L395 Allveelaev ★★★

Autor: Mihkel Heidelberg, lahtine, 2012, G 5

Vee sissevoolu lõppedes on hüdrostaatilised rõhud vees torni sees ja väljas tasakaalus, samuti on õhu temperatuur võrdsustunud vee omaga (vahepeal võib õhu temperatuur kokkusurumise tõttu veidi tõusta). Õhurõhk torni sees on võrdne hüdrostaatilise rõhuga tornis vee piiril. Rõhkude tasakaalust saame avaldada õhukihi paksuse:

$$\begin{aligned}\rho g(h+d) + p_0 &= p_0 \frac{s}{d}, \\ d^2 \rho g + d(p_0 + h\rho g) - sp_0 &= 0, \\ d &= \frac{(\pm\sqrt{(p_0 + h\rho g)^2 + 4s\rho gp_0} - p_0 - h\rho g)}{2\rho g}.\end{aligned}$$

Lähteülesandele vastab positiivne lahend $d \approx 57$ cm. Kuna luugile mõjub altpoolt torni sees oleva õhu rõhk, mis vastab hüdrostaatilisele rõhule sügavusel $d + h$, saame, et summaarne jõud mõjub ülespoole:

$$F = A(\rho g(d+h) + p_0 - \rho gh - p_0) = A\rho gd \approx 2800 \text{ N}.$$

Kui Bond torni vett sisse ei laseks, oleks vee ja õhu poolt summaarne luugile mõjuv jõud allapoole $A\rho gh \approx 120$ kN. Eeldusel, et luuk avaneb väljapoole, seda inimjõul lahti ei saa.

L396 Ookean ★★★★★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2005, G 8

a) Tähistame vedeliku keskmise tiheduse pinnast sügavuseni h kui ρ . Kuna vedeliku mass on kokkusurumatu ja kokkusurutud olukordades võrdne, siis

$$\rho_0 h_0 = \rho h.$$

Kui tiheduse muut on väike, avaldub tiheduste muudu kui

$$\rho = \rho_0(1 + \beta p_{\text{keskmine}}),$$

kus p_{keskmine} on keskmine veele mõju rõhk. Vee rõhk sügavusel h' on $p(h') = \rho gh'$, ehk keskmine rõhk avaldub kui $p_{\text{keskmine}} = p(h' = h/2) = \rho gh/2$ ning

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{\beta \rho gh}{2}\right) = \frac{\rho_0 h_0}{h} \Rightarrow h \left(1 + \frac{\beta \rho gh}{2}\right) = h_0,$$

Viimasest valemist saame avaldada sügavuste vahe Δh :

$$\Delta h = h_0 - h = \frac{\beta \rho gh^2}{2} \approx 36 \text{ m}.$$

b) Sügavusel $H = 10\,000$ m on lisarõhk ligikaudu $p \approx \rho gH$. Sellele vastab ruumala muutus (ühe kuupmeetri kohta):

$$\delta = \frac{\Delta V}{V} = \beta \rho gH \approx 0,0484.$$

Kui veepinnal on ruumalaga V vee mass ρV , siis sama vee massi ruumala sügavusel H on ligikaudu $V(1 - \delta)$ ja tihedus seega:

$$\rho_H V(1 - \delta) = \rho V \quad \Rightarrow \quad \rho_H = \frac{\rho}{1 - \delta}.$$

Seega sellel sügavusel on vee tiheduse muutus:

$$\Delta\rho = \rho_H - \rho = \frac{\rho}{1 - \delta} - \rho = \frac{\rho\delta}{1 - \delta} \approx 51 \text{ kg/m}^3.$$

L397 Kauss ★★★★★

Autor: Taavi Pungas, lahtine, 2013, G 7

Olgu mingil hetkel kausis oleva vee mass m . Siis mõjuvad kausile raskusjõud $(M + m)g$, üleslükkejõud F ja vee sissekukkumisest tulenev rõhumisjõud F . Kõrguselt h kukkudes saavutab vesi kiiruse $v = \sqrt{2gh}$, ajavahemiku Δt jooksul jõuab kaussi veekogus massiga

$$\Delta m = \frac{\rho V_2 \Delta t}{t}.$$

Seega kannab kaussi langev vesi kausile ajavahemikus Δt üle impulsi $\Delta p = \Delta m v$, mistõttu mõjub kausile jõud

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\Delta m v}{\Delta t} = \frac{\rho V_2 \sqrt{2gh}}{t}.$$

Et kaus ei läheks põhja, peab üleslükkejõud teised kaks jõudu tasakaalustama. Maksimaalne võimalik üleslükkejõud on $\rho V_1 g$ ehk 29 N, samas kui teised kaks jõudu annavad kokku maksimaalselt

$$(M + \rho V_2)g + \frac{\rho V_2 \sqrt{2gh}}{t} = 33 \text{ N}.$$

Näeme, et maksimaalne üleslükkejõud jääb liiga väikseks, et kaussi ujumas hoida, seega läheb kaus põhja.

L398 Veejoad ★★★★★

Autor: Mihkel Kree, lahtine, 2015, G 7

Vaatleme veejuga, mis väljub anumast asukohast $y = h$. Selle kohal oleva vee samba kõrgus on h ning energia jäävusest saame avaldada väljuva joa algkiiruse $v = \sqrt{2gh}$. Vabalt langev veejuga on parabool, kusjuures ühe osakese ajalisi liikumisi saame kirjeldada võrranditega $x = vt$ ja $y = h + gt^2/2$. Pärast esimesest võrrandist aja avaldamist saame teisest parabooli võrrandi

$$y = h + \frac{gx^2}{2v^2} = h + \frac{x^2}{4h}.$$

Mõtiskleme nüüd, kuidas määrata kindlaks ruumipiirkonda, millesse saavad langevad veejoad jõuda. Võiksime valida ruumipunkti (x, y) ning küsida, millisel algkõrguselt h alustades on võimalik sinna jõuda. Sobiva algkõrguse h leidmiseks tuleks lahendada ruutvõrrand $h^2 - yh + x^2/4 = 0$. Kui selle võrrandi diskriminant on

positiivne, leidub h jaoks kaks erinevat lahendit ning punkti (x, y) on võimalik jõuda kahelt algkõrguselt. Kui diskriminant on negatiivne, puuduvad reaalarvulised lahendid ning punkti (x, y) pole võimalik jõuda. Neid kahte juhtu eraldab piirjoon, kus diskriminant on null ehk $y^2 - x^2 = 0$, millest saame avaldada piirjoone ehk veejuga mähispinna võrrandi $y = x$.

L399 U-toru ★★★★★

Autor: Erkki Tempel, piirkonnavoore, 2016, G 9

Pärast õli kallamist torusse langeb vee tase Δh võrra selles torus, kuhu kallati õli, ning teises torus veetase tõuseb Δh võrra. Õli ja vee piirpinna kõrgusel on rõhk mõlemas U-toru harus sama. Õliga täidetud harus avaldab õli vee ja õli piirpinnale rõhku

$$p_1 = \rho_{\text{õ}}gl + p_0.$$

Teises (suletud) U-toru harus tekitab kokkusurutud õhk rõhu $p_{\text{õhk}}$. Õhu kokkusurumist võime vaadelda isotermilise protsessina, kus $pV = \text{Const}$. Seega

$$p_0 \cdot Sh = p_{\text{õhk}} \cdot S(h - \Delta h) \quad \Rightarrow \quad p_{\text{õhk}} = \frac{p_0 h}{h - \Delta h}.$$

Vee ja õli nivoo kõrgusel avaldavad teises harus vesi ja õhk rõhku

$$p_2 = \rho_v g(2\Delta h) + p_{\text{õhk}}.$$

Rõhud p_1 ja p_2 on võrdsed ning $\Delta h = l - h$, seega saame kirja panna seose

$$\rho_{\text{õ}}gl + p_0 = \rho_v g2(l - h) + \frac{p_0 h}{h - (l - h)}.$$

Avaldades viimasest seosest õli tiheduse $\rho_{\text{õ}}$, saame

$$\rho_{\text{õ}} = \frac{l - h}{l} \left(2\rho_v + \frac{p_0}{g(2h - l)} \right).$$

L400 V-toru ★★★★★

Autor: Mihkel Kree, lõppvoore, 2008, G 8

Oletame, et vesi on tasakaalust hälbinud nii, et veekiht, mille kõrguse projektsioon toru sihile on δx , on kandunud nurga α all olevast toru poolest teise. Veetaseme kõrguste erinevus toru kahe poole vahel on $\delta h = \delta x(\cos(\alpha) + \cos(\beta))$, mis tekitab lisarõhu $\delta P = \rho \delta h g$. Lisarõhk mõjub vedelikule jõuga, mille toru sihiline komponent on

$$F = \delta P S = \rho \delta x (\cos(\alpha) + \cos(\beta)) g S.$$

See valem on sarnane vedrupendli valemiga $F = k \delta x$, kus

$$k = \rho (\cos(\alpha) + \cos(\beta)) g S.$$

Sellise pendli omavõnkesagedus avaldub kui

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\rho(\cos(\alpha) + \cos(\beta))gS}{m}}.$$

Seega võime öelda, et toru pooli painutades väheneb vedeliku võnkumise sagedus

$$\sqrt{\frac{1}{2}(\cos \alpha + \cos \beta)}$$

korda.